시분할구간 호모토피 섭동법을 이용한 공간 트러스의 비선형 동적 해석

Nonlinear Dynamic Analysis of Space Truss by Using Multistage Homotopy Perturbation Method

손 수 덕*. 하 준 홍**. 이 승 재†

Su Deok Shon, Jun Hong Ha and Seung Jae Lee

(2012년 6월 29일 접수 ; 2012년 8월 16일 심사완료)

Key Words : Homotopy Perturbation Method(호모토피 섭동법), Multistage Homotopy Perturbation Method(시분할구간 호모토피 섭동법), Analytical Method(해석적 해법), Space Truss(공간 트러스), Nonlinear Dynamic Analysis(비선형 동적 해석), Geometric Non-linearity(기하학적 비선형성)

ABSTRACT

This study aims to apply multistage homotopy perturbation method(MHPM) to space truss composed of discrete members to obtain a semi-analytical solution. For the purpose of this research, a nonlinear governing equation of the structures is formulated in consideration of geometrical non-linearity, and homotopy equation is derived. The result of carrying out dynamic analysis on a simple model is compared to a numerical method of 4th order Runge-Kutta method(RK4), and the dynamic response by MHPM concurs with the numerical result. Besides, the displacement response and attractor in the phase space is able to delineate dynamic snapping properties under step excitations and the responses of damped system are reflected well the reduction effect of the displacement.

1. 서 론

공간 트러스는 고전적인 강구조 교량에서부터 격자 패턴을 이용한 대공간 구조물의 지붕 구조체 그리고 텐서그러티(tensegrity)형 전개구조물에 이르기까지 건축 및 토목 구조물에 많이 활용되어 왔으며 미래에도 그 효율성과 가능성을 가지고 있다. 그 이유는 인장 또는 압축 부재로 형성되어 외력에 저항하므로 단면의 효율적 사용이 가장 뛰어나며, 비교적 적은 재료로도 넓은 공간을 확보할 수 있기 때

문이다. 그러나 이산 부재로 형성되는 공간 트러스의 기하학적 비선형성은 때때로 구조 불안정 문제나 또는 동적 진동 문제에서 매우 큰 영향을 미치므로 많은 연구자들의 연구주제가 되었다⁽¹⁻⁸⁾.

비선형항을 고려하지 않은 해석에서는 구할 수 없었던 동형 구조물의 정적 및 동적 불안정 거동 특성의 연구 주제들은 정적인 좌굴의 영향에서는 연속체 문제로 치환하려는 시도들이 많이 있었으며⁽⁹⁾, 유한요소 해석을 통해서도 많은 연구가 진행되었고⁽¹⁰⁻¹³⁾, 동적문제에 관련된 연구에서는 변위응답과 동적 좌굴하중을 통한 임계하중의 산정^(14,15) 등의 연구가 많은 셀형 공간 구조물을 대상으로 수행되었다. 이중 동적 연구는 미소한 동적하중의 변화에 민감한 반응을 나타내는 불안정점이나 위상공간에서의 끌개나 스펙트럼 분석을 통한 주기배증현상의 관찰

† 교신저자; 정회원, 한국기술교육대학교 건축공학부
E-mail : leeseung@kut.ac.kr

Tel : (041)560-1334, Fax : (041)560-1224

* 정회원, 한국기술교육대학교 건축공학부

** 정회원, 한국기술교육대학교 교양학부

등으로 구조물에 나타나는 동적 불안정 현상을 설명하려 하였다.

대부분의 공학 문제에서도 마찬가지로지만 많은 비선형계의 연구가 위상공간의 끌개나 스펙트럼 또는 푸앵카레 맵(Poincare map) 등을 관찰하여 초기 조건에 대한 민감성과 이들의 카오스 현상을 설명하려 하였으므로⁽¹⁶⁾, 이 과정에서 연구자들은 높은 정도의 해를 요구하게 되었다. 특히, 비선형 항을 포함하고 있는 지배 미분방정식의 정해나 해석적 해를 구하기는 매우 어려우므로 다양한 수치해석 기법들이 이용되어졌고, 보다 정밀한 해석을 위해 매우 짧은 시간 분할 해석이 필요하게 되었다.

일반적으로 높은 정밀도를 갖는 비선형 시스템의 분석을 요구하는 경우 수치해석 기법(numerical method)보다 해석적 기법(analytical method)을 통해 해를 구할 필요성이 발생하며, 특히, 비선형 동적 응답이나 평형경로상의 분기(bifurcation)와 같은 불안정 현상의 규명은 구간 내에서 높은 차수의 해석적 해를 구하는 것이 보다 더 명확하게 비선형문제를 다룰 수 있고, 적은 량의 관측데이터를 이용하여 물리적인 특성을 규명할 수 있는 시스템 동정화(identification)에도 매우 유용하게 적용되기 때문이다. 그러나 이산 부재로 구성된 공간 구조물의 변위 함수의 가정은 주로 부재의 연결절점에서 정의되므로 비선형 운동 방정식의 유도과 이들의 해석적 해법을 적용하는 것은 매우 까다로울 수밖에 없다.

