초기 불완전성을 고려한 공간 트러스의 분기좌굴과 라이즈-스팬 비에 따른 임계하중 특성

Characteristics of Buckling Load and Bifurcation in Accordance with Rise-span Ratio of Space Truss Considering Initial Imperfection

이 승 재¹⁾

손 수 덕²⁾

Lee, Seung Jae

Shon, Su Deok

요약 : 본 연구는 초기조건에 민감한 공간 트러스를 대상으로 불완전성으로 인한 분기거동 및 불안정 특성에 대해서 연구하였으며, 점선강성행렬의 행렬식과 고유치해석으로 임계점과 좌굴하중을 구하였다. 고유모드의 민감성에 의한 불안정 현상을 고찰하기 위해서 2-자유절점 공간 트러스와 스타 돔 및 3링 돔 모델을 예제로 채택하였으며, 라이즈-스팬 비 및 하중 파라메타에 따른 좌굴하중의 영향을 분석하였다. 2-자유절점 모델의 초기 형상불완전성에 따른 민감성은 고유모드에 따라 임계 후 평형경로가 바뀌었으며, 좌굴하중은 불완전량의 증가에 따라 감소하는 결과를 얻었다. 예제에서 나타난 두 가지 민감한 좌굴패턴은 자유절점의 변위 위치를 살펴봄으로써 설명할 수 있었고, 형상 불완전성에 따른 거동은 비대칭 고유모드가 가장 큰 영향을 주었다. 민감한 고유모드는 단순화한 모델의 비선형 메커니즘 기저와 유사하였다. 스타 돔 모델은 라이즈-스팬 비가 높을수록 전체좌굴보다는 국부좌굴이 우세하며, 하중 파라메타 값이 클수록 평형경로 상에 분기점이 발생하였다. 또한 스타돔과 3링 모델의 좌굴하중은 각각 극한점 하중레벨의 약 50-70% 및 80-90%로 나타났다.

ABSTRACT : This study investigated the characteristics of bifurcation and the instability due to the initial imperfection of the space truss, which is sensitive to the initial conditions, and the calculated buckling load by the analysis of Eigen-values and the determinant of tangential stiffness. A two-free nodes model, a star dome, and a three-ring dome model were selected as case studies in order to examine the unstable phenomenon due to the sensitivity to Eigen mode, and the influence of the rise-span ratio and the load parameter on the buckling load were analyzed. The sensitivity to the imperfection of the two-free nodes model changed the critical path after reaching the limit point through the bifurcation mode, and the buckling load level was reduced by the increase in the amount of imperfection. The two sensitive buckling patterns for the model can be explained by investigating the displaced position of the free node, and the asymmetric Eigen mode was a major influence on the unstable behavior due to the initial imperfection. The sensitive mode was similar to the in-extensional mechanism basis of the simplified model. Since the rise-span ratio was higher, the effect of local buckling is more prominent than the global buckling in the star dome, and bifurcation on the equilibrium path occurring as the value of the load parameter was higher. Additionally, the buckling load levels of the star dome and the three-ring model were about 50-70% and 80-90% of the limit point, respectively.

핵심용어 : 공간 트러스, 초기 불완전성, 분기좌굴, 국부좌굴, 전체좌굴, 비선형 메커니즘

KEYWORDS : space truss, initial imperfection, bifurcation, local buckling, global buckling, in-extensional mechanism

1. 서론

연속체 쉘, 막 구조물, 케이블 넷 등과 함께 경량구조물의 범주에 속하는 공간 트러스 시스템은 상대적으로 작은 자중을 가지는 장점과 면내력으로 하중을 전달하는 형태저항형

상으로 장스팬을 가능하게 한다. 이러한 공간 트러스는 힘의 흐름이 연속체 쉘과 유사하여 많은 역학적인 장점들을 갖고 있을뿐더러, 아름답기도 하지만, 쉘에서 반드시 해결되어야만 하는 구조불안정 문제도 가지고 있다. 즉, 쉘 구조 원리에서 긴 경간을 얇게 만들면 뿔좌굴(snap-through) 및 분기좌굴

1) 한국기술교육대학교 건축공학부 교수, 공학박사(leeseung@kut.ac.kr)

2) 교신저자. 한국기술교육대학교 건축공학부 연구교수, 공학박사

(Tel: 041-560-1334, Fax: 041-560-1224, E-mail: sdshon@kut.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2012년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

(bifurcation) 등과 같은 비선형성에 기인한 불안정한 거동이 나타나며, 초기 조건에 매우 민감하다. 초기 형상 불완전에 대한 민감성은 평형경로에서 분기경로로 진행하려는데 결정적인 영향을 미치며, 형상이나 하중 파라메타의 불완전성에 대한 임계점과 분기점에 관한 연구주제는 동적 좌굴 및 불안정 거동에 관한 연구주제와 더불어 많은 연구자들의 관심 대상이었다(Papadarakakis, 1983; Hill 등, 1989; El-Sheikh, 1998; Kim 등, 1997).

