차륜-레일 2점 접촉을 고려한 3차원 윤축 동역학 해석

A Three Dimensional Wheelset Dynamic Analysis considering Wheel-rail Two Point Contact

강주석^{1†}

Juseok Kang

Abstract Wheelset dynamic analysis is a key element to determine the degree of accuracy of railway vehicle dynamics. In this study, a three-dimensional wheelset dynamic analysis is presented in such a way that the precise wheel-rail contact analysis in three-dimension is implemented into the dynamic equations of a wheelset. A numerical procedure that can be used for the analysis of a wheelset dynamics when the wheel-rail two point contact occurs in a cornering maneuver is developed. Numerical solutions of the constraint equations and the dynamics equations of a wheelset are achieved by using Runge-Kutta method. The proposed wheelset dynamic analysis is validated by comparison against results obtained from VI-RAIL analysis.

Keywords : Wheelset dynamic analysis, railway vehicle dynamics, wheel-rail contact analysis, wheel-rail two point contact

초 록 윤축 동역학 해석은 철도차량 동역학 해석의 정밀도를 결정하는 핵심 요소이다. 본 연구에서는 정밀한 3차원 차륜-레일 접촉 해석을 윤축의 강체 운동 방정식에 적용하는 방법으로 3차원 윤축 동역학 해석을 수행하였다. 곡선 주행시 플랜지 접촉에 의해 차륜-레일 2점 접촉이 발생할 때 윤축의 동역학 해석이 가능한 수치해석 절차를 개발하였다. 윤축의 구속조건식과 강체 동역학 방정식을 Runge-Kutta 방법을 이용하여 수치적분을 수행하였다. 제안된 윤축 동역학 해석 결과는 VI-RAIL을 이용한 해석결과와 비교 분석하여 타당성을 검증하였다.

주요어 : 윤축 동역학 해석, 철도차량 동역학, 차륜-레일 접촉 해석, 차륜-레일 2점 접촉

1. 서 론

철도차량 동역학 해석의 최소 단위는 윤축의 동역학 해석이다. 윤축은 6개의 자유도를 가지는 단일 강체이지만 차륜-레일 접촉해석에 의해 운동이 결정되므로 윤축 동역학 해석이 철도 차량 동역학 해석의 핵심이다. 윤축의 동역학 해석이 완성되면 철도차량의 나머지 부품은 일반적인 다물체 동역학 해석 방법을 이용하면 되므로 윤축 동역학 해석의 정밀도가 철도 차량 동역학 해석의 전체 정밀도를 결정한다고 볼 수 있다.

윤축 동역학 해석은 차륜-레일 간 접촉점에서의 위치와 반력을 계산하는 접촉 메카니즘 해석과 함께 강체의 구속조건식과 운동방정식의 해를 구하는 것이다. 차륜-레일 간 접촉점에 작용하는 접촉 메카니즘의 하중에 대한 분석은 기본적으로 Hertz의 이론[1]과 Kalker[2]의 이론에 근거하고 있으나 최근의 접촉 하중에 대한 연구는 타원 접촉을 가정하는 Hertz 접촉을 벗어나 특이점을 가진 다중 접촉영역에 집중되고 있다[3-5]. 차륜과 레일 사이 접촉에서 나타날 수 있는 비연속적 특이점인 다중 접촉에 대해 접촉점의 변위와 압력간의 관

계를 접촉점의 곡률 보정으로 정확하게 표현하는 응력 해석 모델을 제시하는 등 정밀한 접촉력 계산을 시도하고 있다.

접촉점을 정밀하게 구할수록 차량동특성 예측이 더욱 정확해지므로 2000년대에 들어 차륜과 레일을 파라미터화한 해석적인 3차원 곡면함수로 표현하여 3차원 상에서 차륜과 레일의 접촉점 해를 구하는 연구가 활발히 진행되고 있다. Shabana 등[6]은 차륜과 레일을 3차원 탄성체로 가정하여 차륜과 레일간의 접촉력을 계산하는 방법을 이용하였으나 차륜과 레일의 겹침량을 계속해서 계산해야 하므로 해석시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 이를 극복하기 위해 접촉 계산 데이터를 데이터베이스로 저장하여 접촉점을 구하는 방법이 제시되었으나 데이터 저장량이 매우 많이 필요한 단점이 있다[7]. Malvezzi 등[8]은 3차원 해석의 복잡성과 오랜 계산시간 등을 회피하고자 3차원 차륜-레일 접촉해석을 수학적 가정을 통해 2차원 해석으로 문제를 전환하는 방법을 제시하였다.

