찢김에너지를 이용한 자동차용 방진 부품의 내구수명 예측

문 형 일¹⁾ · 김 호²⁾ · 우 창 수³⁾ · 김 현 영^{*4)}

현대모비스 공학해석팀¹⁾ · 송도테크노파크 융복합산업지원센터²⁾ · 한국기계연구원 나노융합생산시스템연구본부³⁾ · 강원대학교 기계의용공학과⁴⁾

Fatigue Life Prediction for Automotive Vibroisolating Rubber Component Using Tearing Energy

Hyung-il Moon¹⁾ · Ho Kim²⁾ · Chang Soo Woo³⁾ · Heon Young Kim^{*4)}

¹⁾CAE Team, Hyundai Mobis Co. Ltd., 80-10 Mabuk-dong, Giheung-gu, Yongin-si, Gyeonggi 446-912, Korea

²⁾Convergence Industry Support Center, Korea Institute of Industrial Technology, Michuholl Tower, 12 Gaetbeol-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-130, Korea

³⁾Department of Nano Mechanics, Korea Institute of Machinery & Materials, 156 Gajeongbuk-ro, Yuseong-gu, Daejeon 305-343, Korea

⁴⁾Department of Mechanical and Biomedical Engineering, Kangwon National University, Gangwon 200-701, Korea

(Received 19 January 2012 / Revised 9 April 2012 / Accepted 23 April 2012)

Abstract : Recently, the demand to acquire and improve durability performance has steadily risen in rubber components design. In design process of a rubber component, an analytical prediction is the most effective way to improve fatigue life. Existing methods of analytical estimation have mainly used an equation for fatigue life obtained from fatigue test data. However, such formula is rarely used due to costs and time required for fatigue testing, as well as randomness of rubber materials. In this paper, we describe fatigue life estimation of rubber component using only the results from a relatively simple tearing test. We estimated fatigue life of the Janggu type fatigue specimen and the automotive motor mount, and evaluated reliability of the proposed method by comparing the estimated values with actual test results.

Key words : Fatigue life(내구 수명), Tearing energy(찢김에너지), Crack propagation(균열 전파), Rough tearing region(거친 찢김 영역), Janggu type fatigue specimen(장구형 피로시편), Automotive motor mount(자동차용 모터 마운트), Finite element analysis(유한요소 해석)

1. 서론

고무 재료는 탄성 복원력, 진동 감쇠 특성, 에너지 흡수성 등이 우수하여 방진용 기계요소 제작에 널리 사용되고 있다.^{1,2)} 방진용 고무 부품의 내구 수명은 주로 실험적인 방법을 통해 예측된다. 한정된 개발 비용 및 시간 등의 이유로 대부분의 고무 부품의 내구시험은 주로 설계의 초기 단계가 아닌 마지막

단계에 이르러 수행되기 때문에, 설계 변수들의 연계를 통한 최적 설계의 개념이 아닌 시작품의 평가적인 성격을 강하게 나타내고 있다. 이 같은 문제를 해결하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 고무 부품의 수명을 예측하고자 하는 연구들이 꾸준히 제시되고 있다.

해석을 통한 내구 수명 예측과 관련된 연구는 1950년대 이후부터 시작되었다. 주로 금속 부품의 내구 수명 예측 방식에 기반을 둔 연구들이 다양하

*Corresponding author, E-mail: khy@kangwon.ac.kr

게 제시되었다. 가장 대표적인 예측 방식은 다음과 같다. 먼저 단순한 형태를 가진 시편의 피로 시험을 실시한 후, 시험 결과들을 분석하여 특정 변수(변형률, 에너지 등)와 수명과의 관계식을 정의한다. 그 후, 예측 대상 부품의 유한요소 해석을 통해 입력된 하중이나 변위에 따라 발생하는 특정 변수의 값을 예측한다. 마지막으로, 예측된 값을 피로시험으로부터 얻어진 수명식에 대입하여 고무 부품의 수명을 계산하는 방법이다.³⁻⁶⁾ 이러한 방법은 비교적 손쉽게 수명을 예측할 수 있다는 장점이 있지만, 신뢰성 있는 내구 수명식을 정의하기 위해서는 다양한 시험조건(평균변위, 변위진폭)에서 수행된 피로 시험 결과들이 확보되어야 한다는 단점을 가진다. 특히, 고무 재료의 경우 제법의 비규격화 및 환경적 요인에 따른 다양한 특성 변화 등으로 인해 피로 시험 데이터의 재활용이 매우 어려운 실정이다.

