論文

개선된 일계이차모멘트법을 적용한 매트릭스 구조물 신뢰도 해석

이승규*, 김태욱*, 김성찬*, 안이기*

Matrix Structure Reliability Analysis using AFORM

Seung-Gyu Lee*, Tae-Uk Kim*, Sung-Chan Kim* and Lee-Ki Ahn*

ABSTRACT

The wing is a framework composed chiefly of skin, spars, ribs and can be simplified by matrix structure. In this paper, a displacement reliability of matrix structure is analysed by AFORM(Advanced First Order Reliability Method) and applicability is assessed.

Key Words : Reliability Assessment(신뢰도 평가), AFORM(개선된 일계이차모멘트법), Matrix Structure(매트릭스 구조물)

1. 서 론

기계 제품, 공학 시스템은 다양한 외부환경 및 작동조건에서 설계자가 의도한 기능을 수행하게 된다. 그러나, 설계/생산 등에 존재하는 불확실성으로 인해 의도했던 기능을 적절히 수행하지 못하는 경우도 발생한다. 공차, 재료물성치의 변동, 작용 하중의 불확실성 등이 이러한 불확실성의 예이다.

일반적으로 불확실성을 고려하여 안전계수를 반영한 설계를 수행하고 있다. 하지만, 이 방법은 설계자의 경험에 의존하고 있다. 불확실성을 확률변수로 모델링하고 정해진 파손기준에 따라 파손확률을 산정하는 방법은 기존의 방법보다 좀더 합리적으로 불확실성을 고려할 수 있다. 신뢰도 해석은 불확실성을 고려하여 시스템 또는 부품이 요구되는 기능을 수행하는 확률을 예측하고

평가하는 것이다.

본 논문에서는 항공기 날개를 단순화시킨 Matrix Structure의 변위 신뢰도를 계산하고 실제 날개 구조물의 적용가능성을 평가해 보았다.

2. 본 론

2.1 신뢰도 해석 기법

신뢰도 해석을 수행하기 위해서는 시스템 또는 부품의 파손 기준을 수식으로 표현하며 이를 '한계상태식(Limit State Equation)'이라고 한다. 대부분 시스템 또는 부품이 파손될 때, 한계상태식이 음의 값이 가지도록 한다.

한계상태식에 포함된 변수 중 불확실성을 내포하는 변수는 확률변수로 모델링된다. 따라서, 한계상태식 역시 확률분포를 가지며 한계상태식이 음의 값이 가지는 영역에 대한 적분을 수행함으로써 파손확률을 구할 수 있다.

2012년 08월 17일 접수 ~ 2012년 09월 19일 심사완료
논문심사일 (2012.08.20 1차), (2012.09.19, 2차)

* 한국항공우주연구원

연락처, E-mail : lsg@kari.re.kr

대전광역시 유성구 과학로 169-84

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_g(x) dx$$

where,

$g(x)$: 한계상태식

P_f : 파손확률

f_g : 한계상태식의 확률밀도함수

파손확률을 구하기 위해서는 수식 (1)을 풀어야 한다. 수식 (1)을 직접 적분할 수 있는 경우는 매우 드물며, 대부분의 경우 직접 적분하는 것은 불가능하다. 따라서, 근사적인 방법을 사용하여 수식 (1)의 값을 구한다.

근사적인 방법은 크게 모의실험법, 한계상태식을 근사적으로 모델링하는 방법, 한계상태식의 확률모멘트로부터 분포를 모델링하는 방법이 있다. 모의실험법의 대표적인 방법은 몬테칼로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)이다. 한계상태식에 존재하는 확률변수의 분포특성을 알고 있다고 했을 때, 분포특성에 맞게 무수히 많은 난수를 발생시키고 한계상태식에 대입하여 한계상태식이 음의 값을 갖는 횟수를 관찰하는 방법이다. 만약, 총 N번의 난수를 발생시켜 한계상태식에 대입하여 그 중 한계상태식이 음의 값을 가지는 경우가 n번 발생하였다면, 파손확률은 식 (2)와 같다.

$$P_f \approx \frac{n}{N} \quad (2)$$

몬테칼로 시뮬레이션은 반복횟수(N)이 클수록 정확한 파손확률을 계산할 수 있다. 사용자가 원하는 파손확률은 정확도와 반복횟수(N)과의 상관관계를 식 (3)과 같이 제시하고 있다.[3]

$$N \geq \frac{10 \text{ or } 100}{P_f} \quad (3)$$

식 (3)에 따르면 100,000번 수행했을 때, 0.1% 정확도의 파손확률을 계산할 수 있다. 한계상태식을 계산하기 위해서 상용소프트웨어를 이용하는 경우처럼, 한계상태식이 간단히 계산될 수 없는 경우, 몬테칼로 시뮬레이션으로 파손확률을 구하기 위해서는 상당히 많은 시간이 필요하다.

