지수 및 멱 법칙 점진기능재료 판의 3차원 자유진동해석

이 원 홍¹ · 한 성 천² · 안 진 희¹ · 박 원 태^{3*}

¹경남과학기술대학교 토목공학과, ²대원대학교 철도건설과, ³공주대학교 건설환경공학부

3-D Free Vibration Analysis of Exponential and Power-law Functionally Graded Material(FGM) Plates

Won-Hong Lee¹, Sung-Cheon Han², Jin-Hee Ahn¹ and Weon-Tae Park^{3*}

¹Department of Civil Engineering, Gyeongnam National University of Science and Technology, Jinju, 52725, Korea

²Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College, Jecheon, 27135, Korea

³Division of Construction and Environmental Engineering Kongju National University, Cheonan, 32588, Korea

Abstract

The exponential and power law functionally graded material(FGM) theory is reformulated considering the refined shear and normal deformation theory. This theory has ability to capture the both normal deformation effect and exponential and power law function in terms of the volume fraction of the constituents for material properties through the plate thickness. Navier's method has been used to solve the governing equations for all edges simply supported plates on Pasternak elastic foundation. Numerical solutions of vibration analysis of FGM plates are presented using this theory to illustrate the effects of power law index and 3-D theory of exponential and power law function on natural frequency. The relations between 3-D and 2-D higher-order shear deformation theory are discussed by numerical results. Further, effects of (i) power law index, (ii) side-to-thickness ratio, and (iii) elastic foundation parameter on nondimensional natural frequency are studied. To validate the present solutions, the reference solutions are discussed.

Keywords : 3-D free vibration analysis; exponential and power law functionally graded material(FGM); elastic foundation; power law index; side-to-thickness ratio

1. 서 론

점진기능재료(functionally graded material, FGM)의 개념은 일본의 재료 과학자에 의해 처음 소개되었다(Hirano *et al.*, 1988). 점진기능재료는 복합재료의 한 종류로서 한 쪽 면에서 다른 쪽 면까지 재료의 성질이 연속적으로 변하는 것으로 적층복합재료에서 나타나는 응력집중 현상을 제거할 수 있다. 게다가 균열은 접착면에서 시작해서 취약한 재료 단면으로 성장하기 쉽다. 점진기능재료에서 이런 문제들을 구성성분의 체적요소를 점차적으로 변화시킴으로써 제거하거나 줄일 수 있다. 지수 함수법(Delale *et al.*, 1993)과 멱 법칙 함수법(Bao *et al.*, 1995)을 사용한 점진기능재료 구조물의 재료특성이 최근까지 활발히 연구되고 있다. 일반적

으로 점진기능재료는 금속과 세라믹을 혼합하여 만들고 토목, 항공, 조선 및 기계 분야의 여러 구조물들에 널리 사용된다. 점진기능재료를 응용한 구조물들이 널리 사용되면서 점진기능재료의 구조적 응답을 예측하기 위한 보다 정확한 이론들이 필요하게 되었다. 두꺼운 판이나 점진기능재료와 같이 진보된 복합체로 구성된 판의 경우에 전단변형 효과가 더 뚜렷하기 때문에 점진기능재료 판의 해석을 위해 일차 전단 변형이론 혹은 고차 전단변형 이론을 이용하여야 한다.

일차전단변형이론(first-order shear deformation theory, FSDT)은 적절한 해석결과를 구할 수 있으나 전단보정 계수(Lee *et al.*, 2008; Malekzadeh *et al.*, 2013; Jung *et al.*, 2014)가 필요하다. 반면에 고차전단변형이론 (higher-order shear deformation theories, HSDTs) (Reddy,

* Corresponding author:

Tel: +82-41-521-9305; E-mail: pwtae@kongju.ac.kr
Received August 20 2015; Revised September 8 2015;
Accepted September 14 2015