구조물의 평형경로 상에서 존재하는 분기점의 발생과 분기 거동은 불완전성에 기인한 파라메타의 조합된 영향으로 나타나며, Huseyin(1973)은 이러한 multi-parameter stability problem를 풀기위해 확장된 섭동기법을 연구하였다. 분기해석의 방법은 Choong과 Hangai(1993)가 발표한 문헌에서 기존의 해석방법에 대한 특성을 자세히 설명하고 있으며, 분기점의 해석기법에서 직, 간접적인 분기예측 및 일반역행렬을 이용한 방법 등을 다루고 있고, 대상은 보존계 탄성체의 기하학적 비선형성을 고려하였다.(Coan과 Plaut, 1983; Abedi와 Parke, 1991) 이 후, Choong과 Kim(2001)은 다중 하중파라메타의 단순임계에 대한 안정 경계를 구하는 방법을 제시하였으며, 일반적으로 임계점은 접선강성행렬의 행렬식과 고유치 및 고유벡터의 특성을 이용해 판별할 수 있다(Bergan, 1980; Crisfield, 1981).

곡률을 이용한 공간 트러스 구조물들은 주로 부재좌굴, 절점좌굴 및 전체좌굴과 이들의 복합적인 결과로서 불안정 현상이 나타난다. 이에 대하여 Kato et al.(1994)은 절점강성이 단층 격자 돔의 좌굴내력에 미치는 영향을 연구하였으며, Chan & Zhou(1995)는 각 부재에 초기 불완전성을 고려한 이차 탄성해석(Second-order elastic analysis)기법을 개발하였고, 초기불완전이 고려된 부재강성행렬을 유도하였으며, 좌굴특성의 영향을 연구하였다. 이들의 연구는 부재좌굴을 고려하여 구조물의 좌굴내력에 미치는 영향을 알기 위한 것인데 비해서 Bulenda & Knipper(2001)은 구조물의 좌굴모드에 대한 파라메타 연구를 그리드 셸을 대상으로 수행하였으며, 형상초기불완전성의 영향과 적용방법을 연구하였다. 국내에서도 공간 구조물의 불안정 문제에 관해서 연구가 많이 수행되었다. 정적 불안정 문제에 대해서 절점강성을 고려한 삼각형네트워크 돔의 좌굴하중해석(정환목 등, 1993)은 좌굴의 영향을 연속체 문제로 치환하는 연구를 수행하였으며, 초기 부정에 대한 좌굴특성의 영향에 대해서도 연구되었다.(정환목, 1997; 정환목, 1998) 편집합에 대한 좌굴거동해석(권택진 등, 1997)을 비롯하여 단층 래티스돔에 관한 불안정 해석과 거동에 관한 연구에서는 3개의 해석모델을 대상으로 모드 중첩법을 사용한 좌굴후거동과 임계하중해석(김진기와 한상을, 1998), 호장법을 사용한 알고리즘을 개발하

여 다중스타돔을 대상으로 다분기 해석(윤한흠과 한상을, 2000)을 하였고, 이경수 등(2009)은 좌굴점을 찾기위한 간접법과 분기경로에 대한 이론을 연구하였다. 절점의 강성도에 따른 유한요소정식화 및 해석결과를 통한 불안정해석(김승덕, 2002; 손수덕 등, 2003)의 연구 및 하중모드를 고려한 돔형 프레임의 분기점 특성 해석(손수덕 등, 2011)도 많이 수행되었다. 그러나 각각의 좌굴에 대한 임계와 분기점은 매우 복잡한 관계이며, 독립된 파라메타로 각각의 특성과 관계를 파악하고 정의하는 것은 쉽지 않다. 특히, 전체좌굴과 국부적으로 발생하는 절점좌굴에 대한 공간 구조물의 미묘한 관계는 하중모드, 형상 조건 및 초기 불완전성의 특성에 매우 민감하며, 두 불안정점에 관한 발생시점의 관찰은 복잡한 구조물에서는 명확히 정의하기 힘들다.

따라서 본 연구에서는 편-절점 공간 구조물에서 나타나는 평형경로 상의 임계점과 분기점 및 좌굴모드에 따른 분기거동을 해석적 방법을 이용하여 분석하고, 라이즈-스팬 비와 하중 파라메타에 따른 좌굴하중레벨의 특성에 관해서 연구하도록 한다. 고유좌굴모드에 따른 분기거동의 민감성과 절점좌굴과 전체좌굴에 대한 현상을 비교적 명확하게 고찰하기 위해서 단순한 모델인 2-자유절점 모델 과 스타 돔을 분석하였으며, 라이즈 스펠에 따른 형상의 분석에서는 스타 돔과 3링 공간 구조물을 대상으로 라이즈-스팬 비에 따른 좌굴거동을 분석하였다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 접선강성행렬과 임계점의 특성 및 판별방법을 설명하고, 단순 모델을 이용하여 평형경로와 임계점의 정의 방법을 살펴본다. 3장에서는 초기형상 불완전성에 따른 민감한 분기거동을 2개의 자유절점 모델 및 스타 돔을 이용하여 불안정 거동과 특성을 규명한다. 4장에서는 스타 돔과 3링 스타 돔 모델에 대해서 라이즈-스팬 비 및 하중 파라메타에 따른 분기점과 임계하중의 특성과 영향을 분석하고, 마지막으로 이상의 결론을 5장에서 요약하도록 한다.