이러한 문제를 해결하기 위해 2002년 김호 등은 피로시험보다 간단하게 수행될 수 있는 찢김(tearing) 시험을 이용하여 내구 수명식을 정의하는 방법을 제안하였다.⁷⁾ 본 논문은 김호 등이 제안한 방법을 사용하여 자동차용 마운트의 내구 수명을 예측한 내용을 기술하고 있으며, 실 제품의 피로 시험 결과와 비교하여 신뢰성을 평가하였다.

2. 찢김에너지를 이용한 내구 수명식

2.1 찢김에너지와 균열 성장 속도

찢김에너지(T)는 고무 재료의 피로 파괴 현상을 설명하기 위해 1952년 Rivlin 등에 의해 정의되었다. 이들은 Griffith가 제안한 에너지 해방률 이론을 고무 재료에 적용하여, 결함의 생성 및 성장으로 인한 에너지 변화를 식 (1)과 같이 정의하였다.

$$T = - \left| \frac{\partial W}{\partial A} \right|_l \quad (1)$$

식 (1)에서 W 는 변형률 에너지, A 는 크랙 표면, 아래 첨자(suffix) l 은 하중이 가해질 때 발생하는 일정한 변위에 대한 미분을 의미한다. 찢김에너지는 대변형에서도 유효하며, 결함의 성장으로 인한 비가역적인(irreversible) 에너지의 변화는 오직 균열 선단(tip)에서만 발생된다고 가정되었다. 따라서 찢

Fig. 1 Three types specimen for the tearing test. (a) Single edge type, (b) Trouser type, (c) Pure shear type

김에너지는 시편의 형상, 하중의 방향 및 크기에 대하여 독립적(independent)이다.⁸⁻¹⁰⁾

찢김에너지는 화학적 상수들을 통해 계산할 수도 있고, 시험적인 방법으로도 계산할 수 있다. 화학적인 계산 방법은 고무 재료를 이상적(ideal)으로 가정하기 때문에 실제 현상과 많은 오차를 가질 수 있다고 알려져 있다.¹¹⁾

찢김에너지와 균열 성장 속도의 관계는 주로 Fig. 1과 같은 형상의 시편들을 이용한 시험 결과들로부터 다양한 연구자들에 의해 발표되었다. 이 중 Thomas가 제안한 방법은 정적상태에서 천연 고무의 찢김 시험을 수행한 후 그 결과로부터 균열의 성장(Δc)과 찢김에너지와의 관계를 정적 찢김 상수(static tearing constant; G_s)로 표현한 것이며, 아래와 같이 정의된다.

$$T^2 = G_s \Delta c \quad (2)$$

또한 동적 상태의 경우, 일정 시간 이후 크랙의 성장 속도가 거의 선형적으로 증가하는 현상을 발견하였다(Fig. 2). 이 같은 현상이 나타나는 구간을 거친 찢김(rough tearing) 영역이라 정의하였고, 이 영역에서의 수명이 전체 수명의 대부분을 차지한다는 연구 결과를 발표하였다. 이때, 변위(하중)의 반복 횟수(N)와 균열(c)의 성장 속도는 식 (3)과 같이 동적 찢김 상수(dynamic tearing constant; G_d)를 사용하여 간단하게 정의하였다.^{7,9)}

Fig. 2 Dynamic cut growth curve obtained from Thomas' data

$$T^2 = G_d \frac{dc}{dN} \quad (3)$$

마지막으로 Thomas는 자신이 수행한 시험 결과로부터 천연 고무 재료의 G_d 와 G_s 가 식 (4)와 같이 대략적으로 10배의 관계가 있다는 것을 발표하였다.^{7,9)}

$$G_d \approx 10 \times G_s \quad (4)$$

2.2 내구 수명 예측식

찢김에너지를 사용한 내구 수명식을 정의하기 위해 다음과 같은 가정들을 사용하였다.