대부분의 상용 철도차량 동역학 해석 프로그램은 2차원 차륜-레일 접촉해석에 기반하고 있다. 대표적 해석 프로그램인 VAMPIRE[9]는 차륜-레일 형상 곡선을 이용하며, VI-RAIL은 요 각도를 고려하기 위해 차륜의 회전선 윤곽선을 레일에 투영하여 근사적으로 접촉점을 구한다. VI-RAIL의 동역학 해석은 3차원 다물체 동역학 해석에 기반하지만 차륜-레일 접촉해석의 최소 단위인 윤축의 동역학은 6개의 강

[†]교신저자 : 한국교통대학교 철도차량시스템공학과
E-mail : kjuseok@krc.ac.kr

¹한국교통대학교 철도차량시스템공학과

Fig. 1 Wheelset coordinates

체 자유도를 모두 고려하지 않는다[10].

본 연구에서는 차륜과 레일의 접촉점을 3차원으로 정밀하게 해석하며 이를 윤축의 강체 운동 방정식에 적용하는 3차원 윤축 동역학 해석을 수행하고자 한다. 곡선 주행시 플랜지 접촉에 의해 차륜-레일 간 2점 접촉이 발생할 때 차륜과 레일의 3차원 접촉 해석을 통한 정밀한 분석이 요구되므로 본 연구에서는 2점 접촉방법에 대해 자세하게 다루었다. 윤축의 구속조건식과 강체 동역학 방정식을 Runge-Kutta 방법으로 수치적분을 수행하고 그 결과는 VI-RAIL을 이용한 윤축 동역학 해석결과와 비교 분석하였다.

2. 윤축 동역학 운동방정식

2.1 접촉점의 좌표

윤축은 좌측 차륜, 우측 차륜 및 이를 연결하는 축 등으로 구성되어 있으며 Fig. 1과 같이 하나의 강체로 가정할 수 있다. Fig. 1에서 차륜의 접촉점 중 한 점은 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{r}^w = \mathbf{R}^i + \mathbf{r}^i + \mathbf{u}^w = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{r}}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{A}^w \bar{\mathbf{u}}^w \quad (1)$$

여기서 벡터 상단의 $-i$ 는 국부 좌표계의 벡터를 나타낸다. $\mathbf{R}^i$ 는 트랙의 중심선을 나타내는 좌표 벡터로서 호의 길이 좌표 s 의 함수로서 $\mathbf{R}^i = \mathbf{R}^i(s)$ 로 나타낼 수 있다[11]. $\mathbf{A}^i$ 는 트랙 중심선과 같이 이동하는 트랙 좌표계 $x'-y'-z'$ 에 대한 회전 좌표행렬로 트랙의 캔트, 구배 등 기울임 각을 나타낸다. 마찬가지로 s 의 함수로서 $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(s)$ 로 나타낼 수 있다[11]. 트랙 좌표계에서 윤축 중심까지 변위는 $\mathbf{r}^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{r}}^i$ 로 나타낼 수 있다. 트랙 좌표계 중 종방향 축인 x' 축을 호의 길이방향으로 두고 윤축 질량 중심은 트랙좌표계에서 표현하였다. 이 경우 트랙 좌표계에서 윤축의 중심 변위는 $y'-z'$ 평면에서 운동하는 것으로 $\bar{\mathbf{r}}^i = [0 \ y' \ z']^T$ 로 가정한다. 결과적으로 윤축 질량중심의 병진변위에 해당하는 일반좌표는 $[s \ y' \ z']^T$ 가 된다. $\mathbf{A}^w$ 는 강체의 회전 좌표 행렬로서 $\mathbf{A}^w = \mathbf{A}_z(\psi) \mathbf{A}_x(\phi) \mathbf{A}_y(\theta)$ 이며,

여기서 ψ 는 요 각도, ϕ 는 롤 각도, θ 는 스핀 각도를 나타낸다.