한계상태식을 근사적으로 모델링하는 방법은 테일러 급수 전개하여 1차 또는 2차로 근사하여

파손확률을 구하는 방법이다. 대표적인 방법으로는 개선된 일계이차모멘트법(AFORM, Advanced First-Order Reliability Method), 이계이차모멘트법(SORM, Second-Order Reliability Method)이 있다. 개선된 일계이차모멘트법은 확률변수들의 평균값에서 한계상태식까지의 가장 짧은 거리인 신뢰도 지수(β , Reliability Index)를 구하고 이를 이용하여 파손확률을 계산한다. 이계이차모멘트법은 개선된 일계이차모멘트법에서 계산한 신뢰도 지수에 한계상태식의 비선형성을 고려하여 파손확률을 구한다.

개선된 일계이차모멘트법, 이계이차모멘트법을 구현하기 위해서는 한계상태식의 민감도 정보, 즉 편미분값이 필요하다. 한계상태식이 음함수라면 편미분값을 구하기 위해 수치미분을 수행해야 하는데, 한계상태식의 독립변수 수에 따라 계산량이 급격히 증가하는 단점이 있다. 더구나, 이계이차모멘트법을 수행하기 위해서는 2차 편미분값이 필요하다.

한계상태식의 확률모멘트로부터 피어슨시스템(Pearson System) 중 하나의 분포로 모델링하고 특정 한계상태식 값에 대한 확률을 구할 수 있다. 한계상태식이 음의 값을 갖는 경우에 대한 확률뿐만 아니라, 한계상태식이 다른 값을 가질 때의 확률도 구할 수 있다는 장점이 있기는 하지만, 확률변수가 증가하면서 계산량이 급격히 증가하는 단점이 있다.

2.2 Matrix Structure Displacement

항공기의 날개는 Spar, Rib, Stringer, Skin 등 다양한 구조물이 조립되어 하중을 견딘다. 본 논문에서는 날개의 이러한 특성을 반영한 Matrix Structure[4]를 구성하고 신뢰도 평가에 활용하였으며 상세한 구조는 Fig 1~3과 같다.

Fig 1. Matrix Structure(Top View)

Fig 2. Matrix Structure(Front View)

Fig 3. Matrix Structure(Side View)

본 논문에서는 Matrix Structure 끝단의 수직 변위에 대한 신뢰도 해석을 수행하였다. 수직변위를 계산하기 위해서 유한요소해석을 수행하였으며 좌우 대칭이므로 오른쪽 구조물만 모델링하였다.

Fig 4. 유한요소모델링 개념도

Skin, Rib, Spar는 Shell 요소로 모델링하였으며, Rib Cap과 Spar Cap은 Bar 요소로 모델링하였다. 하중은 Upper Skin의 각 node에 수직 아래 방향으로 동일한 크기의 하중을 적용하였다.

Fig 5. 유한요소모델 Spar 위치

Fig 6. 유한요소모델 Rib 위치

Skin 두께, Spar 및 Rib의 두께, Spar Cap, Rib Cap의 단면적, 재료물성치, 하중의 불확실성을 고려하기 위해 확률변수(정규분포)로 가정하였으며 각 확률변수의 평균, 표준편차는 표 3과 같다.

표 3. 확률변수

순번	확률변수	평균	표준편차
	확률변수의 물리적인 의미		
1	E	1.00E7	300,000
	Elastic Modulus		
2	G	3.75E6	112,500
	Shear Modulus		
3	A1	0.1573	0.003146
	Cap Area of Spar 1		
4	A2	0.2920	0.005840
	Cap Area of Spar 2		
5	A3	0.3150	0.006300
	Cap Area of Spar 3		
6	A4	0.3800	0.007600
	Cap Area of Rib 1		
7	A5	0.7364	0.014728
	Cap Area of Rib 2, 3		
8	T1	0.0630	0.003150
	Thickness of Skin		
9	T2	0.0400	0.002000
	Thickness of Spar Web		
10	T3	0.0400	0.002000
	Thickness of Rib Web		
11	Load	100.00	5
	Magnitude of Load		

2.3 신뢰도 해석

확률변수를 표 3과 같이 가정하였을 때, Matrix Structure 끝단 변위의 분포를 조사하였다. Monte Carlo Simulation을 100,000번 수행하였으며 그 결과는 Fig 7과 같다. 정규분포의 확률지를 이용하여 Matrix Structure 끝단 변위의

분포가 정규분포에 가까운 것을 확인하였다.(Fig 8)

Fig 7. 변위 분포도

Fig 8. 정규분포 확률지(변위)

확률변수와 Matrix Structure 끝단 변위와의 관계를 조사해 본 결과 Shear Modulus를 제외하고는 각 확률변수 변동에 따라 Matrix Structure 끝단 변위는 거의 선형적인 관계를 갖는 것을 확인하였다. 표 3에서 가정한 평균 및 표준편차를 기준으로 각 확률변수에 대해 $\mu-3\sigma$, $\mu-2\sigma$, $\mu-\sigma$, μ , $\mu+\sigma$, $\mu+2\sigma$, $\mu+3\sigma$ 를 X축으로 설정하고 Matrix Structure 끝단의 변위(평균값에 대한 변위를 기준으로 Normalize 하였을 때,)를 도식화했을 때, Fig 9와 같다.