- ① 거친 찢김 영역의 수명이 전체 수명의 대부분을 차지한다. 이때, 접착부에서의 찢김은 배제한다.
- ② 임계 크기 이상의 내재 균열들이 고무 부품에 지배적으로 분포되어 있다.
- ③ 균열의 성장은 하중량에 비례하며, 크랙의 형상과 진행방향에 독립적이다.

가정 ②를 바탕으로, 임계 크기의 균열이 요소의 적분점(j)에 가상으로 존재한다고 가정하면, T 는 최대 체적 당 변형률 에너지 밀도 ($w_{\max,j}$)를 사용하여 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.^{7,12)}

$$T = c \sum_j w_{\max,j} \quad (5)$$

식 (5)를 (3)식에 대입한 후, 수명 항과 균열길이 의 항으로 구분하면 식 (6)과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{N_i}^{N_f} dN = \int_{c_i}^{c_f} \frac{G_d}{T^2} dc \quad (6)$$

위 식에서 N , c 에 사용된 첨자 i , f 는 각각 초기와 파단 시점을 의미한다. 이상적인 찢김을 가정한다면 식 (6)을 적분하여 식 (7)과 같이 표현할 수 있다.

$$N_f = \int_{c_i}^{c_f} \frac{G_d}{c^2 (\sum_j w_{\max,j})^2} dc \quad (7)$$

만약 이상적인 찢김에너지의 변화를 가정한다면, 식 (7)은 식 (8)과 같이 전개 될 수 있다.

$$N_f = \frac{G_d}{(\sum_j w_{j,\max})^2} \left[\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_f} \right] \quad (8)$$

c_f 가 c_i 에 비하여 매우 크다고 가정한다면 내구수명(N_f) 계산 시 c_f 를 무시할 수 있다. 또한, 거친 찢김 영역에서의 균열 전파만을 고려한다면, c_i 를 임계 찢김 길이(c_c)로 변환시켜 식 (9)와 같은 수명예측 식을 정의할 수 있다.⁹⁾

$$N_f = \frac{G_d}{c_c (\sum_j w_{\max,j})^2} \quad (9)$$

3. 찢김 시험 및 내구 수명 예측

장구형 피로 시편과 자동차용 모터 마운트의 내구 수명을 Fig. 3과 같은 과정을 통해 예측해 보았다. 일반적인 정적 변형 해석을 수행하여 찢김에너지를 계산하고, 찢김 시험을 통해 얻어진 찢김 상수를 사용한 내구 수명식을 이용하였다.

Fig. 3 The analytical process for fatigue life prediction of a vibroisolating rubber component

3.1 정적 찢김 시험

정적 찢김 시험은 Single edge 시편으로 가공하여 상온 상태에서 수행하였다. 두께(t)는 2.3~2.5mm인

평판(sheet)에서 날카로운 칼날을 이용하여 폭 20mm, 길이 80mm의 형상으로 제작하였고, 초기 결함(c_0)의 길이는 2, 3, 4mm로 하였다.

찢김 시험은 UTM(INSTRON 5882)을 사용하여, 20mm/min의 인장 속도로 실시하였다. 이때 시편의 양쪽 끝단부로부터 20mm 길이에 해당되는 영역이 지그에 장착(clamping)되었다. 시험 중 발생하는 크랙 길이의 변화는 현미경(OLYMPUS STM-MJ52)을 사용하여 관찰하였다.

Single edge 시편의 찢김에너지는 식 (10)과 같이 계산될 수 있다.

$$T = 2k W a \quad (10)$$

위 식에서 a 는 증가된 결함의 길이, k 는 변형률(ϵ)과 관계된 변수이다. k 는 여러 연구자들에 의해 다양한 식으로 제안되었으나, 본 연구에서는 Green-smith 등의 연구 결과를 사용하였다. 이들이 제안한 k 의 계산 방법은 식 (11)과 같다.^{3,13)}

$$k = \frac{2.95 - 0.08\epsilon}{(1 + \epsilon)^{0.5}} \quad (11)$$

Table 1은 다양한 경도를 가진 자동차용 방진 고무 재료의 찢김 시험 결과이며, 이로부터 계산된 최대 찢김에너지를 나타낸 표이다. 크랙 선단의 상태, 재료의 불균일성, 시험 및 측정 오차 등을 감안할 때, 찢김에너지는 c_0 에 독립적인 성격을 가진다는 것을 확인할 수 있었다.