Fig. 1에서 레일의 접촉점은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}^r = \mathbf{R}^r + \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{r}}^r \quad (2)$$

여기서 트랙 좌표계에서 레일의 한 점을 나타내는 접촉점의 위치는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{r}}^r = \bar{\mathbf{R}}^r(s'_1) + \mathbf{A}^r(s'_1) \bar{\mathbf{u}}^r(s'_2) \quad (3)$$

식 (1)의 $\bar{\mathbf{u}}^w$ 는 차륜의 접촉점까지의 좌표 벡터로서 차륜의 곡면 파라미터 s_1^w, s_2^w 로 표현이 되며, 식 (3)의 $\bar{\mathbf{u}}^r$ 는 트랙의 국부 좌표계에서 레일 접촉점까지의 좌표 벡터로서 레일의 곡면 형상을 나타내는 곡면 파라미터 s'_1, s'_2 로 표현할 수 있다[6]. 이들 곡면파라미터를 이용하여 차륜과 레일을 표현하면 Fig. 2와 같다.

윤축 질량 중심의 변위는 $\mathbf{q} = [s \ y' \ z' \ \psi \ \phi \ \theta]^T$ 의 6개 강체 자유도로 표현된다. 그러나 윤축의 접촉 동역학에서는 좌 우측 차륜에 대해 차륜과 레일의 곡면 파라미터 $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_R \ \mathbf{s}_L]$ ($\mathbf{s}_R = [s_1^w \ s_2^w \ s'_1 \ s'_2]^T$, $\mathbf{s}_L = [s_1^w \ s_2^w \ s'_1 \ s'_2]^T$)의 8개가 포함되어 총 14개의 일반 좌표가 필요하다. 일반 강체 동역학에서는 식 (1)의 $\bar{\mathbf{u}}^w$ 가 일정한 값이지만 윤축 동역학에서는 접촉점

Fig. 2 3-dimensional representation of wheel and rail

의 위치가 변하므로 일정하지 않은 특징이 있다.

2.2 접촉점의 기구학적 구속조건식

윤축의 접촉점에서의 기구학적 구속조건은 한 점에서 차륜과 레일이 만나고 그 점에서 접하므로 다음과 같이 구속 조건식을 나타낼 수 있다.

$$C^d = \begin{cases} \mathbf{t}_1^r \cdot \mathbf{r}^{wr} \\ \mathbf{t}_2^r \cdot \mathbf{r}^{wr} \\ \mathbf{t}_1^w \cdot \mathbf{n}^r \\ \mathbf{t}_2^w \cdot \mathbf{n}^r \end{cases} = 0 \quad (4)$$

$$C^n = \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{r}^{wr} = 0 \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{r}^{wr} = \mathbf{r}^w - \mathbf{r}^r$ 이다. $\mathbf{n}^r$ 은 레일 접촉점에서의 법선 벡터이다. 식 (4)와 (5)에서 한 점에서 만나는 구속 조건은 $\mathbf{r}^{wr} = 0$ 이지만, 레일의 방향 벡터 $\mathbf{t}_1^r, \mathbf{t}_2^r, \mathbf{n}^r$ 을 곱하여 레일의 각 방향으로 구속조건식을 분리 하였다. 식 (4)와 (5)은 5개의 식으로서 좌 우측 차륜에 대해서 총 10개의 구속조건식이 얻어지므로 14개의 일반 좌표에서 4개의 독립변수가 있음을 알 수 있다.

일반적인 좌표 분할법을 이용하면 강체 일반 좌표 $\mathbf{q}$ 와 곡면 파라미터 $\mathbf{s}$ 중 독립 좌표를 임의로 선택하게 된다. 여기서는 곡면 파라미터 $\mathbf{s}$ 는 종속 좌표로 선택하기 위하여 구속 조건식을 종속 식과 독립 식으로 나누었다. 식 (4)는 4개의 구속조건식으로서 4개의 곡면 파라미터 $\mathbf{s}$ 를 제거하는 데 이용되므로 종속식으로 표현한다. 식 (4)와 (5)에서 첨자 d는 종속 식, n은 독립 식을 나타낸다.