2. 불안정 임계점의 판별과 분기거동

비선형 평형궤도의 각 증분구간에서의 접선강성행렬과 고유치를 이용하여 임계점에 도달하였을 때 불안정점을 분류하는 방법은 가장 일반적이고 많이 이용하는 방식이다. n 개의 자유도로 선형화된 증분형 제1 섭동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f} \dot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (1)$$

여기서, 접선강성행렬 $\mathbf{K}$ 는 보존계에서는 대칭행렬이고, 서로 직교하는 변환행렬이 존재하므로, 대각화(diagonalizable matrix)가 가능하다. $\mathbf{K}$ 의 n 개의 고유치 c_i 에 대응하는 정규

화 고유벡터를 $\mathbf{v}_i$ 라 할 때, $\mathbf{v}_i$ 을 열벡터로 하는 직교행렬 (orthogonal matrix) $\mathbf{V} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n]$ 을 이용하여 변위벡터를 변환하고, 양변에 최소고유치에 해당하는 고유벡터 $\mathbf{v}_1^T$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{K} \mathbf{V} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{f} \dot{\lambda} = 0 \quad (2)$$

식(2)에서 특이점(singular point)에서는 $|\mathbf{K}|$ 가 0이므로 좌변의 첫 번째 항은 소거되거나 또는 최소 고유치가 0일 때, 두 번째 항에 의해서 임계점이 분류된다. 여기서, 임계점은 다음의 두 조건을 고려할 수 있다(Choong & Hangai, 1993).

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{f} \neq 0, \dot{\lambda} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{f} = 0 \quad (4)$$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{f}$ 를 살펴보면, 최소 고유치 c_1 에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{v}_1$ 와 하중모드 $\mathbf{f}$ 간의 내적을 말하며, 0일 경우는 서로 직교함을 의미한다. 따라서 임계점에 대해서 식 3의 조건은 극한점을 의미하고, 식 4의 조건이 분기점을 의미하게 된다. 이때 분기점에서 $\dot{\lambda} = 0$ 일 때가 대칭분기, $\dot{\lambda} \neq 0$ 일 때가 비대칭 분기점이다. 접선강성행렬의 행렬식과 고유치해석을 통한 좌굴점의 분류는 일반적으로 많이 쓰는 방법이며, 증분해석을 통해서 비선형 평형경로와 분기경로를 탐색할 수 있다.

접선강성행렬을 구하기 위해서는 공간 트러스의 기하학적 비선형성을 고려하여 증분형 방정식을 유도해야 한다. 비선형 평형경로를 얻기 위한방정식의 자유도는 전형적인 변환변위 (translational displacements) $\mathbf{d}$ 가 이용되며, 형상함수 N_i, N_j 을 이용하여 변위함수를 가정하면 식(5)와 같다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [N_i \mathbf{I} : N_j \mathbf{I}] \mathbf{d} \quad (5)$$

기하학적 비선형성은 변형도-변위관계식에서 베르누이-오일러 가정에 근거하여 2차 항을 포함함으로써 대 변위 해석이 가능하게 되며, 식(6)과 같다. 여기서 $(\dots, x)$ 는 x 에 관한 편미분이다.

$$\epsilon_x = A_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (6)$$

여기서,

$$A_1 = [N_{i,x} \ 0 \ 0 : N_{j,x} \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{B} = [N_{i,x} \mathbf{I} : N_{j,x} \mathbf{I}]$$

변형율이 비교적 작을 때는 고려하지 않았던 2차항을 고려와 가상일의 원리를 적용하여 접선강성행렬을 유도하면 식 (7)과 같고, 좌표변환행렬을 이용해서 구조물의 전체좌표계에 대한 접선강성행렬로 표현할 수 있다. 여기서 첫 번째 항은 탄성강성행렬이고, 두 번째는 기하학적 강성행렬이고, $\sigma_x^{(0)}$ 는 이전단계의 응력이다.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g = ALE(A_1^T A_1) + AL\sigma_x^{(0)}(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \quad (7)$$

전체좌표계에서의 접선강성행렬을 이용하여 증분해석을 수행하고, 매 단계마다 행렬식과 고유치해석을 수행하고 불완전성을 고려하여 평형궤도 상에서의 변화를 살펴봄으로써 임계점의 특성을 알아볼 수 있다. 평형경로상의 임계점과 분류에 대해서 Kim(1990)에서 다루어진 2자유절점 예제를 채택하여 해석결과를 알아본다. 여기서 극한점 및 분기점의 판별과 공간구조물의 불안정 현상인 뒤틀좌굴과 분기좌굴현상에서 임계점의 관계를 알아본다.

그림 1. 2-자유절점 해석모델의 형상 및 파라미터

표 1. 2-자유절점 해석모델의 초기입력 데이터

모델	μ (H/2L)	L(m)	H(m)	단면적 A(cm ²)	
				a 부재	나머지
A	0.1	5.0	1.0	11.2	11.2
B					1.12

대상 예제의 형상은 그림 1과 같이 2개의 자유절점과 8개의 경계절점으로 구성되며, 부재는 a라 명명한 세 개의 부재와 여덟 개의 부재가 더 연결되어서 모두 열한 개의 부재를 가진다. 하중조건은 1번과 2번 절점에 연직방향의 집중력이 작용하며, 구조물의 형상 변수로는 높이를 H, 그리고 단위 절점에 대한 밑면 반지름을 L이라 정의한다. 부재의 탄성계수는 210,000MPa, 요소 내에서는 일정한 단면으로 가정되며, 그 외의 초기 입력 자료는 표 1과 같다. 여기서, 해석 모델은 부재가 모두 동일한 단면적을 가질 때와, a부재를 제외한 나머지 부재가 a부재의 1/10에 해당하는 단면적을 적용하는 두 가지 모델로 나누어 해석을 하였다.