Table 1 Calculation results of the static tearing energy using the single edge specimen(tearing energy's unit : N/mm)

	c_0	NR40	NR43	NR45	NR50	NR54
Test 1	2	19.44	29.89	86.96	63.10	77.73
Test 2	2	17.65	27.15	58.45	54.94	89.11
Test 3	2	23.86	22.92	92.83	67.56	74.01
Test 4	3	37.68	24.90	56.15	66.56	77.29
Test 5	3	16.33	26.88	57.29	54.93	84.28
Test 6	3	20.34	28.16	39.64	77.83	104.14
Test 7	4	11.84	20.56	46.35	25.52	62.46
Test 8	4	15.25	27.79	29.68	58.28	63.24
Test 9	4	15.50	28.85	54.84	47.93	59.25
Mean		19.76	26.35	56.93	57.64	76.25

3.2 내재 균열의 크기

고무 부품은 제조 과정에서 임계(critical) 크기 이상의 균열이 광범위하게 발생된다고 알려져 있다. 고무 재료에 내재된 임계 균열은 보통 끝이 둥근 형상으로 가정할 수 있으며, 그 크기는 약 0.01mm 이상이라고 추측되고 있다.^{9,14,15)}

Fig. 4 Observed cracks at the hexahedron specimen of the automotive motor mount

본 연구에서는 0.01mm를 임계 균열의 최소 크기라 가정하여 다음과 같은 방법을 통해 임계 균열의 지배적 분포에 타당성을 검토해 보았다. 자동차용 모터 마운트의 브릿지 부분에서, 각 변의 길이가 5mm인 육면체의 시편을 100개 가공하였다. 이를 사용하여 고정된 배율에서 무작위로 하나의 면(지점)을 관찰하여 0.01mm이상의 결함들을 Fig. 4와 같이 관찰해 보았다. 그 결과, 약 0.25mm×0.18mm의 면적에서 총 37개의 결함을 발견할 수 있었다. 이와 같은 결과로 볼 때, 해석 모델의 유한요소에서 적분점들은 가상의 임계 크기의 균열이 존재하고 있다고 가정하는 것은 타당하다고 볼 수 있다.

3.3 장구형 피로 시편을 사용한 검증

경도 50의 방진고무 재료를 사용하여 Fig. 5와 같이 가공된 장구형 시편의 피로 시험 결과를 해석적으로 예측해 보았다. 장구형 시편의 피로 시험은 변위 제어 방식으로 진행되었으며, 초기 하중 대비 80%의 하중 변화 발생시점에서 수명이 측정되었다. 시험은 5개의 평균변위(d_m)와 4개의 변위 진폭(d_a)을 사용하여, Table 2와 같이 총 20개 조건($d_m = 0 \sim 10\text{mm}$, $d_a = 6 \sim 11\text{mm}$)에서 2회 이상 실시하였다.¹⁶⁾

Fig. 5 Shape of the Janggu type specimen (left: side view, right: top view)

Fig. 6 Distribution of strain energy density (left: maximum compression condition, right: maximum tension condition)

장구형 시편의 유한요소 모델은 Fig. 6과 같이 대칭성을 고려하여 1/4 모델로 구성하였다. 각 변의 길이가 약 0.5mm인 육면체(hexagon) 요소를 사용하여 모델링 하였고, 시험 조건과 동일한 경계조건을 사용하였다. 재료데이터는 단축인장 및 평면변형 시험 결과를 사용하였으며, 변형률 에너지 포텐셜 모델은 Polynomial 2차 모델을 사용하였다.¹⁷⁻¹⁹⁾ Fig. 6은 최대 압축 및 인장 상태에서 장구형 시편의 정적 해석 결과로부터 얻어진 w_j 의 분포를 나타낸 것이다. 이와 같이 각각의 조건에서 $w_{\max,j}$ 을 구하였다.