식 (4)와 (5)를 미분하면 다음과 같이 속도에 대한 구속 조건식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_s^d & C_{qd}^d & C_{qn}^d \\ C_s^n & C_{qd}^n & C_{qn}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

강체 일반 좌표는 $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_d \ \mathbf{q}_n]^T$ 로서 $\mathbf{q}_n$ 는 독립 좌표, $\mathbf{q}_d$ 는 종속 좌표이다. 위의 식에서 독립 좌표 $\dot{\mathbf{q}}_n$ 이 주어지면, 곡면 파라미터 속도 $\dot{\mathbf{s}}$ 와 종속 좌표계 속도 $\dot{\mathbf{q}}_d$ 는 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} = -C_{sq_d}^{-1} C_{qn} \dot{\mathbf{q}}_n \quad (7)$$

여기서, $C_{sq_d} = \begin{bmatrix} C_s^d & C_{qd}^d \\ C_s^n & C_{qd}^n \end{bmatrix}, C_{qn} = \begin{bmatrix} C_{qn}^d \\ C_{qn}^n \end{bmatrix}$ 이다.

2.3 윤축 운동방정식

접촉 기구학 구속조건을 가진 강체의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \mathbf{C}_q^T \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_s^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{s}} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{M}$ 은 관성행렬을 의미하고 λ 는 라그랑지 승수이며 $\mathbf{Q}$ 는 코리올리스 힘과 윤축에 작용하는 외력을 나타내고 $\mathbf{Q}_d$ 는 구속조건식 (4)와 (5)를 두 번 미분하여 나타나는 2차항을 나타낸다. 이들 값은 앞에서 구한 일반 좌표의 변위와 속도의 함수로서 나타낼 수 있다.

위의 식에서 곡면 파라미터 $\mathbf{s}$ 를 제거 하기 위해서 식 (4)와 (5)를 두 번 미분하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$C_q^d \ddot{\mathbf{q}} + C_s^d \ddot{\mathbf{s}} = \gamma^d \quad (9)$$

$$C_q^n \ddot{\mathbf{q}} + C_s^n \ddot{\mathbf{s}} = \gamma^n \quad (10)$$

여기서 γ^d, γ^n 는 2차 항 성분을 나타낸다. 식 (9)와 (10)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 강체의 일반 좌표만의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{dn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, $\mathbf{J} = C_q^n - C_s^n (C_s^d)^{-1} C_q^d$ 이며 $\mathbf{Q}_{dn} = \gamma^n - C_s^n (C_s^d)^{-1} \gamma^d$ 이다. γ^n 은 접촉점에서 접촉 수직력에 해당하는 라그랑지 승수값을 나타낸다.

식 (11)에서 외력 항 $\mathbf{Q}$ 에 포함되는 힘은 Fig. 3과 같이 윤축의 중력 $\mathbf{W}$, 접촉점에서의 접촉 수직력 $\bar{F}_n$ 과 크립력 $[\bar{F}_1^c \ \bar{F}_2^c]^T$ 이 있다. 크립력을 구하기 위해서는 크리피지를 계산해야 한다. 크리피지는 다음과 같이 접촉점에서 차륜과 레일의 상대속도를 차륜 중심의 종속도로 나눈 값으로 정의된다[2].

Fig. 3 Contact normal force and creep forces

크립력은 접촉 수직력과 크리피지로부터 계산되며 여기서는 Polach의 방법을 이용하여 크립력 $[\bar{F}_1^c \ \bar{F}_2^c]^T$ 를 계산하였다[12].

$$[\bar{F}_1^c \ \bar{F}_2^c]^T = f(\zeta_x, \zeta_y, \phi, a, b, c, \bar{F}_n) \quad (12)$$

여기서, a, b 는 접촉 수직력과 접촉 위치에서 차륜과 레일의

곡률 반경으로 계산되는 접촉 타원의 장, 단경, c 는 a, b 로 계산되는 Kalker 계수이다. Polach 방법은 크리피지에 의해 발생하는 모멘트는 작다고 가정하여 무시한다. 식 (12)에서 접촉 수직력은 식 (11)의 라그랑지 승수로 $\bar{F}_n = \lambda_n$ 이다. 수치 해석에서는 전 단계에서 식 (11)로부터 구한 라그랑지 승수를 접촉 수직력으로 가정한다.