표 2. 2-자유절점 해석모델의 임계점 변위 및 좌굴하중 비교

모델	초기 임계점 변위(cm)		좌굴하중 (kN)	
	본 논문	Kim(1990)	본 논문	Kim(1990)
A	37.7	38	1636.74	1590
B	15.8	16	238.84	230

그림 2. 2-자유절점 해석모델의 하중-변위 곡선(모델 A, 완전형상)

그림 3. 2-자유절점 해석모델의 하중-변위 곡선(모델 B, 완전형상)

모델 A의 평형경로에서는 그림 2와 같이 첫 번째 특이점 (singular point)이 37.7cm의 변위 값에서 나타났으며, 표 2에서 나타난 바와 같이 문헌 Kim(1990)에서 나타난 임계점 변위인 약 38cm와 비교해 볼 때 유사하고, 하중레벨은 1636.74kN으로 더 이상의 증가가 없는 극한점으로 나타난다. 여기서 Kim(1990)의 문헌은 변위의 3차항을 고려하여 해석한 결과이다. 따라서 구조물은 뒤틀좌굴 현상을 예상할 수 있으며, 이때의 하중레벨이 구조물의 좌굴하중 레벨이라 할 수 있다. 그러나 그림 3 모델 B의 결과에 대해서는 첫 번째 특이점인 15.8cm 변위 값을 넘어서도 계속해서 하중레벨은 증가하며, 문헌 Kim(1990)에서도 이와 같은 결과인 약 16cm의 변위레벨에서 임계점이 나타난다. 즉 첫 번째 임계점이 평형경로의 변곡점 변위 값인 42.4cm 이전에 발생하며, 분기거동을 예상할 수 있다. 이때의 레벨 238.84kN을

구조물의 좌굴하중레벨로 정의할 수 있으며, 변곡점 하중레벨 377.7kN의 약 63%에 해당한다. 여기서, 행렬식이 0이 되는 점들을 차례로 보면, 첫 번째 분기점, 첫 번째 극한점, 두 번째 극한점, 두 번째 분기점으로 분석된다.

구조물의 평형계적 상에 존재하는 극한점과 분기점에서 평형경로의 변환은 초기조건에 매우 민감하며, 동적 거동을 유발한다. 또한 극한점 이전의 분기점의 발생은 하중레벨의 큰 차이를 가져올 수 있으며, 이것은 좌굴내력의 급격한 상실을 의미한다. 초기 불완전에 따른 평형계적과 분기특성은 초기 조건에 따라 민감하게 반응하며, 형상의 불완전성은 분기거동을 발생하게 하는 촉매제이다.

3. 고유모드와 형상 불완전에 따른 분기거동

분기점에서 평형경로의 전환은 초기 불완전성에 민감하며, 모든 실제 구조물은 여러 가지 형태에서의 불완전성을 가지게 된다. 그 예로 절점이나 기초의 불완전성, 재료적 또는 단면의 일률적인 가정의 위배 또는 하중 및 형태의 불완전성 등이다. 특히, 탄성영역에서 전체 불안정현상이 나타나는 돔형 공간 구조물은 초기형상 불완전성에 매우 민감하며, 많은 부재들로 연결된 공간 구조물의 경우 안정과 불안정에 있어서 한 부재나 절점의 좌굴은 다른 연결된 부재들의 거동에 영향을 미쳐 전체적인 영향으로 확산된다. 일반적으로 공간 트러스 구조시스템에서 발생하는 좌굴의 경향은 단일압축부재의 좌굴로 인한 압축재 좌굴현상, 국부적으로 절점이 좌굴하는 절점좌굴현상, 구조물 전체의 거동이 일체의 형태로 좌굴하려는 전체좌굴현상이 있으며, 전체좌굴의 범주로 뒤틀좌굴과 분기좌굴이 나타난다. 그러나 네트워크 돔이나 볼트 구조 시스템과 같이 많은 부재들로 이루어진 공간 구조물의 불안정 현상은 위에서 언급한 좌굴현상들이 복합적인 영향으로 발생하며, 이러한 연성효과로 발생하는 불안정 현상을 간단히 설명하기란 쉽지 않다. 따라서 비교적 현상이 명확하고 독립적으로 나타나는 2자유절점 모델을 대상으로 고유모드 및 초기형상 불완전성에 따른 분기거동의 특성을 분석하도록 한다. 여기서 형상 불완전에 의한 분기거동은 구조물의 고유치해석을 통한 고유벡터에 따라서 좌굴형상을 고려하며, 형상 불완전 량에 따라 민감한 정도를 예측할 수 있다.

3.1 2-자유절점 모델의 불안정 거동

두 개의 자유절점 모델의 고유치해석으로 구한 고유모드는 그림 4와 같다. 그림에서 점선은 그림 1의 절점 7-2-1-3번으로 연결된 주요 부재를 나타내었으며, 위쪽 직선의 형상은

X-Y 평면을 투영한 것이고 아래쪽은 X-Z평면으로 투영된 형상만을 나타나도록 하였다. 점선과 함께 나타낸 고유모드인 실선은 그림에서 최저고유치의 순서로 나열하였으며, 두 모델 간의 고유모드는 형상들이 비슷하지만 순서가 조금 다르다. 두 모델의 고유모드에 대한 특징을 살펴보면, 비대칭 형상의 첫 번째 모드와 대칭 형상의 두 번째 모드는 두 모델에서 일치한다. 하지만 모델 A의 세 번째 모드는 모델 B의 다섯 번째 모드와 유사한 형상으로 나타나며, 첫 번째 모드와 같은 비대칭 형상을 하고 있다. 또 모델 A의 네 번째와 다섯 번째 모드는 고유치가 동일한 중복 모드이며, 모델 B의 세 번째와 네 번째 모드와 일치하는 비대칭 형상이다. 그러나 이 고유모드는 a 부재들의 면외 방향으로 불완전하다. 이상의 다섯 가지 고유모드에 대한 형상불완전성에 대한 민감성과 분기거동을 살펴본다. 초기형상의 불완전성에 대한 고유모드의 적용크기는 돐의 경우 최대 밑면 직경의 0.2%를 일반적으로 고려되며, 고유모드에 따른 형상 불완전에 대해서 여러가지 불완전형상의 조합을 적용하기도 한다(Bulenda & Knipper, 2001).