최근, 비선형 미분방정식의 해석적 해를 얻기 위한 호모토피 섭동법(homotopy perturbation method : HPM)의 등장은 많은 분야에서 관심이 높아지고 있다. 그 이유는 선형의 문제로부터 연속적으로 비선형 문제를 등위적(homotopic)으로 풀어가는 방법으로서 비교적 간단하게 비선형 문제를 효과적으로 다룰 수 있기 때문이다⁽¹⁷⁾. He에⁽¹⁸⁾ 의해 처음으로 제안된 호모토피 섭동법⁽¹⁹⁻²¹⁾ 비교적 쉽고 빠르게 해석적 해를 구할 수 있으며, 현재 많은 과학자들이 각 분야에 있어서 다양한 검증예제를 통하여 그 효율성을 소개하고 있다. 공학과 과학 분야에서는 호모토피 섭동법을 기초로 하여 비선형 진동, 비선형 열전도 및 유체역학 등의 비선형 문제에 대한 연구가⁽²²⁻³⁰⁾ 수행되었고, Chowdhury 등은⁽³¹⁾ 로렌츠 시스템(Lorenz system)을 대상으로 시분할 호모토피 섭동법(multistage homotopy perturbation method :

MHPM)을 제안하여 호모토피 섭동법의 단점을 개선하였으며, 호모토피 섭동법의 기본적 이론을 바탕으로 비교적 빠르게 수렴하는 해를 얻을 수 있었다. 이후, Chowdhury는⁽³²⁾ 비선형 열전도 방정식의 문제에 시분할구간 호모토피 섭동법을 적용하고, 아도미안 분해법(adomian decomposition method: ADM)과 해석방법에 대해 비교하여 비교적 쉽고 빠르게 접근할 수 있음을 보였으며, 매우 간단하게 효과적인 해를 얻을 수 있다.

따라서 이 연구는 공간 트러스를 대상으로 비선형 지배방정식의 구성과 시분할구간 호모토피 섭동법의 적용에 대해서 다루는 것을 목적으로 한다. 아치 구조물⁽³³⁾과 더불어 얇은 공간 트러스에서 나타나는 동적 스냅핑(dynamic snapping) 현상에 대해서 동적 좌굴 전·후의 변위응답과 위상공간의 궤적의 고찰을 통해서 시분할구간 호모토피 섭동법의 적용성에 대해서 파악하고 비교하도록 한다. 본 논문에서는 해석방법에 대한 적용과정만을 다루도록 하며, 호모토피 방정식의 구성에 대한 설명과 시분할한 해석적 해를 구하도록 하였고, 해석 결과는 4차 룬게쿠타(4th order Runge-Kutta: RK4)법과 비교하여 동적 응답과 그 특성에 대해서 살펴보도록 한다. 여기서, 지배방정식으로부터 호모토피 구조(homotopy structures)를 형성하여 해석하는 섭동법은 상대적으로 긴 시분할 구간에 대한 고차의 해를 구할 수 있으며, 차수에 따라 각 구간에 대한 해의 정밀도를 높일 수 있는 장점을 가진다.

2. 시분할구간 호모토피 섭동법

이 장에서는 해석적 해를 구하는 방법인 호모토피 섭동법과 이를 바탕으로 시분할간격으로 개선된 기법을 설명한다. 먼저, 호모토피 섭동법에 대해서 살펴보기 위해서 식 (1) 및 (2)와 같은 비선형 미분방정식과 경계조건을 고려한다.

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (1)$$

$$B\left(n, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2)$$

여기서, $A()$ 는 미분연산자(general differential operator)이고, $B()$ 는 경계 연산자(boundary operator), $f(r)$ 는 기지의 해석적 함수(a known

analytic function), Γ 는 영역 Ω 의 경계이다. 연산자 $A()$ 는 일반적으로 선형 및 비선형 연산자 $L()$, $N()$ 의 두 부분으로 나눌 수 있으며, 식(3)과 같다.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3)$$

식(2)를 이용하여 호모토피 구조를 구성하면 식(4)와 같은 방정식으로 표현할 수 있다^(17,18).