좌, 우 차륜의 크립력은 레일 접촉점의 국부 좌표계의 값이므로 좌표 변환을 통해 다음 식과 같이 전역 좌표계의 힘으로 변환한다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}' \bar{\mathbf{F}} \quad (13)$$

여기서 $\mathbf{A}'$ 는 레일 접촉부의 좌표에서 트랙의 중심 좌표계로의 좌표 변환행렬로서 $\mathbf{A}' = [\mathbf{i}_1^T \mathbf{i}_2^T \mathbf{n}^T]^T$ 이며 $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{F}_1^c \bar{F}_2^c \bar{F}_n^c]^T$ 이다. 강체의 회전 운동방정식에 적용하는 모멘트는 국부 좌표계로 나타내어야 하므로 다음 식과 같이 운동의 국부 좌표계 벡터로 변환한다.

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{A}^{wT} \mathbf{A}'^T \mathbf{u}^w \times \mathbf{F} \quad (14)$$

2.4 2점 접촉

윤축이 곡선 궤도를 주행하는 경우 Fig. 4와 같이 원심력에 의해 차륜의 플랜지 부분(s_F)이 레일과 접촉함으로써 윤축의 운동이 제한되어 주어진 궤도를 따라 곡선 주행하게 된다. 이때 Fig. 4와 같이 한쪽 차륜에는 2점 접촉점 s_F, s_R 이 발생하게 된다. 좌회전인 경우 우측 차륜의 답면에 접촉점 s_R 과 더불어 플랜지에 접촉점 s_F 이 발생한다. 본 논문에서는 플랜지 영역은 기구학적 구속조건으로 구해지는 2점 접촉 구간의 플랜지 접촉점의 좌표를 이용하였다.

앞 절에서 접촉 수직력은 구속조건식을 운동방정식에 포함시켜 라그랑지 승수로부터 구하였다. 플랜지 부위 접촉 수직력을 전 단계에서 구한 라그랑지 승수로 가정하는 경우 2점 접촉시에는 수치해석적으로 불안정한 결과를 가져온다. 2점 접촉이 발생하면서 접촉 수직력은 0에서 매우 큰 값으로 변화되기 때문이다. 그러므로 접촉 수직력은 라그랑지 승수가 아닌 다음과 같이 탄성체 힘으로 가정하여 계산한다.

$$\bar{F}_n = \begin{cases} K\delta^{3/2} + C\delta & \delta \geq 0 \\ 0 & \delta < 0 \end{cases} \quad (15)$$

여기서, δ 는 Fig. 5와 같이 플랜지 접촉점에서 차륜과 레일의 겹침량을 나타내며, 다음과 같이 최적화 과정을 이용하여 구한다.

$$\text{Minimize } \delta(s_F) \quad (16)$$

본 연구에서는 MATLAB 함수인 `fminsearch` 함수를 이용하여 위의 최적화 문제를 풀어 곡면 파라미터 $\mathbf{s}_F = [s_1^w \ s_2^w \ s_1^r \ s_2^r]^T$ 및 δ 를 구하였다[13]. 식 (15)에서 K 는 접촉점에서의 곡률 반경 및 재질 특성으로 계산되는 Hertz 반력 계수이며 C 는

Fig. 4 Wheel-rail 2 point contact

Fig. 5 Contact normal force

Fig. 6 Contour of 2 point contact

감쇠계수이다.

2점 접촉이 발생하는 플랜지 접촉점을 찾기 위해서는 차륜과 레일의 겹침량 중 최소값을 계산해야 하므로 많은 시간이 소요되는 문제점이 있다. 그러므로 2점 접촉이 발생하는 경우를 예측하여 이때만 차륜과 레일의 겹침량을 계산하면 소요 시간을 줄일 수 있다. 임의의 윤축 위치에서 트랙 중심선 좌표계에 대한 윤축의 횡 변위 y 와 요 각도 ψ 값을 계산하고 이 값이 Fig. 6의 2점 접촉구간 이상인 경우에 대해서만 계산한다. Fig. 6의 2점 접촉구간은 2점 접촉의 기구학적 구속조건으로부터 구할 수 있다[14]. 여기서는 횡 변위 $y = \pm 10\text{mm}$, 요 각도 $\psi = \pm 10^\circ$ 에 대해 2점 접촉구간을 계산하였다.