G_d 는 식 (4)를 사용하여 G_s 의 평균값으로부터 계산하였다. 또한, c_c 는 앞서 언급한 바와 같이 0.01mm를 사용하여 각각의 조건에서의 수명을 Fig. 7과 같이 계산하였다. 계산된 결과와 시험 결과가 유사한 형태로 변화됨을 확인 할 수 있었다. 식 (12), (13)은 가장 유사하게 예측된 Case 4(시험 결과: 약 73.1만 회)와 가장 큰 차이를 나타낸 case 19(시험 결과: 약 2만회)에 대한 내구수명 계산을 나타낸 식이다.

Fig. 7 Comparison of fatigue test results and prediction results

Table 2 Values of the prediction error rate according to changing of the test conditions

Case	$E_{pred.}$	Case	$E_{pred.}$
1	10.0%	11	2.7%
2	2.4%	12	2.0%
3	8.8%	13	5.0%
4	1.0%	14	23.2%
5	21.7%	15	8.7%
6	17.6%	16	21.4%
7	2.0%	17	6.8%
8	10.1%	18	5.8%
9	17.3%	19	25.2%
10	23.1%	20	15.5%

$$N_{f,case 4} = \frac{35,559}{0.01(4 \times 0.1752)^2} = 7,240,421 \quad (12)$$

$$N_{f,case 19} = \frac{35,559}{0.01(4 \times 1.171)^2} = 162,076 \quad (13)$$

좀 더 객관적인 평가를 위해 피로 시험의 평균값과 예측 결과 값의 차이를 시험 평균값으로 나눈 값을 예측 오차율($E_{pred.}$)로 정의하였다. Table 2는 각 시험 조건별 $E_{pred.}$ 을 정리한 표이다. 총 20개 조건에 대한 $E_{pred.}$ 의 최대값은 -25.2%였다. 하지만, 피로 시험 결과의 산포율이 -8.7% ~ 15.7%이며, 2-3개의 시험 결과만으로 비교된 점을 감안한다면, 식 (9)를 이용한 내구수명 예측 방법이 매우 근사적인 값을 얻을 수 있고, 유용하게 사용될 수 있다고 판단하였다.

3.4 모터부 마운트의 내구수명 예측

자동차용 모터부 마운트의 피로 시험은 +Z 방향으로 230Kgf, -Z방향으로 100kgf의 하중이 3.3Hz로 반복되는 조건에서 수행되었다. 초기 측정 하중에서 약 20% 하중이 저하된 시점에서의 수명을 기록하였다. 총 3 번의 시험 결과, 각각 78만회, 98만회, 102만회의 내구수명이 측정되었다.

Fig. 8과 같이 모델링된 마운트의 정적 변형 해석을 수행하였다. 해석 모델은 주로 육면체 요소를 사용하여 모델링 하였고, 요소의 각 변 길이가 약 1mm가 되도록 하였다. 해석 조건은 시험 조건과 동일한 조건으로 설정하였고, 스웨이징(swaging) 해석, 각각의 하중에 의한 변형 해석 순으로 진행하였다. 해석 결과는 Fig. 9와 같다. -Z 방향의 하중일 때 총 4곳에서 $w_{max,j}$ 가 나타남을 확인하였다. 또한, G_s 로부터 계산된 NR 43의 G_d 값을 사용하여 예측된 마운트의 내구수명은 약 90만회로 나타났다.

$$N_f = \frac{40,737}{0.01(4 \times 0.531)^2} = 902,984 \quad (14)$$

Fig. 8 Finite element model of the automotive motor mount (Left: Iso. view, Right: Top view)

Fig. 9 Strain energy density distribution of the automotive motor mount (Left: at the +Z load, Right: at the -Z load)

시험결과로부터 모터부 마운트의 내구수명을 약 100만회라 가정했을 때 약 90% 정도 근사적인 결과를 예측할 수 있었다.

4. 결 론

본 논문은 찢김 시험 데이터만을 사용하여 자동차용 방진 고무 부품의 내구수명을 예측하고 신뢰성을 평가한 내용을 기술하였다. 찢김에너지와 균열의 성장 속도와의 관계를 통해 내구 수명 예측식을 정의하고, 가상 균열을 포함한다고 가정한 유한 요소의 정식화를 통해 정적 변형 해석 결과로부터 찢김에너지를 계산할 수 있었다. 제시된 예측 방법의 신뢰성을 검증하기 위해 장구형 피로 시험 및 자동차용 모터 마운트의 피로시험 결과와 비교하였을 때 근사적인 수명을 예측할 수 있음을 확인하였다. 제시된 방법은 비교적 간단하게 얻을 수 있는 피로 시험 결과만을 사용하기 때문에 천연 고무 재료를 사용한 방진 부품 설계 프로세스에 보다 손쉽게 적용할 수 있을 것이라 기대된다.