그림 4. 2-자유절점 해석모델의 고유모드

대경간 구조물의 경우 100~200m 스패인이 스타디움 설계에 많은 것을 감안한다면 0.2%는 20~40cm의 형상오차를 가지게 되는 것으로서 구조물의 경간에 비해 비교적 적은 량이며, 대경간 구조물의 경우 이보다 더 작은 량에서도 구조 안정성에 영향을 미치게 되며, 적용되는 형상불완전 모드에 따라 다양하게 반응한다. 따라서 2자유절점 모델에서는

한 단위 절점의 직경에 해당하는 2L을 기준으로 0.01%, 0.05%, 0.1%, 0.3%의 형상 불완전성을 고려하도록 하며, 이에 따른 구조물의 민감성을 살펴본다.

비대칭 형상인 일차모드의 경우 그림 5와 같이 0.01%일 때 이미 완전형상과는 임계점 이후의 거동이 다르며, 매우 민감하다. 그림에 일점쇄선으로 나타낸 행렬식의 특이점은 절점 변위의 변곡점에서 발생하고, 두 절점의 수직변위는 모델 A의 경우 극한점에서 모델 B의 경우는 분기점에서 서로 다른 방향으로 진행한다. 대칭 형상을 가지는 두 번째 모드는 불완전량이 0.3%에서도 그림 6에서 보는 바와 같이 두 모델 모두 완전형상일 때와 동일하며, 대칭 모드의 불완전성은 분기 거동에 영향을 주지 않았다. 다만 하중레벨은 완전형상에 비해 작고, 불완전 크기에 비례하여 감소함을 예상할 수 있다.

(a) 모델 A

(b) 모델 B

그림 5. 2-자유절점 해석모델의 하중-변위 곡선
(1st mode, Imperfection 0.01%)

완전형상이건 불완전형상이건 간에 모든 경우에서 나타난 유사한 두 가지 패턴은 자유절점의 움직임과 민감성에 있다. 이것을 설명하기 위해 주요 부재들의 평면에서 두 절점의 이

동을 단계별로 중첩해서 그림 7에 나타내었다. 그림의 두 가지 패턴을 설명하면, 그림 7(a)과 같이 두 절점이 대칭 이동하는 패턴이거나 그림 7(b)과 같이 수직변위가 임계점에서 비대칭 거동을 하는 패턴이다. 완전형상이거나 불완전성에 기인한 분기거동이 나타나지 않는 경우는 그림 7(a)과 같이 거동을 하며, 완전형상과 같이 평형경로상의 분기점 상황은 동일하다. 반면, 임계점이 극한점이거나 분기점이거나 간에 형상 불완전성에 기인한 분기거동은 모두 그림 7(b)의 패턴으로 나타난다. 만일 2-자유절점의 해석모델에서 단면적이 같은 부재로만 구성된 X-Z평면을 해석공간으로 한정하는 경우, 면외 방향의 거동이 무시되므로 단면적이 상이한 2개의 2-자유절점모델의 해석결과가 동일하게 되므로 4개의 2-자유절점 자유도로 나타낼 수 있다. 이와 같은 경우 구조물의 평형행렬의 비신장 메커니즘 기저(In-extensional mechanism) $U_m = \{0.2, 1.0, 0.2, -1.0\}^T$ 는 1개의 벡터를 가지게 되며(Pellegrino, 1993), 형상은 그림 8과 같이 비대칭 형상의 비신장 메커니즘이 나타나며 전술한 그림 4의 1차고유모드와 유사한 모드형상을 나타낸다. 그림 4와 그림 8의 2-자유절점 모델의 일차 모드와 기저벡터는 표 3의 각 성분의 1차모드와 비신장 메커니즘의 기저벡터의 내적 값으로 판단하면, 그림 4의 모델 B의 기저벡터 내적 값이 더 크므로 비신장 메커니즘과의 발생 가능성이 크다고 할 수 있다.

3.2 스타 돔 모델의 불안정 거동

2-자유절점 모델에서는 X-Z평면으로 표현된 경우, 하나의 메커니즘 기저가 존재하였고, 면외 방향의 강성에 따라 차이는 있지만 강성이 약해질수록 고유모드가 기저와 유사하였다. 그러나 절점이 늘어날수록 현상은 더 복잡해질 것이고, 서로의 연관된 현상이 발생할 것이므로 단순하게 설명할 수는 없다. 따라서 본 절에서는 절점이 많다 하더라도 비교적 현상이 단순하게 나타나는 스타 돔 예제를 대상으로 하중 파라메타에 따른 좌굴현상과 임계하중을 고찰하고자 한다. 그림 9와 같이 2번 절점이 중심에서 2분할한 지점에 위치하는 스타 돔 구조물을 살펴보도록 하며, 초기 입력데이터는 표 4와 같다. Rise-span 비($\mu = H/2L$)가 0.102인 스타 돔의 고유벡터는 그림 10과 같이 첫 번째 모드는 정점의 수직성분이 최대인 형상이고, 나머지 세 개의 모드는 6각형으로 형성된 이분할 면에서 세 쌍의 마주보는 절점이 비대칭 형상을 이룬다. 비록 스타 돔이 모든 형상의 이분할 된 절점을 가진 돔의 형상을 대표할 수는 없다하더라도 여기서의 고유모드는 다른 경우에도 유사하게 나타날 것이다.