©2015 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

2000; Karama *et al.*, 2003; Zenkour, 2006; Aydogdu, 2009; Mechab *et al.*, 2013; Tran *et al.*, 2013; Mantari *et al.*, 2014; Lee *et al.*, 2015; Jung과 Han, 2015)은 전단보정 계수가 필요 없으나 운동방정식이 일차전단변형이론에 비해 복잡하다. Senthilnathan 등(1987)의 4변수 이론에서는 두께 방향으로의 수직전단변형률의 포물선 변화를 고려하였으며 전단보정 계수가 필요하지 않다. Senthilnathan 등(1987)의 변위장은 휨 및 전단부분으로 수직 변위를 분할하는 것을 기초로 정의된다. 4변수 이론의 가장 흥미로운 점은 일차전단변형이론에 비해 적은 미지수와 지배방정식으로 표현되는 것이며 또한 전단보정 계수가 필요하지 않다는 것이다. 그러므로 효과적인 이론이라고 할 수 있다. 처음에는 4변수 이론이 등방성판(Shimpi *et al.*, 2006a)의 해석을 위해 개발되었으나 최근에는 직교이방성 판(Shimpi *et al.*, 2006b), 적층복합 판(Thai *et al.*, 2010), 점진기능재료 판(Benachour *et al.*, 2011; Han *et al.*, 2015), 점진기능재료 샌드위치 판(Bourada *et al.*, 2012), 나노 판(Malekzadeh *et al.*, 2013)의 해석에 이용되고 있다.

그러나 위에서 말한 여러 이론들은 판의 두께 방향으로의 수직변위를 상수로 가정하여 두께 방향 신장 효과를 고려하지 않은 이론들이다. 이러한 가정은 얇은 판이나 적당히 두꺼운 점진기능재료 판의 경우에는 유효하지만 두꺼운 점진기능재료 판의 해석에는 적절한 가정이 아니다. 점진기능재료 판의 두께 방향 신장 효과는 Carrera 등(2011)이 최초로 연구하였으며 두꺼운 판의 경우에 매우 중요한 문제가 되었다. 따라서 점진기능재료 판의 두께 신장 효과는 반드시 고려되어야 한다.

본 연구의 목적은 점진기능재료 판의 두께 신장 효과를 고려함으로써 4변수 이론을 개선하는 것이다. 기존의 4변수 이론의 변위장은 두께 방향으로의 수직변위를 포물선 변화로 가정함으로써 개선되었고 따라서 두께 신장 효과가 고려되었다. 운동방정식은 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하였다. 단순 지지되고 Pasternak 탄성지반 위에 놓인 직사각형 점진기능재료 판의 진동문제에 대한 결과를 구하였다. 본 연구의 정확도를 검증하기 위하여 여러 참고문헌들의 결과들을 제시하였다.

2. 개선된 판 이론

2.1 전단 및 두께방향 변형이 고려된 변위장

고차 전단변형이 고려된 변위장은 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$u_x = u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x \quad (1)$$

$$u_y = u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y$$

$$u_z = w$$

여기서, u_x, u_y 는 중립면($z=0$)의 한 점에서의 면내 변위들이고, u_z 는 수직방향 변위이고 ϕ_x, ϕ_y 는 전단변형 각이다. 그리고 $\Psi(z)$ 는 두께방향으로 전단변형률과 전단응력 분포의 변화를 결정하는 형상함수이다. 고전적 판 이론의 변위장은 $\Psi(z)=0$ 인 경우이고 일차전단변형이 고려된 판 이론의 변위장은 $\Psi(z)=z$ 인 경우이다.

식 (1)은 식 (2)로 나타낼 수 있다.

$$u_x = u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi(z) \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$u_y = u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi(z) \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$u_z = w$$

여기서,

$$\theta_x = \phi_x - \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

식 (2)는 5개의 변수를 가지는 변위장이다. 식 (2)를 4개의 변수를 가지는 변위장으로 개선하기 위해 중립축에 수직인 면내 회전텐서가 두께 방향으로 상수라고 가정하면 식 (4)와 같은 변수의 변화를 제안할 수 있다.

$$u_z = w_b + w_s \quad (4)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x}, \theta_y = -\frac{\partial w_s}{\partial y}$$

여기서, w_b 와 w_s 는 수직방향 변위의 휨 성분 및 전단 성분이다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하면 새로운 4변수 변위장을 얻을 수 있다.

$$u_x = u_x^0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5)$$

$$u_y = u_y^0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

$$u_z = w_b + w_s$$

여기서, $f(z) = z - \Psi(z)$ 그리고 $\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ 이다.