곡면 파라미터의 속도항은 식 (4)를 미분하여 구해지며, 다음 식과 같이 앞에서 구한 강체 좌표 속도 $\dot{\mathbf{q}}$ 로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{s}}_F = -\mathbf{C}_s^{d-1} \mathbf{C}_q^d \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

앞에서와 마찬가지로 플랜지 접촉위치에서 크리피지를 구한 후 식(12)의 Polach 방법을 이용하여 크립력을 구한다. 이때 접촉 수직력은 라그랑지 승수가 아니라 식 (15)으로 계산된 $\bar{F}_n$ 임에 유의한다. 접촉 수직력과 크립력으로부터 식 (13)과 (14)로부터 플랜지 접촉부에서 강체에 작용하는 일반 힘 $\mathbf{Q}$ 를 식 (11)의 전체 외력에 합한 후 (11)의 운동방정식으로부터 해를 구한다.

3. 수치해석

윤축 운동방정식에 대해 Fig. 7과 같은 수치해석 절차에 따라 해를 구하였다. 독립 좌표의 초기 변위 $\mathbf{q}_n^i$ 와 속도 $\dot{\mathbf{q}}_n^i$ 값 및 라그랑지 승수 λ_n^i 가 주어지면, 윤축의 종속 좌표

Fig. 7 Numerical procedure

$\mathbf{q}_d^i$ 및 좌, 우측 차륜의 곡면 파라미터 $\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_L$ 를 식 (4)와 (5)를 이용하여 계산한다. 식 (4)와 (5)는 비선형 방정식이므로 Newton-Raphson 방법을 이용하였다.

1점 접촉에 대해 좌, 우측 차륜의 곡면 파라미터의 속도 $\dot{\mathbf{s}}_R, \dot{\mathbf{s}}_L$ 및 윤축 종속 좌표의 속도 $\dot{\mathbf{q}}_d^i$ 는 식 (7)을 이용하여 계산한다. 변위와 속도가 모두 계산되었으면, 좌,우측 차륜의 크리피지 값 ζ_x, ζ_y, ϕ 를 계산한다. 전 단계의 라그랑지 승수 λ_n^i 를 이용하여 식 (12)의 좌, 우측 차륜의 크립력 $[\bar{F}_1^c \bar{F}_2^c]^T$ 을 계산 후 크립력과 접촉 수직력은 외력항 $\mathbf{Q}$ 에 합한다.

2점 접촉이 발생하는 조건이면, 플랜지 접촉점에서 곡면 파라미터 $\mathbf{s}_F$ 는 식 (16)의 최적화 과정을 통해 구하며, 그 속도 $\dot{\mathbf{s}}_F$ 는 식 (17)로부터 계산한다. 마찬가지로 플랜지 접촉점에 대하여 식 (12)로부터 크립력 $[\bar{F}_1^c \bar{F}_2^c]^T$ 을 구하고 이를 운동방정식의 외력항 $\mathbf{Q}$ 에 추가로 합한다. 식 (11)의 운동방정식을 구성하는 값 $\mathbf{M}, \mathbf{J}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_{dn}$ 을 구하고 식 (11)의 대수방정식을 풀어 독립 좌표의 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}_n^{i+1}$ 와 라그랑지 승수 λ_n^{i+1} 를 구한다.

윤축의 운동방정식은 비선형 2차 미분 방정식이므로 Runge-Kutta 방법을 이용하여 독립 좌표에 대해서만 적분을 수행하여 $\mathbf{q}_n^{i+1}$ 과 $\dot{\mathbf{q}}_n^{i+1}$ 를 구한다. 여기서는 MATLAB함수인 ODE45 함수를 이용하였다. 이렇게 구한 강체의 독립 좌표 $\mathbf{q}_n^{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_n^{i+1}$ 및 라그랑지 승수 λ_n^{i+1} 를 다음 시간 단계에 적용하는 과정을 최종 단계까지 반복한다.

본 연구에서는 Fig. 8과 같은 차륜과 레일의 형상을 이용하여 윤축의 동역학 거동을 시뮬레이션 하였다. 차륜은 S1004사양이며, 레일은 UIC60 형상에 1/20 기울기로 내부로 기울어져 있다. 윤축의 질량은 1600kg이며, 관성은 $[\bar{I}_{xx} \bar{I}_{yy} \bar{I}_{zz}] = [660 \ 160 \ 600] \text{kgm}^2$ 이다. 곡선 궤도의 곡률회전 반경은 320m로서 주행거리 $s=[0, 2\text{m}, 2.5\text{m}, 100\text{m}, 200\text{m}]$ 에 따라 $R=[0, 0, 320\text{m}, 320\text{m}, 320\text{m}]$ 로 설정하였다. Fig. 9는 트랙 중심선의 중방향 및 횡방향 변위를 나타낸다. 곡선 진입시 윤축의 초기속도는 $v_0=9.2\text{m/sec}$, 회전각속도는 $\dot{\theta}_0=20\text{rad/sec}$ 이다.