그림 6. 2-자유절점 모델의 하중-변위 곡선
(2nd mode, Node 1-Dx)

그림 7. 2-자유절점 모델의 불안정 거동에 대한 2가지 패턴

그림 8. 2-절점 평면 모델의 비신장 메커니즘 기저

표 3. 2-자유절점 모델의 비신장 메커니즘 기저와 고유벡터

Node		비신장 메커니즘 기저 U_m	1st 고유모드 (모델 A) v_1	1st 고유모드 (모델 B) v_1
1	x	0.2	0.1098	0.185
	y	-	0.0	0.0
	z	1.0	1.0	1.0
2	x	0.2	0.1098	0.185
	y	-	0.0	0.0
	z	-1.0	-1.0	-1.0
$U_m \cdot v_1$		-	2.0439	2.074

그림 9. 스타돔 모델의 형상 및 파라미터

표 4. 스타 돔 모델의 초기입력 데이터

모델	μ (H/2L)	L(m)		H(m)		단면적 A(cm ²)
		L	L1	H	H1	
star Dome	0.102	5.0	2.5	1.0216	0.2	11.2

그림 10. 스타 돔 모델의 고유모드

2자유절점 예제와 마찬가지로 연직방향 하중이 각 절점에 작용동일하게 작용하는 하였을 때, 완전형상 스타 돔의 평형 경로는 그림 11과 같고, 하중-변위곡선상의 임계점은 극한점으로 나타났다. 탄성영역에서 부재좌굴을 고려하지 않았을 때의 평형경로인 그림 11은 임계점에서 1번 절점이 하중방향으로 진행하는데 반해 2번 절점은 반대방향으로 거동한다.

즉, 1번 절점에서 절점 좌굴이 발생 한다. 형상불완전성에 대한 거동은 첫 번째 모드를 제외한 나머지 세 모드는 임계점에서 다른 특성의 거동이 나타나지 않았으며, 첫 번째 모드에서도 불완전 량의 증가는 좌굴하중레벨이 감소될 뿐 2자유절점과 같은 거동이 나타나지는 않았다.(그림 12) 그러나, 구조체가 복잡해질수록 메커니즘 기저나 고유모드는 보다 더 복잡해질 것을 예상할 수 있으며, 하나의 파라메타만으로는 모든 것을 설명하기에는 부족하다.

그림 11. 스타돔 모델의 하중-변위 곡선과 행렬식 고유치의 변화

그림 12. 초기 불완전성을 고려한 스타 돔 모델의 하중-변위 곡선

4. 라이즈-스팬 비에 따른 좌굴하중 특성

본 장에서는 라이즈-스팬 비 $\mu (=H/2L)$ 에 따른 공간 트러스 모델의 좌굴하중과 하중레벨의 특성에 대해서 다루도록 한다. 대상 모델은 앞 장에서 다룬 스타 돔 모델과 하나의 링을 더 추가한 3링 스타 돔 공간 트러스 구조물이다.

4.1 스타 돔 모델의 좌굴하중 특성

라이즈-스팬 비 $\mu = H/2L$ 와 더불어 스타 돔 모델에 대해서 하중 파라메타 즉, 정점에 해당되는 1번 절점과 2-7번 절점인 링 절점간의 하중 비($R_L = P_r/P_c$)로 정의된 하중 파라메타를 이용하여 분기 특성을 분석한다. 여기서, 라이즈 스펠 비 μ 는 값이 작을수록 얇은 구조물이 된다. 또한, P_c 와 P_r 는 각각 가운데 절점과 링 절점의 수직하중이며, R_L 이 1을 초과하는 경우는 링 절점 하중이 큰 경우이고, 미만의 경우는 가운데 절점하중이 큰 경우이다.

그림 13은 $\mu = 0.15$ 일 때의 하중-변위곡선이며, 그림 13 (a)와 (b)는 각각 가운데 절점인 1번과 링 절점인 2번에 해당하는 수직변위이다. 여기서 곡선상의 다각형 점들은 임계점을 나타내고, 분기점은 극한점 이전에 나타나는 점들이다. 이 모델은 하중 파라메타 $R_L \leq 1.0$ 에서는 모두 분기점이 발생하지 않았고, 가운데 절점과 링 절점은 극한점 이후 진행방향이 반대가 되었다. 그러나 $R_L \geq 1.1$ 의 경우는 두 절점 모두 극한점 이전에 분기점이 존재하며, 극한점 이후의 두 절점의 진행방향은 동일하다. 이것은 구조물의 불안정 현상이 전체좌굴의 발생을 의미하며, 분기점에서의 거동은 절점좌굴로 이어질 것이다. 또한, 분기점이 발생하지 않은 모델에서와는 달리 링 절점에서의 절점 좌굴 현상이 나타날 것으로 예상된다.