식 (5)의 변위장은 전단변형은 고려되었지만 두께 방향 변형은 고려되지 않은 변위장이다. 두께 방향 변형을 고려하기 위하여 식 (5)를 식 (6)으로 개선하였다.

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ u_y &= u_y^0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ u_z &= w_b + w_s + g(z)w_z \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, w_z 은 두께 방향 신장 효과를 고려하기 위한 미지의 변위 함수이고 $g(z)$ 는 판의 상면과 하면에서 전단응력에 대한 경계조건을 만족하는 형상 함수이며 식 (7)로 표현된다.

$$g(z) = \frac{d\Psi(z)}{dz} \quad (7)$$

최소 포텐셜 에너지 원리를 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다 (Reddy, 2007).

$$0 = \delta\Pi = (\delta K - \delta U) \quad (8)$$

가상 변형 에너지는 식 (9)와 같다.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dz dA \quad (9)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력 텐서 성분, ε_{ij} 는 변형률 텐서 성분이고 $i, j = x, y, z$ 이다.

가상 운동 에너지는 식 (10)과 같다.

$$\delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}_i \delta \dot{u}_i) dz dA \quad (10)$$

여기서, ρ 는 밀도이고 $\dot{u}_i$ 는 u_i 를 시간 t 에 대해서 한번 미분한 것을 나타낸다.

3. 점진기능재료 판의 구성방정식

3.1 지수 및 먹 범칙 함수 점진기능재료 판의 재료특성

재료의 구성성분을 연속적으로 변화시켜 점진기능재료를 제작하게 된다. 점진기능재료의 특징은 연속적으로 등급화된 성질을 가지는 비균질 미세구조라는 것이다. 점진기능재료는

재료 성질의 변화에 의해 정의되고 지수 함수, 먹 범칙 함수로 재료 성질의 변화를 나타낸다.

본 연구에서는 현재 가장 활발하게 연구가 진행되고 있는 지수 및 먹 범칙 함수를 사용하였다.

3.1.1 지수 함수

지수 함수를 이용한 재료 특성의 변화를 식 (11)로 정의할 수 있다.

$$F(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (11)$$

여기서, $A = F_2$, $B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$, h 는 판의 두께, $F(z)$ 은 재료 성질의 변화를 나타내는 함수이고 F_1 과 F_2 는 각각 판의 상/하면의 재료성질이다.

3.1.2 먹 범칙 함수

먹 범칙 함수를 이용한 재료 특성의 변화를 식 (12)로 정의할 수 있다.

$$F(z) = V_f(z)F_1 + (1 - V_f(z))F_2 \quad (12)$$

여기서, $V_f(z)$ 는 체적요소로 식 (13)과 같다.

$$V_f(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^p \quad (13)$$

여기서, p 는 두께를 따라 변하는 재료 성질을 나타내는 재료 매개변수이다.

식 (11)과 (12)에서 함수에 따라 재료 성질의 변화가 지수함수 혹은 먹 범칙 함수 분포를 나타낸다. 이러한 점진기능재료 구조물을 지수 및 먹 범칙 점진기능재료 구조물이라고 한다. 탄성 직사각형을 판을 고려하였을 때 위층과 아래층 면에서 재료의 성질, 탄성계수와 포아송 비는 다르게 정의되지만 요구되는 성능에 따라 미리 규정된 값이다. 그러나 두께방향(z -축)으로 판의 탄성계수, 밀도와 포아송 비는 연속적으로 변하는 것으로 가정할 수 있다. 즉, $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$ 이며 식 (14)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{E(z), \rho(z)\} &= V_f(z)\{E_1, \rho_1\} + (1 - V_f(z))\{E_2, \rho_2\} \\ \text{for } -h/2 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (14)$$

포아송 비의 변화는 무시할 수 있을 정도로 작으므로 상수로 가정한다(Hosseini-Hashemi *et al.*, 2011a).