본 연구에서 해석 결과는 상용 철도동역학 해석 프로그램인 VI-RAIL의 결과와 비교하였다.

VI-RAIL은 2차원 접촉해석에 기초하지만, 차륜의 요 각

Fig. 8 The profiles of wheel and rail

Fig. 9 Track center line

Fig. 10 Wheel contact line

Fig. 11 Lateral displacement of wheelset

Fig. 12 Yaw angle of wheelset

Fig. 13 Contact normal force at RH wheel

Fig. 14 Lateral creep force at RH wheel

도를 고려하기 위해 Fig. 10과 같이 요 각도에 의해 차륜이 회전할 때 차륜의 윤곽선을 레일의 수직면에 투영하여 접촉점을 구하는 방법을 이용한다. 이는 정확하게 접촉점을 구하기 어렵지만 요 각도를 고려하는 근사적인 방법이다.

Fig. 11은 윤축의 횡변위를 보여준다. 윤축이 곡선 궤도를 주행하는 경우 차륜의 플랜지 부분이 레일과 접촉하는 2점 접촉이 발생하며 윤축의 운동이 제한된다. Fig. 11과 같이 약 7.6mm에서 윤축의 횡방향 변위가 제한되고 있다. 여기서는 좌회전을 하므로 우측 차륜에 2점 접촉이 발생한다. 윤축의 횡방향 변위는 VI-RAIL과 유사한 결과를 보이고 있다. Fig. 12는 윤축의 요 각도를 나타낸다. 윤축의 요 각도가 플랜지 접촉 순간 커졌다가 일정한 값으로 유지되고 있다. VI-RAIL과 비교했을 때 경향은 유사하나 정상상태의 값이 차이가 나

타고 있다. 이는 접촉점을 정확하게 찾는 3차원 접촉 해석과 차륜의 윤곽선만을 고려하는 VI-RAIL해석의 차이와 접촉력 계산 방법 등의 차이로 판단된다.

Fig. 13은 2점 접촉이 발생하는 우측 차륜의 접촉 수직력을 비교하고 있다. 답면 접촉(RH1)과 플랜지 접촉(RH2)의 접촉 수직력을 비교할 때 본 연구의 해석결과와 VI-RAIL의 해석결과가 유사하게 나타나고 있다. Fig. 14는 횡방향 크립력을 비교하고 있다. 플랜지 접촉시는 경향은 유사하나 답면 접촉에서는 일부 차이가 나타났다.

Fig. 15는 차륜의 곡면 파라미터 s_1'' 를 비교하고 있다. 플랜지 접촉점은 잘 일치하나 답면 접촉은 일부 차이가 나타났다. 마찬가지로 Fig. 16의 레일의 곡면 파라미터 s_2'' 를 비교하였다. VI-RAIL은 2차원 접촉해석을 기반으로 하여 곡

Fig. 15 Surface parameter of RH wheel

Fig. 16 Surface parameter of RH rail

Fig. 17 Surface parameter of RH wheel

면 파라미터 s_2^w 와 s_1^r 은 구할 수 없다. 여기서는 곡선 궤도 주행시 이들 곡면 파라미터의 경향을 살펴 보았다. Fig. 17과 Fig. 18은 우측 차륜에서 Fig. 1에 표시된 곡면 파라미터 ($s_2^w - \theta$)와 s_1^r 를 나타내고 있다. 이상의 해석결과를 살펴보면 본 연구에서 제시한 수치해석 결과의 타당성을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 3차원 차륜-레일 접촉해석 방법을 이용하여 윤축의 동역학 운동방정식과 수치해석 방법을 제시하였다. 윤축은 6자유도계를 가지는 강체이지만 윤축이 3차원 운동을 하는 경우 차륜과 레일의 접촉점이 계속 변하므로 차륜과 레일의 곡면 파라미터도 운동방정식에 포함된다. 이들

Fig. 18 Surface parameter of RH rail

곡면 파라미터는 접촉 구속조건에 의해서 최종 운동방정식에는 제거시키고 윤축의 일반 좌표만으로 운동방정식을 표현하였다.