(a) Node 1-Dz

(b) Node 2-Dz

그림 13. 스타 돔 모델의 하중-변위 곡선 ($\mu = 0.15$)

분기점이 발생하는 R_L 의 경계점은 그림 14에서 보는 것과 같이 나타나고, 그림 15에서 보는 바와 같이 $\mu = 0.4$ 에서는 $R_L = 1.7$ 에서만 분기점이 나타났다. 또한 $\mu = 0.45$ 를 넘는 모델에서는 나타나지 않았다. 즉, 분기점은 μ 가 클수록, 그리고 R_L 이 낮을수록 발생이 억제될 것이다. 이것은 형상이 높을수록 전체좌굴보다는 국부좌굴이 발생할 위험성이 높아질 것이며, 가운데 절점 좌굴에 의해서 전체적인 불안정 현상으로 진행될 것이다. 또한, 링 절점의 하중이 가운데 하중보다 상대적으로 작으면 작을수록 절점좌굴이 발생할 것이고, 분기점을 포함하고 있는 전체좌굴이 발생하는 R_L 에서는 초기 형상불완전성에 따라 분기거동이 나타날 것으로 예상된다. 분기좌굴의 발생 영역에 대해서 좌굴하중은 극한점의 하중레벨과 비교해서 약 50-70%의 값으로 나타났다.(그림 15)

그림 14. 스타 돔의 극한점에 대한 분기점 하중레벨 비($\mu=0.25$)

그림 15. 스타돔 모델의 극한하중에 대한 분기하중 레벨 비율

그림 16. 3링 돔 모델의 형상 및 파라미터

4.2 3링 스타돔 모델의 좌굴하중 특성

3링 스타돔 모델의 형상 및 파라미터는 그림 16과 같고, 물성치 및 조건은 스타 돔 모델과 동일하다. 여기서 다루게 될 하중 파라미터는 정점의 하중 및 첫 번째 링의 하중 두 번째 링의 하중을 각각 1:1:2의 비율을 채택하여 각 라이즈-스팬 비에 따라 좌굴하중의 특성을 살펴보도록 한다. 여기서 채택한 하중비율은 절점에 할당되는 구면의 표면적 비에 비교적 유사한 값으로 정의된 것이다.

그림 17. 3링 돔 모델의 하중변위 곡선 (Node 1-Dz)

그림 18. 3링 돔 모델의 하중변위 곡선 (Node 2-Dz)

그림 19. 3링 돔 모델의 하중변위 곡선 (Node 8-Dz)

그림 20. 3링 돔 모델의 행렬식 곡선

3링 스타 돔 모델에서도 극한점 이전에 분기점이 발생하였으며, 분기점에 대한 하중레벨은 그림 20에서 보는 바와 같이 극한점의 하중레벨과 비교해서 약 80-90%의 범위로 나타났다. 또한 라이즈-스팬 비 μ 의 증가에 따라 극한점과 분기점의 하중레벨도 또한 증가하였다. 이와 같은 결과는 스타 돔 예제와 유사한 결과이며, 두 모델 모두 하중 모드에 따른 영향도 클 것으로 생각된다.

그림 21. 3링 돔 모델의 좌굴하중 레벨 및 분기하중 비율

5. 결 론

형상 불완전성에 민감한 공간 트러스의 비선형 거동은 주로 임계점에서 분기경로로 거동을 한다. 이것은 국부절점과 전체 좌굴 사이를 관찰함으로써 설명되어질 수 있지만, 좌굴특징을 분리해서 설명하기는 쉽지 않고, 특히 부재가 많은 공간 구조물의 경우는 결정적인 영향을 정의하기가 힘들다. 따라서 본 연구는 초기 형상 불완전을 고려한 공간 트러스의 임계점과 분기거동 및 좌굴하중 특성을 비교적 잘 규명하기 위한 해석적 연구를 수행하였다. 평형경로 상의 분기점 및 고유모드에 따른 분기거동에 대해서 접선강성행렬의 행렬식과 고유치해석을 수행하였으며, 임계점과 외력에 대한 좌굴하중 레벨을 구하였다. 고유모드에 따른 경로의 분기와, 절점좌굴 및 전체 좌굴과의 비교적 명확한 현상의 고찰을 위해 2개의 자유절점 모델을 이용하였으며, 고유모드와 비선형 매커니즘 기저와 비교하였고, 스타 돔(2링) 모델 및 3링 돔 모델과 같이 링의 수를 늘려서 정점에서의 절점과 전체 구조물 사이에서의 분기점 발생 여부를 관찰하였다. 임계점에서 동적 뒤틀좌굴이 발생하는 2-자유절점 모델의 형상불완전성에 따른 민감함은 고유모드에 따라 분기거동을 하였으며, 좌굴하중은 불완전량의 증가에 따라 감소하는 결과를 얻었다. 해석모델에서 나타난 두 가지 좌굴패턴은 자유절점의 움직임과 민감성에 따라 결정되었고, 분기점이 있거나 없거나 간에 비선형 불안정 거동은 비대칭 고유모드가 가장 큰 영향을 주었으며, 이때의 고유모드는 단순화된 모델의 비선형 매커니즘 기저와 유사하였다. 특히, 극한점 이전에 절점좌굴로 인한 분기거동을 살펴보기 위한 스타 돔 모델의 해석결과에서는 형상 높이가 높을수록 전체좌굴보다는 정점의 국부좌굴이 우세하고, 하중 파라메타 값이 클수록 평형경로 상에서 분기점을 수반하는 전체좌굴이