$$H(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (4)$$

여기서, $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ 이며, $p \in [1, 0]$ 는 첨가 파라미터(embedding parameter), u_0 는 경계조건을 만족하는 첫 번째 근사(first approximation)이다. 그러므로 명백하게 식(5)~(6)과 같은 관계를 얻는다. 즉 p 가 1일 때 원래의 식을 만족하는 호모토피 방정식(homotopy equation)이 된다.

$$H(v, 0) = [L(v) - L(u_0)] = 0 \quad (5)$$

$$H(v, 1) = [A(v) - f(r)] = 0 \quad (6)$$

여기서, p 가 0에서 1까지 변화하는 것은 $v(r, p)$ 가 u_0 에서 $u(r)$ 로 변형(deformation)하는 것이고, 연립 방정식에서 $L(v) - L(u_0)$ 과 $A(v) - f(r)$ 는 등위적(homotopic)이다. 그러므로 식(4)의 해석적 해는 식(7)와 같이 p 의 멱급수로 표현할 수 있으며, 식(8)에서와 같이 p 가 1에 가까울수록 더 좋은 근사가 된다.

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i = v_0 p^0 + v_1 p^1 + v_2 p^2 + \dots \quad (7)$$

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i = \lim_{p \rightarrow 1} \{v_0 p^0 + v_1 p^1 + v_2 p^2 + \dots\} \quad (8)$$

호모토피 섭동법은 다양한 선형 또는 비선형 미분방정식의 해석적 해를 구하는 일반적인 해석방법을 제공하고 있다. 또한, 해석 결과의 정밀도를 높이기 위해서 Chowdhury 등은⁽¹⁷⁾ 지속시간이 긴 문제에 대해서 시분할구간 호모토피 섭동법을 제안하였으며, 로렌츠 시스템을 통해 보완된 강력한 해석방법을 설명하였다. 시분할하는 방법은 기본적으로 식(4)의 등위상 방정식을 여러 구간에 걸쳐 호모토피 섭동법을 적용하여 해를 구하는 것이고 유사한 해석적 방법(semi-analytical method)으로 볼 수 있

다. 시분할구간 호모토피 섭동법의 경우 경계에서의 근사는 식(10)과 같이 나타낼 수 있고, 해석적 해는 여전히 식(7)과 같이 p 에 관한 다항식으로 나타난다.

$$L(u_i) - L(u_{0i}) + p[L(u_{0i}) + p[N_i(u_1, u_2, \dots, u_m) - f_i]] = 0, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

$$u_{i,0}(t) = u_{0i}(t) = u_i(t^*) = c_i^*, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

식(10)을 이용하여 각 부분구간(subinterval)에서의 근사 해석적 해를 연속으로 구하여 p 에 관한 미지 변수들을 구성한다. 여기서, 식(10)의 t^* 는 모든 하부구간의 왼 끝점(left end point) 경계이고, 선형 연산자의 역(inverse)을 계산하여 미지의 $u_{i,j}$ 를 구하는 것이 가능해진다. 여기서, 해법의 선형 연산자의 역은 $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ 이다. 이것은 시분할구간 호모토피 섭동법에서는 이전단계에서 구한 해의 경계치를 이용하여 부분구간의 미지 파라미터들의 값을 연속적으로 구해 나가는 것을 의미한다. 따라서, 해석적 해는 $(t-t^*)$ 의 형태로 유도되며, 해의 수렴성은 Chowdhury 등에⁽¹⁷⁾ 의해 많이 토의되었으므로 이 논문에서는 생략한다⁽³²⁾.

3. 공간 트러스의 비선형 동적 해석

3.1 비선형 운동방정식

요소 정식화를 위해 국소 좌표계 x, y, z 및 전체 좌표계 X, Y, Z 로 정의된 공간의 절점벡터를 f 와 d 및 F 와 D 로 정의하며, 각각은 국소 좌표계에서의 절점력과 절점변위, 전체 좌표계에서의 절점력과 절점변위이다. 요소의 절점 벡터로 표현된 변위함수 u 는 라그랑주 보간함수 $N_i = 1 - \xi$ 및 $N_j = \xi$ 를 이용하여 식(11)과 같이 가정한다.

$$u = [N_i I_3 : N_j I_3] T^T D \quad (11)$$

여기서 $\xi = x/l$ 이고, l 은 부재의 길이이다. 변형도-변위 관계식을 기하학적 비선형성을 고려하여 식(12)로 채택한다.