3.2 점진기능재료 판의 구성방정식

점진기능재료 판의 구성방정식은 식 (15)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

점진기능재료 판의 합응력은 식 (16, 17)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^{(i)} \\ M_{yy}^{(i)} \\ M_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(1, z, f(z)) \\ \sigma_{yy}(1, z, f(z)) \\ \sigma_{xy}(1, z, f(z)) \end{Bmatrix} dz, \quad i = 0, 1, 2 \quad (16)$$

$$\{M_{zz}, M_{yz}, M_{xz}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{zz}g'(z), \sigma_{yz}g(z), \sigma_{xz}g(z)\} dz \quad (17)$$

3.3 탄성지반 모델

탄성지반 위에 놓은 점진기능재료 판에서 점진기능재료 판과 탄성지반은 화학적 결합을 하였다고 가정한다. 수직방향 압력과 전단변형을 고려한 Pasternak탄성지반 모델을 적용하였다. 수직방향 압력은 등가 스프링으로 가정하였고 비압축성 전단층이 전단변형에 저항하는 것으로 가정하였다. 이러한 하중은 식 (18)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_P &= \bar{k}_W u_3 - \bar{k}_P \nabla^2 u_3 \\ &= \bar{k}_W (w_b + w_s + g(z)w_z) - \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s + g(z)w_z) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\bar{k}_W$ 그리고 $\bar{k}_P$ 는 Winkler 지반 계수 그리고 전단 지반계수를 의미한다. Pasternak탄성지반 효과로 인해 추가되는 가상 변형에너지는 식 (19)와 같다.

$$\delta U_{EF} = \int_A \left[\bar{k}_W u_3 \delta u_3 + \bar{k}_P \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (19)$$

4. 평형방정식

식 (8)에 식 (9), (10)과 (19)를 대입하고 부분 적분하여 정리하면 식 (20)~(24)와 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : M_{xx,x}^{(0)} + M_{xy,y}^{(0)} = m_0 \ddot{u}_x - m_1 \ddot{w}_{b,x} - m_2 \ddot{w}_{s,x} \quad (20)$$

$$\delta u_y : M_{xy,x}^{(0)} + M_{yy,y}^{(0)} = m_0 \ddot{u}_y - m_1 \ddot{w}_{b,y} - m_2 \ddot{w}_{s,y} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & (M_{xx,x}^{(1)} + M_{xy,y}^{(1)})_{,x} + (M_{xy,y}^{(1)} + M_{yy,y}^{(1)})_{,y} \\ & - \bar{k}_W (w_b + w_s + g(z)w_z) + \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s + g(z)w_z) \\ & = m_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + m_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} \right) \\ & - m_3 \nabla^2 \ddot{w}_b - m_4 \nabla^2 \ddot{w}_s + m_6 \ddot{w}_z \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & (M_{xx,x}^{(2)} + M_{xy,y}^{(2)})_{,x} + (M_{xy,y}^{(2)} + M_{yy,y}^{(2)})_{,y} \\ & + M_{xz,x} + M_{yz,y} - \bar{k}_W (w_b + w_s + g(z)w_z) \\ & + \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s + g(z)w_z) \\ & = m_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + m_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} \right) \\ & - m_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - m_5 \nabla^2 \ddot{w}_s + m_6 \ddot{w}_z \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta w_z : & M_{xz,x} + M_{yz,y} - M_{zz} - \bar{k}_W (w_b + w_s + g(z)w_z) \\ & + \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s + g(z)w_z) = m_6 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + m_7 \ddot{w}_z \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$m_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z), g(z), g^2(z)) dz \quad (25)$$

5. 해석적 방법

지수 및 맥 법칙 함수 점진기능재료 판의 3차원 진동해석을 수행하기 위해 전단 및 두께 방향 변형을 고려한 3차원 전단변형 이론을 개선하여 단순지지 판의 진동 해석방법을 제시하였다. 4변이 단순 지지된 경우에 Navier 방법으로 해석적 결과를 구할 수 있다. Navier 방법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식 (26)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x^0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} A_1 \\ u_y^0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} A_2 \\ \{w_b(x, y, t), w_s(x, y, t), w_z(x, y, t)\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{W_{bmn}, W_{smn}, W_{zmn}\} A_3 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$,

$A_2 = \sin \xi x \cos \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$, $A_3 = \sin \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$

그리고 $\xi = \frac{m\pi}{a}$, $\eta = \frac{n\pi}{b}$, ω_{mn} 은 고유진동수이다.