3차원 차륜-레일 접촉해석을 적용하는 경우 정밀도는 향상되지만 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 본 연구에서는 기존의 3차원 해석방법과는 다르게 2점 접촉이 발생하는 위치를 예측하여 휠-레일 겹침량 계산을 신속히 수행하는 방법을 제시하였다. 윤축의 플랜지 접촉으로 인해 2점 접촉이 발생할 경우 플랜지 접촉부에 대한 접촉 수직력을 탄성체 힘으로 외력에 포함시켰으며 최적화 과정을 통해 접촉부의 위치를 구하였다. 윤축의 3차원 동역학 해석의 수치해석은 Runge-Kutta 적분을 이용하였으며 이에 대한 수치해석 절차를 제시하였다.

본 연구의 수치해석 결과는 상용 해석프로그램인 VI-RAIL과 비교하여 그 타당성을 검증하였다. VI-RAIL은 2차원 접촉해석을 기본으로 하지만, 차륜의 요 각도 효과를 고려하기 위해 차륜의 회전시 윤곽선을 레일의 수직면에 투영하여 접촉점을 구하는 방법을 이용하여 정밀도가 높고 상용프로그램으로서 검증이 된 해석방법으로 알려져 있다. VI-RAIL의 해석결과와 본 연구의 해석결과를 비교해보면 횡 변위, 접촉 수직력, 크립력 등은 일치하는 결과를 보여주었다. 요 각도 및 곡면 파라미터의 일부는 경향은 유사하나 크기에서 일부 차이가 나타났다. 이는 차륜-레일 접촉 해석 방법의 차이로 판단되며, 전체적으로 3차원 해석 방법의 타당성은 검증되는 것으로 사료된다.

본 연구의 윤축 동역학 해석은 일반 다물체계 동역학 해석과 합쳐져서 철도 차량 전체의 동역학 해석에 이용될 수 있다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(No. 2010-0022205).

참고문헌

- [1] K.L. Johnson (1985) *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- [2] J.J. Kalker (1982) A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact, *Vehicle System Dynamics*, (11), pp. 1-13.
 - [3] J. Piotrowski, H. Chollet (2005) Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact, *Vehicle System Dynamics*, 43(6-7), pp. 455-483.
 - [4] A. Alonso, J.G. Gimenez (2006) Some new contributions to the resolution of the normal wheel-rail contact problem, *Vehicle System Dynamics*, 44 Supplement, pp. 230-239.
 - [5] J.B. Ayasse, H. Chollet (2005) Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions, *Vehicle System Dynamics*, 43(3), pp. 161-172.
 - [6] A.A. Shabana, K.E. ZaaZaa, J.L. Escalona, J.R. Sany (2004) Development of elastic force model for wheel/rail contact problems, *J. of Sound and Vibration*, 269, pp. 295-325.
 - [7] M. Malvezzi, E. Meli, S. Falomi, A. Rindi (2008) Determination of wheel-rail contact points with semianalytic methods, *Multibody System Dynamics*, 20, pp. 327-358.
 - [8] J. Santamaria, E.G. Vadillo, J. Gomez (2006) A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 44, Supplement, pp. 240-250.
 - [9] British Railroad Research (1993) *Vampire User Manual*.
 - [10] W. Kik, D. Moelle (2008) Implementation of the wheel-rail element in ADAMS/Rail Ver. 10.1, 5th ADAMS/Rail User's Conference, Haarlem.
 - [11] C. Rathod, A.A. Shabana (2006) Rail geometry and Euler angles, *ASME J. of Computational and Nonlinear Dynamics*, 1, pp. 13-15.
 - [12] O. Polach (1999) A fast wheel-rail forces calculation computer code, *Vehicle System Dynamics Supplement* (33) 728-739.
 - [13] *Using Matlab Ver. 6* (2004) The Mathworks Inc., Natick, MA, USA.
 - [14] Kang, J. (2009) A study on numerical analysis on wheel-rail contact points, *Journal of the Korean Society for Railway*, 12(2), pp. 236-242.
- 접수일(2011년 7월 27일), 수정일(2011년 12월 16일),
 게재확정일(2012년 1월 13일)