후 기

본 연구는 교육과학기술부의 일반연구자 지원 사업(2010-0024134)과 지식경제부의 산업원천 기술개발 사업(C1007042-01-02))의 연구 성과임을 알립니다.

References

- 1) H. Y. Kim, C. Choi, W. J. Bang and J. S. Kim, "Large Deformation Finite Element Analysis for Automotive Rubber Components," Transactions of KSAE, Vol.15, No.1, pp.107-119, 1993.
- 2) L. R. Wang, Z. H. Lu and I. Hagiwara, "Finite Element Simulation of the Static Characteristics of a Vehicle Rubber Mount," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, Vol.216, No.12, pp.965-973, 2002.
- 3) W. V. Mars and A. Fatemi, "A Literature Survey on Fatigue Analysis Approaches for Rubber," Int. J. Fatigue, Vol.24, No.9, pp.949-

- 961, 2002.
- 4) H. L. Oh, "A Fatigue-life Model of a Rubber Bushing," Rubber Chemistry and Technology, Vol.53, pp.1226-1238, 1980.
- 5) W. D. Kim, H. J. Lee, J. Y. Kim and S.-K. Koh, Fatigue Life Estimation of an Engine Rubber Mount, Int. J. Fatigue, Vol.26, No.5, pp.553-560, 2004.
- 6) Q. Lia, J. Zhao and B. Zhao, "Fatigue Life Prediction of a Rubber Mount Based on Test of Material Properties and Finite Element Analysis," Engineering Failure Analysis, Vol.16, No.7, pp.2304-2310, 2009.
- 7) H. Kim and H. Y. Kim "Numerical Life Prediction Method for Fatigue Failure of Rubber-like Material Under Repeated Loading Condition," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol.20, No.4, pp.437-582, 2006.
- 8) A. G. James, A. Green and G. M. Simpson, "Strain Energy Functions of Rubber I," Journal of Applied Polymer Science, Vol.19, pp.2033-2058, 1975.
- 9) A. G. Thomas, "Rupture of Rubber. V. Cut Growth in Natural Rubber Vulcanizates," Journal of Polymer Science, Vol.31, pp.467-480, 1958.
- 10) A. Kadir and A. G., Thomas, "Tear Behavior of Rubbers over a Wide Range of Rates," Rubber Chemistry and Technology, Vol.54, pp.15-23, 1981.
- 11) Y. Fukahori, "Fatigue Failure of Elastomers," Nippon Gomu Kyokaishi, No.11, pp.654-661, 1998.
- 12) H. Kim and H. Y. Kim, "Formulation of Tearing Energy for Fatigue Life Evaluation of Rubber Material," Transactions of KSME, Vol.29, No.8, pp.1043-1160, 2005.
- 13) P. B. Lindley, "Relation between Hysteresis and the Dynamic Crack Growth Resistance of Natural Rubber," Int. J. Fracture, Vol.9, No.4, pp.449-460, 1973.
- 14) W. V. Mars, and A. Fatemi, "Nucleation and Growth of Small Fatigue Cracks in Filled Natural Rubber under Multiaxial Loading," Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol.26, Issue 9, pp.779-789, 2003.
- 15) A. N. Gent and P. B. Lindley, "Internal Rupture of Bonded Rubber Cylinders in Tension," Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol.249, No.1257, pp.195-205, 1959.
- 16) C. S. Woo, W. D. Kim and J. D. Kwon, "A Study on the Material Properties and Fatigue Life Prediction of Natural Rubber Component," Materials Science and Engineering: A, Vols.483-484, pp.376-381, 2008.
- 17) ABAQUS Theory Manual, Hyperelasticity, 2009.
- 18) R. S. Rivlin, "Large Elastic Deformations of Isotropic IV, Further Developments of the General Theory," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol.241, A, pp.379-397, 1948.
- 19) K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc., New Jersey, pp.485-641, 1996.