자유진동해석을 위하여 식 (26)을 식 (20)~(24)에 대입하면 동적 평형방정식 식 (27)을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}] - \omega_{mn}^2 [\mathbf{M}] \{\Delta\} = \{\mathbf{0}\} \quad (27)$$

여기서, $\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, W_{zmn}\}$,

그리고 $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬, $[\mathbf{M}]$ 은 질량행렬이다.

6. 해석 결과

본 연구의 결과를 비교, 분석하기 위하여 지수 함수 및 멱법칙 함수 점진기능재료 판의 해석결과를 참고문헌들의 해석결과와 비교하였다. 점진기능재료 판의 재료 및 기하학적 성질은 Table 1 그리고 Fig. 1과 같다.

Table 1 Material properties of FGM plate

Material Properties	Metal	Ceramic
	Aluminum	Alumina
Elastic Modulus: E (GPa)	70	380
Poisson's ratio: ν	0.3	0.3
Density: ρ (kg/m ³)	2702	3800

Fig. 1 Geometry of FGM plate

고유진동수와 탄성지반계수의 무차원화는 식 (28)을 이용한다.

Table 2 Comparison of nondimensional frequency($\hat{\omega}$) of P-FGM plate

a/h	Mode (m, n)	Method	P-FGM Power-law Index(p)				
			0	0.5	1	4	10
5	1 (1,1)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Present	0.2122	0.1825	0.1660	0.1409	0.1318
	2 (1,2)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Present	0.4661	0.4042	0.3677	0.3047	0.2811
	3 (2,2)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Present	0.6760	0.5893	0.5365	0.4381	0.4009
10	1 (1,1)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Present	0.0577	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	2 (1,2)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Present	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
	3 (2,2)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Present	0.2122	0.1825	0.1660	0.1409	0.1318
20	1 (1,1)	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011a	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> , 2011b	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Present	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Table 3 Comparison of nondimensional frequency($\hat{\omega}$) of P-FGM plate

Mode (m, n)	a/h	Method	P-FGM Power-law Index(p)				
			0	0.5	1	4	10
1 (1,1)	2	Matsunaga, 2008	0.9400	0.8232	0.7476	0.5997	0.5460
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.9414	0.8248	0.7516	0.6056	0.5495
		Present	0.9420	0.8253	0.7521	0.6057	0.5497
	5	Matsunaga, 2008	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Present	0.2122	0.1825	0.1660	0.1409	0.1318
	10	Matsunaga, 2008	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Present	0.0577	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
2 (1,2)	2	Matsunaga, 2008	1.7406	1.5425	1.4078	1.1040	0.9847
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	1.7512	1.5798	1.4164	1.1147	0.9958
		Present	1.7534	1.5515	1.4180	1.1156	0.9970
	5	Matsunaga, 2008	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Present	0.4661	0.4042	0.3677	0.3047	0.2811
	10	Matsunaga, 2008	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		Belabed <i>et al.</i> , 2014	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Present	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868

Table 4 Comparison of nondimensional frequency($\bar{\omega}$) of E-FGM plate on elastic foundation

k_W	k_P	$a/h=10$		$a/h=5$		$a/h=2.5$	
		Lü <i>et al.</i> , 2009	Present	Lü <i>et al.</i> , 2009	Present	Lü <i>et al.</i> , 2009	Present
0	0	5.1295	5.2889	4.7524	4.8996	3.8444	3.9679
	10	5.5560	5.7011	5.1964	5.3226	4.3578	4.4376
	25	6.1404	6.2688	5.7978	5.8998	5.0090	5.0480
10	0	5.1520	5.3105	4.7759	4.9219	3.8724	3.9932
	10	5.5767	5.7212	5.2179	5.3431	4.3819	4.4599
	25	6.1591	6.2870	5.8170	5.9183	5.0291	5.0671
100	0	5.3498	5.5016	4.9824	5.1183	4.1143	4.2135
	10	5.7600	5.8989	5.4072	5.5244	4.5913	4.6547
	25	6.3255	6.4492	5.9870	6.0822	5.2050	5.2347
1000	0	7.0281	7.1359	6.6999	6.7726	5.9094	5.9179
	10	7.3450	7.4465	7.0192	7.0831	6.2086	6.2141
	25	7.7962	7.8894	7.4716	7.5244	6.6157	6.6237