발생하였다. 또한, 좌굴하중은 스타 돔의 경우 극한점 하중레벨의 약 50-70%에 달하였고, 3링 모델의 경우는 구조물의 좌굴하중레벨이 평형경로의 극한값에 대해 약 80-90%의 범위에 해당된다. 마지막으로 본 논문의 좌굴거동해석은 기존문헌과 비교하여 만족할 만한 결과를 얻었으며, 공간 트러스의 분기거동 및 좌굴하중을 얻을 수 있으므로 실제 구조물에 적용하여 안정된 구조설계를 할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임.(2010-0023674)

참 고 문 헌

- 권택진, 김승덕, 김종민(1997) 기하학적 비선형을 고려한 편집합 단층래티스돔의 불안정 거동에 관한연구, *한국전산구조공학회 학술발표회논문집*, 한국전산구조공학회, 제10권, 1집, pp.240-247.
- 김승덕(2002) 반강접합 프레임형 대공간 구조물의 비선형 불안정 해석에 관한연구, *대한건축학회논문집 구조계*, 대한건축학회, 제18권, 제3호, pp.55-62.
- 김진기, 한상을(1998) 모드중첩법에 의한 단층래티스돔의 기하학적 비선형 좌굴거동에 관한연구, *대한건축학회 논문집 구조계*, 대한건축학회, 제14권, 제4호, pp.317-325.
- 손수덕, 김승덕, 이승재, 김종식(2011) 돔형 스페이스 프레임 구조물의 하중모드에 따른 분기점 특성에 관한 연구, *한국공간구조학회 논문집*, 한국공간구조학회, 제11권, 제1호, pp.121-130.
- 손수덕, 김승덕, 황경주, 강문명(2003) 절점 강성을 고려한 공간 구조물의 비선형 불안정 거동에 관한 연구, *한국셀공간구조학회 논문집*, 한국셀공간구조학회, 제3권, 제1호, pp.87-97.
- 윤한흠, 한상을(2000) 래티스돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘에 관한연구, *대한건축학회논문집 구조계*, 대한건축학회, 제16권, 제9호, pp.3-9.
- 이경수, 한상을(2009) 공간구조물의 탄성 분기좌굴해석을 위한 수치해석 이론 개발, *한국강구조학회논문집*, 한국강구조학회, 제21권, 제6호, pp.563-574.
- 정환목(1997) 단층 래티스돔의 좌굴특성에 관한 설비하중의 영향, *한국강구조학회논문집*, 한국강구조학회, 제9권, 제3호, pp.323- 332.
- 정환목(1998) 편집합 단층래티스돔의 좌굴특성에 관한 형상조기부정의 영향, *한국강구조학회논문집*, 한국강구조학회, 제10권, 제4호, pp.769-777.
- 정환목, 권영환, 최영식(1993) 삼각형 네트워크 단층 강접 래티스 돔의 좌굴특성에 관한 연구, *대한건축학회논문집*, 대한건축학회, 제9권, 제12호, pp.185-194.
- Abedi, K. and Parke, G.A.R. (1991) Progressive collapse of single-layer braced domes, *International Journal of Space Structures*, Vol. 11, No. 3, pp.291-306.
- Bergan, P.G. (1980) Solution algorithms for nonlinear structural problems, *Computers and Structures*, Vol. 12, pp.497-509.
- Bulenda, Th. and Knippers, J. (2001) Stability of grid shells, *Computers and Structures*, Vol. 79, pp.1161-1174.
- Chan, S.L. and Zhou, Z.H. (1995) Second-order elastic analysis of frames using single imperfect element per member, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 121, No. 6, pp.939-945.
- Choong, K.K. and Kim, J.Y. (2001) A numerical strategy for computing the stability boundaries for multi-loading systems by using generalized inverse and continuation method. *Engineering structures*, Vol. 23, pp.715-724.
- Choong, K.K. and Hanghai, Y. (1993) Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures, *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial structures*, Vol. 34, No. 112, pp.133-149.
- Coan, C.H. and Plaut, R.H. (1983) Dynamic stability of a lattice dome, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp.269-274.
- Crisfield, M.A. (1981) A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", *Computer and Structures*, Vol. 13, pp.55-62.
- Deng, H. and Kwan, A.S.K. (2005) Unified classification of stability of pin-jointed bar assemblies, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp.4393-4413.
- El-Sheikh, A. (1998) Design of space truss structures, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 6, No. 2, pp.185-200.
- Hill, C.D., Blandford, G.E. and Wang, S.T. (1989) Post-buckling analysis of steel space trusses, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No. 4, pp.900-919.
- Huseyin, K. (1973) The multi-parameter perturbation technique for the analysis of nonlinear system. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 8, No. 5, pp.431-443.

- Kato, S., Mutoh, I., and Shomura, M. (1994) Effect on joint rigidity on buckling strength of single layer lattice dome, *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial structures*, Vol. 35, No. 115, pp.101-109.
- Kim, S.D. (1990) *Dynamic stability of shallow structures*, Ph.D. dissertation, Tokyo University, Tokyo.
- Kim, S.D., Kang, M.M., Kwun, T.J., and Hangai, Y. (1997) Dynamic instability of shell-like shallow trusses considering damping, *Computers and Structures*, Vol. 64, No. 1-4, pp.481-489.
- Papadrakakis, M. (1981) Post-buckling analysis of spatial structures by vector interaction methods, *Computers and Structures*, Vol. 14, pp.393-402.
- Pellegrino, S. (1993) Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix, *Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 21, pp.3025-3035.
- (접수일자 : 2011. 8. 25 / 심사일 2011. 9. 1 /
심사완료일 2012. 6. 14)