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

행렬로 표기된 변위함수를 이용하여 식 (12)를 표현하면 식 (13)과 같고 변분 $\delta\epsilon$ 는 식 (14)와 같다.

$$\epsilon = \mathbf{U}^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \quad (13)$$

$$\delta\epsilon = \mathbf{U}^T \delta\mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \delta\mathbf{D} \quad (14)$$

여기서, $\mathbf{U} = \{N_{j,x} \ 0 \ 0 : N_{i,x} \ 0 \ 0\}$,

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

응력-변형도 관계는 선형 탄성 범위로 가정하며, 식 (15)와 같다.

$$\sigma = E\epsilon \quad (15)$$

요소의 강성행렬을 구하기 위해 가상일의 원리 (principle of virtual work)를 적용하고, 전체 시스템에서의 절점 벡터와 식 (15)를 대입하여 적분하면 식 (16)과 같다.

$$\delta \mathbf{D}^T \mathbf{F} = AEI (\delta \epsilon^T \epsilon) \quad (16)$$

각 항에 대해서 식 (13)과 식 (14)를 대입하고, 절점 변위에 대해서 정리하면 식 (17)과 같은 기초방정식이 구해진다.

$$\mathbf{F} = AEI \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{TU}^T \mathbf{UT} \mathbf{D} \\ + \left(\mathbf{K}_s \mathbf{DUT}^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{UT}^T \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \right) \\ + \frac{1}{2} \mathbf{K}_s \mathbf{DD}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \end{array} \right\} \quad (17)$$

식 (17)의 오른쪽 항들을 살펴보면, 첫 번째 항은 미지변위벡터의 1차 항이며, 두 번째와 세 번째는 2차 항 그리고 마지막 항은 3차 항에 해당된다. 그러므로 비선형 운동방정식은 식 (17)에 질량(mass)과 감쇠(damping)항을 고려하여 식 (18)과 같이 나타낼 수 있다⁽⁵⁾.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \{\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{D}) + \mathbf{K}_3(\mathbf{D}^2)\}\mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (18)$$

여기서, $\mathbf{M}$ 은 질량행렬, $\mathbf{C}$ 는 감쇠행렬이고, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{D})$, $\mathbf{K}_3(\mathbf{D}^2)$ 는 식 (17)에 나타난 각 차수에 따른 강성행렬이다.

3.2 1자유도 모델의 시분할구간 해석적 해

시분할구간 호모토피 섭동법을 이용하기 위해 식

(18)의 형태로 표현되는 Fig. 1의 1자유도 공간 트러스 모델의 해를 구하도록 한다. Fig. 1에서 나타난 모델은 모두 4개의 탄성 봉요소로 구성되며, 1번을 제외한 나머지 절점은 고정되어 있다. 그리고 밀도 $\rho (= 801 \text{ kg/m}^3)$, 탄성계수 $E (= 206 \text{ GPa})$ 및 단면적 $A (= 11.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)$ 는 요소 내에서 일정하며, 밑변의 길이는 $L (= 5\text{m})$, 높이는 $H (= 1\text{m})$ 의 값을 가지는 형상으로 얇은 공간 구조물에서 다루어지는 모델이다. 외력은 스텝하중으로 가정하고, 모델의 형상 파라메타를 $\mu (= H/2L)$ 로 정의하였으며, 설명된 모델의 경우는 $\mu = 0.1$ 에 해당한다. 채택된 모델은 하중의 미소한 증가에 급격한 변위가 발생하는 모델로 잘 알려져 있으며 동적 임계하중 전/후의 응답은 서로 다른 주기와 위상공간의 궤적을 나타낸다.

이상의 조건을 이용하여 1번 절점의 수직변위만을 고려하여 비선형 운동방정식을 형성하면 식 (19)와 같고, 식에서 D 는 수직 변위이다.

$$\ddot{D} + 2h\omega_0\dot{D} + \omega_0^2 D + \frac{K_2}{m} D^2 + \frac{K_3}{m} D^3 = \frac{F}{m} \quad (19)$$

여기서, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, $h = \frac{c}{2m\omega_0}$, $k_1 = 4 \frac{EAH^2}{l^3}$,

$$k_1 = -6 \frac{EAH}{l^3}, \quad k_1 = 2 \frac{EA}{l^3}$$

식 (19)에서 h 는 감쇠정수이며, 비감쇠(undamped) 시스템은 $h=0$ 일 때를 의미한다. 비선형 지배방정식의 호모토피 섭동법을 이용한 비선형 해를 구하기 위해서 선형연산자 및 비선형 연산자를 정의하면 다음과 같다.

$$L(D) = \ddot{D} \quad (20)$$

Fig. 1 Shape of SDOF model

$$N(D) = 2h\omega_0\dot{D} + \omega_0^2 D + \frac{K_2}{m}D^2 + \frac{K_3}{m}D^3 - \frac{F}{m} \quad (21)$$