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad (28)$$

$$k_W = \frac{\bar{k}_W a^4}{D}, \quad k_P = \frac{\bar{k}_P a^2}{D}, \quad D = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)}$$

폭-두께 비가 5, 10 그리고 20인 경우의 P-FGM 판의 무차원 진동수를 참고문헌의 결과와 비교하여 Table 2에 나타내었다. 본 연구의 결과는 참고문헌의 결과들과 매우 정확하게 일치하였다. 거듭제곱 지수가 증가하면 진동수가 감소하였고 폭-두께 비가 증가할 때도 진동수가 감소하였다.

두꺼운 점진기능재료 판의 진동수를 비교하기 위하여 폭-두께 비가 2인 경우를 포함하는 P-FGM 판의 무차원 진동

수를 Table 3에 나타내었다. 폭-두께 비가 2인 경우에도 본 연구의 결과는 참고문헌의 결과들과 0.6%의 오차가 발생하였다. Belabed 등(2014)의 결과는 폭-두께비가 2이고 2번 모드의 경우에 거듭제곱 지수가 0.5일 때 2.4%의 오차가 발생하였다.

지수함수 점진기능재료의 무차원 진동수를 구하기 위하여 재료 성질을 식 (29)를 이용하였다.

$$E_1 = 10E_2, \quad \rho_1 = 10\rho_2, \quad \nu = 0.3 \quad (29)$$

Lü 등(2009)의 3차원 해석결과와 비교하였다. Table 4에서 탄성지반계수가 0인 경우 Lü 등(2009)과 본 연구의

오차는 3%정도 발생하였다. 탄성지반계수가 1000, 25인 경우에는 폭-두께비가 10일 때 1.1%, 5일 때 0.7% 그리고 2.5 일 때 0.1%의 오차가 발생하였다. 따라서 두께가 매우 두꺼운 점진기능재료 판의 경우에 전단변형은 물론 두께 방향으로의 변형을 고려한 3차원 엄밀 해석이 수행되어야 함을 알 수 있었다.

Fig. 2 Nondimensional Frequency of functionally graded material plate($k_p=0$, $p=10.0$)

폭-두께 비의 변화와 Winkler 탄성지반 계수의 변화에 따른 점진기능재료 판의 무차원 진동수를 Fig. 2에 나타내었다. Winkler 탄성지반 계수의 증가는 점진기능재료 판의 강성을 증대시키는 효과를 발휘하게 되어 무차원 진동수를 증가시켰다.

Fig. 3 Nondimensional Frequency of functionally graded material plate($k_W=0$, $p=10.0$)

Fig. 3은 Pasternak 탄성지반 계수의 영향을 분석하였다. Pasternak 탄성지반 계수가 Winkler 탄성지반 계수에 비하여 상대적으로 진동수의 변화에 미치는 효과가 크다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 4 Nondimensional Frequency of functionally graded material plate($k_W=0$, $k_P=0$, $p=10.0$)

Fig. 5 Nondimensional Frequency of functionally graded material plate($k_W=1000$, $k_P=100$, $p=10.0$)

Fig. 4와 5에서는 거듭제곱 지수와 점진기능재료 판의 진동수의 관계를 나타내었다. 흥미로운 사실은 탄성지반 효과가 고려되지 않은 Fig. 4에서는 거듭제곱 지수의 증가함에 따라 진동수가 감소하는 반면에 탄성지반 효과가 고려된 Fig. 5에서는 거듭제곱 지수의 증가에 따라 진동수가 감소하지 않았다는 것이다. 거듭제곱 지수 (p)가 0.1에서 1로 증가할 때는 진동수가 감소하였으나 거듭제곱 지수 (p)가 1에서 10으로 증가할 때는 진동수가 증가하였다. 따라서 점진기

능재료 판의 엄밀한 진동해석을 위해 탄성지반 효과를 고려하는 경우 거듭제곱 지수의 변화에 따른 진동수의 변화를 정확히 분석할 필요가 있다고 판단된다.