식 (20)과 (21)을 식 (9)에 대입하고, 선형 연산자에 대한 역을 t^* 에서 계산하면 구간 $[t^*, t_1]$ 의 해석적 해를 구할 수 있다. 여기서, 호모토피 섭동법은 식 (19)의 해를 식 (8)과 같이 가정하므로 식 (9)는 p 에 관한 다항식이다. 따라서 식 (8)의 p 의 각 차수에 대한 계수 방정식을 이용하여 계산 할 수 있으며, 각각의 급수 항을 구하면 식 (22) 및 식 (23)과 같다.

$$v_0 = \dot{D}_0 - D_0 t_0 + D_0 \quad (22a)$$

$$v_1 = f_{11}(t)2h\omega_0 + f_{12}(t)\omega_0^2 + f_{13}(t)\frac{K_2}{m} + f_{14}(t)\frac{K_3}{m} - f_{15}(t)\frac{F}{m} \quad (22b)$$

$$v_2 = \dots \quad (22c)$$

여기서,

$$f_{11}(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + t_0 t - \frac{1}{2}t_0^2 \right) \dot{D}_0 \quad (23a)$$

$$f_{12}(t) = \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t_0 t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 t + \frac{1}{6}t_0^3 \right) \dot{D}_0 + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t_0 t - \frac{1}{2}t_0^2 \right) D_0 \quad (23b)$$

$$f_{13}(t) = \left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t_0 t^3 - \frac{1}{2}t_0^2 t^2 + \frac{1}{3}t_0^3 t - \frac{1}{12}t_0^4 \right) \dot{D}_0^2 + \left(-\frac{1}{3}t^3 + t_0 t^2 - t_0^2 t + \frac{1}{3}t_0^3 \right) \dot{D}_0 D_0 + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t_0 t - \frac{1}{2}t_0^2 \right) D_0^2 \quad (23c)$$

$$f_{14}(t) = \left(-\frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{4}t_0 t^4 - \frac{1}{2}t_0^2 t^3 + \frac{1}{2}t_0^3 t^2 - \frac{1}{4}t_0^4 t + \frac{1}{20}t_0^5 \right) \dot{D}_0^3 + \left(-\frac{1}{4}t^4 + t_0 t^3 - \frac{3}{2}t_0^2 t^2 + t_0^3 t - \frac{1}{4}t_0^4 \right) \dot{D}_0^2 D_0 + \left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t_0 t^2 - \frac{3}{2}t_0^2 t + \frac{1}{2}t_0^3 \right) \dot{D}_0 D_0^2 + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t_0 t - \frac{1}{2}t_0^2 \right) D_0^3 \quad (23d)$$

$$f_{15}(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t_0 t - \frac{1}{2}t_0^2 \quad (23e)$$

식 (22)에서 첨가 파라미터 p 의 1차 항을 기초로 구한 v_1 은 시간 t 에 관해서는 5차 항으로 구성되었고, v_2 는 더 큰 차수의 시간 t 에 관한 다항식이 된다. 따라서 고려하는 p 의 차수가 높아짐에 따라 높은 정밀도의 해를 얻게 되며, 시간 t 에 관한 차수와 항수도 따라 늘어날 것이다. 각 단계별 해석에서는 이전단계의 초기 값을 이용하여 방정식이 위의 형태의 계수를 가지고서 형성되므로 각 구간에 대한 고차 해를 구할 수 있으며, 구간 내에서 높은 정도의 연속인 값을 구현할 수 있다.

3.3 예제의 동적 응답

이 절에서는 식 (22)와 식 (23)에 의한 해석결과를 수치해석 결과와 비교하고, 동적 좌굴이 발생하는 임계점 전후의 결과를 살펴보도록 한다. 여기서 각 단계별 시간간격을 시분할구간 호모토피 섭동법은 0.1, 4차 룬계쿠타법은 0.01로 채택하여 해석을 수행하였다.

시분할구간 호모토피 섭동법을 이용하여 1자유도 예제를 대상으로 동적 해석을 수행한 결과 감쇠정수를 고려하지 않은 시스템은 Fig. 2와 같고, 룬계쿠타법과 비교하였다. 여기서 고려되는 가진(excitation)은 스텝하중이 고려되었으며, 하중은 각각 900 kN, 1000 kN, 1100 kN, 1200 kN이다. Fig. 2에서 알 수 있듯이 두 해석방법의 변위 응답 결과는 모두 잘 일치한다. 또한 시분할구간 호모토피 섭동법의 각 구간에 대한 연속성은 식 (23)에 의한 값임으로 시분할구간 내에서 연속이 보장된다.