7. 결 론

본 연구에서 지수 및 맥 법칙 함수 점진기능재료 판의 3차원 동적해석을 수행하였다. Hamilton 정리를 이용하여 전단 및 두께 방향 변형이 고려된 동적 평형방정식을 유도하였고 Pasternak 탄성지반 모델을 적용하여 정확한 탄성지반 효과를 고려하였다. 탄성지반 계수와 거듭제곱 지수 등의 변화에 따른 점진기능재료 판의 동적 해석결과들로 부터 다음과 같은 세부적인 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 점진기능재료 판의 탄성지반 효과는 강성증대 효과를 발휘하여 진동수의 증가를 유발하였다.
- (2) Winkler 탄성지반 계수에 비해 Pasternak 탄성지반 계수가 진동수의 변화에 미치는 영향이 상대적으로 더 컸다.
- (3) 거듭제곱 지수의 증가는 탄성지반 효과가 고려되지 않는 경우에 진동수를 감소시켰다. 그러나 탄성지반 효과가 고려되는 경우 거듭제곱 지수에 따른 진동수의 변화는 보다 엄밀한 해석이 필요하다고 판단된다.

점진기능재료 판의 해석에 관한 연구가 최근에 활발히 진행되고 있는 상황이다. 그러나 지수 및 맥 법칙 함수 점진기능재료 판의 3차원 동적 해석에 관해서는 기존의 연구 자료가 전무한 실정이다. 본 연구의 결과는 향후 점진기능재료 판의 3차원 동적해석을 연구하는 연구자들을 위한 비교 연구 자료가 될 수 있을 것이라 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2014년도 경남과학기술대학교 기성회 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- Aydogdu, M. (2009) A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates, *Compos. Struct.*, 89, pp.94~101.
- Bao, G., Wang, L. (1995) Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/Metal Coatings, *Int. J. Solids Struct.*, 32, pp.2853~2871.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Bég, O.A. (2014) An Efficient and Simple Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Functionally Graded Material (FGM) Plates, *Compos. Part B: Eng.*, 60, pp.274~283.
- Benachour, A., Daouadji, T.H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Ahmed, M.S. (2011) A Four Variable Refined Plate Theory for Free Vibrations of Functionally Graded Plates with Arbitrary Gradient, *Compos. Part B: Eng.*, 42, pp.1386~1394.
- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. (2012) A New Four-variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates, *J. Sandwich Struct. & Mater.*, 14, pp.5~33.
- Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M. (2011) Effects of Thickness Stretching in Functionally Graded Plates and Shells, *Compos. Part B: Eng.*, 42, pp.123~133.
- Delale, F., Erdogan, F. (1983) The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane, *J. Appl. Mech. (ASME)*, 50, pp.609~614.
- Han, S.C., Park, W.T., Jung, W.Y. (2015) A Four-variable Refined Plate Theory for Dynamic Stability Analysis of S-FGM Plates based on Physical Neutral Surface, *Compos. Struct.*, 131, pp.1081~1089.
- Hirano, T., Yamada, T. (1988) Multi-paradigm Expert System Architecture based upon the Inverse Design Concept, International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications, Hitachi, Japan.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011a) Study on the Free Vibration of Thick Functionally Graded Rectangular Plates according to a New Exact Closed-form Procedure, *Compos. Struct.*, 93, pp.722~735.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011b) A New Exact Analytical Approach for Free Vibration of Reissner-Mindlin Functionally Graded Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, 53, pp.11~22.
- Jung, W.Y., Han, S.C. (2014) Transient Analysis of FGM and Laminated Composite Structures using a Refined 8-node ANS Shell Element, *Compos.: Part B*, 56, pp.372~383.
- Jung, W.Y., Han, S.C. (2015) Static and Eigenvalue