각각의 하중레벨에 대한 변위는 Fig. 2에서 알 수 있듯이 주기와 진폭에서 두 가지 다른 특징을 보이고 있으며, 진폭과 주기 변화는 하중레벨의 변화와 선형적 변화를 하지 않음을 직관적으로 알 수 있다. 특히, Fig. 2(c)와 Fig. 2(d)에서는 최대변위는 증가하고 주기는 짧아졌다. Fig. 2에서, 시간에 따른 변위 응답은 스텝하중의 레벨이 900 kN, 1000 kN와 1100 kN, 1200 kN의 두 그룹으로 나누어진다. 즉, 하중레벨이 1000 kN과 1100 kN사이에는 변위의 진폭이 매우 큰 차이를 보인다.

속도와 가속도의 변화에서도 Fig. 3과 같이 두 하

(a) $\Delta=900$ kN

(b) $\Delta=1000$ kN

(c) $\Delta=1100$ kN

(d) $\Delta=1200$ kN

Fig. 2 Comparing results of SDOF model by using MHPM with RK4 method

(a) Displacement

(b) Velocity

(c) Acceleration

Fig. 3 Results of SDOF model by using MHPM

중레벨 사이에서 나타나는 결과의 형태가 다른 것은 쉽게 파악할 수 있다. 이것은 Budiansky-Roth의 동적 좌굴 판정⁽³⁴⁾으로 설명될 수 있으며, 하중레벨의 미소한 변화에 나타나는 급격한 최대변위가 발생하는 단계를 임계하중으로 정의하는 판정법은 연구자들이 손쉽게 이용한 방법 중 하나이다⁽¹⁶⁾. 따라서

(a) Pre-buckling level($\Delta=900, 1000$ kN)

(b) Post-buckling level($\Delta=1100, 1200$ kN)

Fig. 4 Phase diagrams of undamped SDOF model

Fig. 5 Trajectories of SDOF model in phase plan (velocity-Acceleration)

두 하중레벨 사이에서 현저한 변위의 증가가 타나는 레벨이 존재할 것이다^(5,7).

이와 같은 현상은 위상평면의 지형에서도 차이를 기대해 볼 수 있다. Fig. 4는 각 외부 동적 하중 레벨에 대한 변위와 속도의 위상평면에 나타나는 궤적을

(a) Pre-buckling level($\Delta=1000$ kN)

(b) Post-buckling level($\Delta=1200$ kN)

Fig. 6 Phase diagrams of damped SDOF model

그래프로 나타낸 것으로서 레벨 900 kN, 1000 kN과 레벨 1100 kN, 1200 kN의 궤적 모양은 형태가 다르게 나타난다. 또한 속도와 가속도의 위상평면에서도 두 레벨군의 궤적 크기와 형태가 다른 것을 쉽게 알 수 있다.

다음으로 감쇠항을 고려한 모델을 살펴해보도록 한다. Fig. 6은 비감쇠 모델과 같이 형상 파라미터 $\mu(=H/2L)$ 가 0.1, 즉 $H=1$ m인 모델의 감쇠정수 h 를 각각 0.0, 0.03, 0.05, 0.07일 때를 고려한 동적 응답이다. 하중레벨에 대해서는 동적 좌굴이 발생하기 전 레벨인 1000 kN과 이후 레벨인 1200 kN레벨을 대상으로 해석을 수행하였다. 감쇠 시스템에 대한 해석결과에서 h 의 증가에 따라 변위 응답은 빠르게 한 점으로 수렴하는 것을 알 수 있으며, 주기도 또한 점차 짧아지는 것을 그림을 통해 알 수 있다.

이와 같은 감쇠 시스템에 대한 변위응답을 확장된 상태 공간(extended state space)에서 살펴보기로

(a) Pre-buckling level($A=1000$ kN)

(b) Post-buckling level($A=1200$ kN)

Fig. 7 Trajectories of SDOF model in consideration of damping coefficient($h=0.0, 0.03, 0.05$ and 0.07)

한다. Fig. 7은 위상공간에 나타난 운동궤도를 시간과 함께 3차원으로 나타낸 것으로서 Fig. 6(a)는 동적 좌굴 하중레벨 이전의 위상곡선이며, Fig. 6(b)는 동적 스냅핑 현상이 나타나는 하중레벨에 대한 궤적이다. Fig. 6(a)에서 감쇠를 고려한 모델들의 궤도는 감쇠를 고려하지 않은 $h=0.0$ 일 때의 궤도 중심을 향해서 수렴하고, Fig. 5(b)의 감쇠를 고려한 모델은 위상공간의 궤적의 형상이 변화된 중심을 향해서 점근적 안정 상태로 나타난다. 이 모델의 해석 결과에서 볼 때, 감쇠를 고려한 이와 같은 수렴 결과는 보편타당한 결과이다.

시분할구간 호모토피 섭동법을 이용한 공간 트러

스의 비선형 동적 해석에 대해 해석결과를 4차 분계쿠타법과 비교하였고, 감쇠시스템과 비감쇠 시스템의 동적 응답 결과를 비교하여 보았다. 수치 결과와의 비교에서는 결과가 잘 일치하였고, 위상평면에서의 끌개는 동적 좌굴의 발생 전후의 특징을 잘 설명해 주었다. 이것은 두 하중레벨 사이에서의 위상공간의 궤적이 다른 모양의 한계순환궤개를 형성하는 것으로 파악할 수 있으며, 또한 감쇠시스템의 경우에서의 변위응답의 특징도 위상공간에서의 한 점으로 궤적이 수렴하는 점근적 안정(asymptotic stable) 상태를 설명할 수 있다. 이러한 비선형 해석에 대한 결과는 호모토피 섭동법의 적용 가능성을 설명해 주고 있다.

4. 결 론

시분할구간 호모토피 섭동법을 이용하여 1자유도 공간 트러스를 대상으로 비선형 동적 해석을 수행하고 적용과정과 구간별 해석적 해 및 해석결과를 이 연구에서 다루었다. 기하학적 비선형 항이 고려된 공간 트러스 구조물의 지배 방정식이 유도되었고, 1자유도 모델의 경우에 대해 호모토피 방정식을 구하여 시분할구간 기법의 해석을 수행하였다. 시분할구간 호모토피 섭동법에 의해 구하여진 구간별 고차 다항식으로 표현되는 해석적 해는 수치해석 기법인 4차 분계쿠타법과 비교하여 일치하는 결과를 얻었으며, 얇은 공간구조물에서 일반적으로 잘 알려진 현상인 동적 좌굴의 발생 전 후의 위상공간 궤적의 변화를 잘 나타내 주었다. He⁽¹⁷⁾에 의해 처음으로 제안된 호모토피 섭동법의 개선된 시분할구간 호모토피 섭동법은 일반적으로 구하기 힘든 근사 해석적 해(approximate analytical solution)를 구할 수 있는 방법으로 공간 트러스 모델에 적용하여 본 결과 상대적으로 긴 구간에서의 해석에서도 만족할 만한 해를 구할 수 있었으며, 정해를 구하기 힘든 많은 공학적 비선형 문제에 비교적 정도 높은 유사한 해석적 해의 결과를 예상할 수 있을 것으로 짐작된다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재

원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0023674).

참 고 문 헌

- (1) Papadrakakis, M., 1981, Post-buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Interaction Methods, Computers and Structures, Vol. 14, No. 5-6, pp. 393~402.
- (2) Coan, C. H. and Plaut, R. H., 1983, Dynamic Stability of a Lattice Dome, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, No. 2, pp. 269~274.
- (3) Kassimali, A. and Bidhendi, E., 1988, Stability of Trusses under Dynamic Loads, Computers & Structures, Vol. 29, No. 3, pp. 381~392.
- (4) Hill, C. D., Blandford, G. E. and Wang, S. T., 1989, Post-buckling Analysis of Steel Space Trusses, Journal of Structural Engineering, Vol. 115, No. 4, pp. 900~919.
- (5) Kim, S. D., 1990, Dynamic Stability of Shallow Structures, PhD Dissertation, Tokyo University, Tokyo.
- (6) Choong, K. K. and Hangai, Y., 1993, Review on Methods of Bifurcation Analysis for Geometrically Nonlinear Structures, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 34, No. 112, pp. 133~149.
- (7) Kim, S. D., Kang, M. M., Kwun, T. J. and Hangai, Y., 1997, Dynamic Instability of Shell-like Shallow Trusses Considering Damping, Computers and Structures, Vol. 64, No. 1-4, pp. 481~489.
- (8) Tada, M. and Suito, A., 1998, Static and Dynamic Post-buckling Behavior of Truss Structures, Engineering Structures, Vol. 20, No. 4-6, pp. 384~389.
- (9) Jung, H. M., Kwon, Y. H. and Choi, Y. S., 1993, Study on Buckling-characteristics of Rigidly Jointed Single-layer Latticed Domes with Triangular Network, Journal of Architectural Institute of Korea, Vol. 9, No. 2, pp. 185~194.
- (10) Kwon, T. J., Kim, S. D. and Kim, J. M., 1997, A Study on the Unstable Behavior of Pin-connected Single-layer Latticed Domes considering Geometric Nonlinearity, Conference of Computational Structural Engineering Institute of Korea, Vol. 10, No. 1, pp. 240~247.
- (11) Kim, J. K. and Han, S. E., 1998, Linear Buckling Behaviors of Single Layer Latticed Domes by Model Analysis, Journal of Architectural Institute of Korea, Vol. 14, No. 4, pp. 317~325.
- (12) Kim, S. D., 2002, Nonlinear Instability Analysis of Framed Space Structures with Semi-rigid Joint, Journal of Architectural Institute of Korea, Vol. 18, No. 3, pp. 55~62.
- (13) Shon, S. D., Kim, S. D., Lee, S. J. and Kim, J. S., 2011, A Study on the Critical Point and Bifurcation According to Load Mode of Dome-typed Space Frame Structures, Journal of Korea Association for Spatial Structures, Vol. 11, No. 1, pp. 121~130.
- (14) Kim, D. R., Kim, N. S. and Kim, S. D., 2009, Dynamic Snapping Behavior Analysis of Shallow Space Truss Structure Considering Geometric Nonlinearity, Conference of Architectural Institute of Korea, Vol. 29, No. 1, pp. 153~156.
- (15) Kim, S. D. and Yun, T. Y., 2003, Dynamic Buckling Characteristics of Arch Structures Considering Geometric Nonlinearity, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 492~497.
- (16) Jang, A. B. and Lee, J. Y., 1997, Chaotic behavior of a Double Pendulum Subjected to Follower Force, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 7, No. 3, pp. 492~497.
- (17) Sadighi, A., Ganji, D. D. and Ganjavi, B., 2007, Travelling Wave Solutions of the Sine-gordon and the Coupled Sine-gordon Equations Using the Homotopy Perturbation Method, Scientia Iranica Transaction B: Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 2, pp. 189~195.
- (18) He, J. H., 1999, Homotopy Perturbation Technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 178, No. 3-4, pp. 257~262.
- (19) He, J. H., 2000, A Coupling Method of Homotopy Technique and Perturbation Technique for