- Problems of Sigmoid Functionally Graded Materials (S-FGM) Micro-scale Plates using the Modified Couple Stress Theory, *Appl. Math. Model.*, 39, pp.3506~3524.
- Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S.** (2003) Mechanical Behaviour of Laminated Composite Beam by the New Multi-layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity, *Int. J. Solids & Struct.*, 40, pp.1525~1546.
- Lee, W.H., Han, S.C., Park, W.T.** (2008) Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates, *J. Korea Academic-Industrial coop. Soc.*, 9(4), pp.1043~1049.
- Lee, W.H., Han, S.C., Park, W.T.** (2015) A Study of Dynamic Instability for Sigmoid Functionally Graded Material Plates on Elastic Foundation, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 28(1), pp.85~92.
- Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q.** (2009) Exact Solutions for Free Vibrations of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations, *Mech. Adv. Mater. & Struct.*, 16, pp.576~584.
- Malekzadeh, P., Monajjemzadeh, S.M.** (2013) Dynamic Response of Functionally Graded Plates in Thermal Environment under Moving Load, *Compos. Part B: Eng.*, 45, pp.1521~1533.
- Malekzadeh, P., Shojaei, M.** (2013) Free Vibration of Nanoplates based on a Nonlocal Two-variable Refined Plate Theory, *Compos. Struct.*, 95, pp.443~452.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C.** (2014) Optimized Sinusoidal Higher Order Shear Deformation Theory for the Analysis of Functionally Graded Plates and Shells, *Compos. Part B: Eng.*, 56, pp.126~136.
- Matsunaga, H.** (2008) Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates according to a 2-D Higher-order Deformation Theory, *Compos. Struct.*, 82, pp.499~512.
- Mechab, I., Mechab, B., Benaissa, S.** (2013) Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates using Four-variable Refined Plate Theory by the New Function, *Compos. Part B: Eng.*, 45, 748~757.
- Reddy, J.N.** (2000) Analysis of Functionally Graded Plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47, pp.663~684.
- Reddy, J.N.** (2007) Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press, London.
- Senthilnathan, N.R., Chow, S.T., Lee, K.H., Lim, S.P.** (1987) Buckling of Shear-deformable Plates, *AIAA J.*, 25, pp.1268~1271.
- Shimpi, R.P., Patel, H.G.** (2006a) Free Vibrations of Plate using Two Variable Refined Plate Theory, *J. Sound & Vib.*, 296, pp.979~999.
- Shimpi, R.P., Patel, H.G.** (2006b) A Two Variable Refined Plate Theory for Orthotropic Plate Analysis, *Int. J. Solids & Struct.*, 43, pp.6783~6799.
- Thai, H.T., Kim, S.E.** (2010) Free Vibration of Laminated Composite Plates using Two Variable Refined Plate Theory, *Int. J. Mech. Sci.*, 52, pp.626~633.
- Tran, L.V., Ferreira, A.J.M., Nguyen-Xuan, H.** (2013) Isogeometric Analysis of Functionally Graded Plates using Higher-order Shear Deformation Theory, *Compos. Part B: Eng.*, 51, pp.368~383.
- Zenkour, A.M.** (2006) Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates, *Appl. Math. Model.*, 30, pp.67~84.

요 지

지수 함수 및 먹 범칙 함수를 이용한 점진기능재료(FGM) 판의 전단 및 두께 방향 변형을 고려한 이론을 정식화하여 동적 평형방정식을 유도하였다. 지수 함수 및 먹 범칙 함수는 두께 방향으로 재료의 변화를 고려할 수 있고 3차원 해석방법은 전단 및 두께 방향 변형을 고려함으로써 점진기능재료의 정확한 구조적 특성을 고려할 수 있다. Pasternak탄성지반 위에 놓인 4변이 단순 지지되고 전단 및 두께 방향 변형이 고려된 점진기능재료 판의 지배방정식을 풀기 위해 Navier 방법을 사용하였다. 거듭제곱 지수와 3차원 해석의 효과를 나타내기 위한 지수 및 먹 범칙 점진기능재료 판의 동적 해석결과를 제시하였다. 기존의 2차원 고차전단변형 이론 및 3차원 이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 거듭제곱 지수, (ii) 폭-두께 비, 그리고 (iii) 탄성지반 계수, 등이 점진기능재료 판의 자유진동수에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였다.

핵심용어 : 3차원 자유진동해석, 지수 및 먹 범칙 점진기능재료, 탄성지반, 거듭제곱 지수, 폭-두께 비