Nonlinear Problems, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 35, No. 1, pp. 37~43.

(20) He, J. H., 2005, Homotopy Perturbation Method for Bifurcation of Nonlinear Problems, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, Vol. 6, No. 2, pp. 207~208.

(21) He, J. H., 2006, Homotopy Perturbation Method for Solving Boundary Value Problems, Physics Letters A, Vol. 350, No. 1-2, pp. 87~88.

(22) He, J. H., 2003, A Simple Perturbation Approach to Blasius Equation, Applied Mathematics and Computation, Vol. 140, No. 1, pp. 217~222.

(23) He, J. H., 2004, The Homotopy Perturbation Method for Nonlinear Oscillators with Discontinuities, Applied Mathematics and Computation, Vol. 151, No. 1, pp. 287~292.

(24) He, J. H., 2005, Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Wave Equations, Chaos Solitons & Fractals, Vol. 26, No. 3, pp. 695~700.

(25) Ganji, D. D., 2006, The Application of He's Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer, Physics Letters A, Vol. 355, No. 4-5, pp. 337~341.

(26) Blendez, A. and Hernandez, T., 2007, Application of He's Homotopy Perturbation Method to the Doffing-harmonic Oscillator, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 8, No. 1, pp. 79~88.

(27) Chowdhury, M. S. H., Hashim, I. and Abdulaziz, O., 2007, Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Population Dynamics Models, Physics Letters A, Vol. 368, No. 3-4, pp. 251~258.

(28) Chowdhury, M. S. H. and Hashim, I., 2008, Analytical Solutions to Heat Transfer Equations by Homotopy Perturbation Method Revisited, Physics Letters A, Vol. 372, No. 8, pp. 1240~1243.

(29) Hashim, I. and Chowdhury, M. S. H., 2008, Adaptation of Homotopy Perturbation Method for Numeric-analytic Solution of System of ODEs, Physics Letters A, Vol. 372, No. 4, pp. 470~481.

(30) Hashim, I., Chowdhury, M. S. H. and Mawa, S., 2008, On Multistage Homotopy Perturbation Method Applied to Nonlinear Biochemical Reaction Model, Chaos Solutions & Fractal, Vol. 36, No. 4, pp. 823~827.

(31) Chowdhury, M. S. H., Hashim, I. and Momani, S., 2009, The Multistage Homotopy Perturbation Method: A Powerful Scheme for Handling the Lorenz System, Chaos Solutions & Fractal, Vol. 40, No. 4, pp. 1929~1937.

(32) Chowdhury, S. H., 2011, A Comparison between the Modified Homotopy Perturbation Method and Adomain Decomposition Method for Solving Nonlinear Heat Transfer Equations, Journal of Applied Sciences, Vol. 11, No. 8, pp. 1416~1420.

(33) Lee, T. E., Lee, B. K., Lee, J. Y. and Yoon, H. M., 2008, In-plane Free Vibration Analysis of Parabolic Arches with Hollow Section, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 2, pp. 215~223.

(34) Budiansky, B. and Roth, R. S., 1962, Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells; Collected Papers on Instability of Shells Structures, NASA TN D-1510, Washington DC, pp. 597~606.