Fig 9. 민감도

Fig 9에서 비교적 큰 민감도를 갖는 확률변수 (E, T1, Load)와 비교적 작은 민감도를 갖는 확률변수(G, A1, A2, A3, A4, A5, T2, T3)를 분리하여 도식화 했을 때, Fig 10, 11과 같으며 확률변수 G에 대한 Matrix Structure 끝단의 변위가 다른 확률변수에 비해 비선형적인 것을 볼 수 있다.

Fig 10. 민감도(E, T1, Load)

Fig 11. 민감도(E, T1, Load 제외)

확률변수 G에 대한 비선형성은 존재하지만, 확률변수 E, T1, Load에 비해 상대적으로 Matrix Structure 끝단 변위에 주는 영향력이 작은 것을 확인할 수 있다. 따라서, Matrix Structure 끝단 변위 신뢰도 해석을 위한 방법으로 개선된 일계 이차모멘트법을 활용하였다.

Matrix Structure 끝단의 변위가 0.6 in 보다 클 때를 Fail로 가정하고 신뢰도를 계산하였다. 신뢰도 계산에 사용된 개선된 일계이차모멘트법은 Rackwitz가 제시한 알고리즘[1]을 적용하였으며 그 결과는 표 4와 같다. 한계상태식이 정규분포라는 가정하에 신뢰도 지수로부터 파손확률을 계산하면 약 4.65%를 얻을 수 있다.

표 4. 신뢰도 해석 결과(AFORM)

순번	확률 변수	Reduced Coordinate	Original Coordinate
1	E	-0.96001	9,711,997
2	G	0.12475	3,764,034
3	A1	-0.07174	0.1571
4	A2	-0.12781	0.2913
5	A3	-0.06880	0.3146
6	A4	-0.00007	0.3800
7	A5	-0.00248	0.7364
8	T1	-0.55167	0.0613
9	T2	-0.10832	0.0398
10	T3	0.00058	0.0400
11	Load	1.24172	106
신뢰도 지수(β)			1.68
파손확률(%)			4.65

표 2의 Reduced Coordinate는 각 확률변수를 식 4와 같이 표준정규분포로 변환했을 때, X' 의 좌표값이며 Original Coordinate는 X 의 좌표값이다.

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

where.

X_i : 확률변수

μ_{X_i} : 확률변수 X_i 의 평균

σ_{X_i} : 확률변수 X_i 의 표준편차

Fig 12. AFORM 수행 결과

신뢰도 해석 결과 중 Reduced Coordinate에서 수렴한 각 확률변수 크기를 분석하면 Fig 12와 같다. 큰 값을 갖는 확률변수는 민감도 분석 결과(Fig 9 ~ 11)에서도 큰 값을 갖는 것을 확인할

수 있다. Rackwitz의 알고리즘은 한계상태식의 민감도값을 이용하여 반복적인 과정을 통해 신뢰도 지수값을 찾으므로, 민감도값이 큰 확률변수의 수렴값이 다른 확률변수 수렴값에 비해 큰 것을 알 수 있다.

AFORM 결과와 비교하기 위해서 몬테칼로시물레이션 및 일계이차모멘트법(SORM)을 수행하였으며 그 결과는 표 5과 같다.

표 5. SORM 및 몬테칼로시물레이션 결과

	신뢰도 지수	비고
AFORM	1.68	
SORM	1.68	Breitung 방법
몬테칼로시물레이션	1.68~1.71	* 100,000번 수행 * 5% 유의수준

몬테칼로시물레이션 100,000번 수행 결과 5% 유의수준에서 파손확률은 4.38 ~ 4.64 % 이며 이를 신뢰도 지수값으로 환산하면 1.68 ~ 1.71이다. SORM의 신뢰도 지수값은 1.68로 파손확률은 AFORM의 값과 같다.

민감도 분석결과(Fig 9 ~ 11)에서 알 수 있듯이 Matrix Structure 끝단의 변위는 신뢰도 지수를 결정하는 주요 확률변수와 선형관계에 있으므로, SORM과 AFORM의 결과가 같은 것을 확인할 수 있다. AFORM 결과는 5% 유의수준에서 몬테칼로시물레이션결과 범위 내에 포함되는 것을 확인할 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 항공기 날개 특성을 반영한 Matrix Structure 변위 신뢰도 해석을 수행하였다. 재료물성치(Elastic Modulus, Shear Modulus), 부속 구조물의 형상(두께, 단면적), 하중의 불확실성을 확률변수로 두고 Matrix Structure 끝단의 수직 변위가 일정한 값보다 큰 경우에 대한 확률을 계산하였다.

확률변수와 Matrix Structure 끝단 변위의 선형적인 관계를 확인하고 AFORM을 통해 신뢰도를 계산하였으며, SORM, 몬테칼로시물레이션 결과와 비교하였다.

Matrix Structure의 신뢰도 해석을 통해

AFORM이 항공기 날개 변위 신뢰도 예측에 활용될 수 있는 가능성을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] Achintya Haldar and Sankaran Mahadevan, "Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, INC.
- [2] Achintya Haldar and Sankaran Mahadevan, "Probability, Reliability and Statistical Method in Engineering Design", John Wiley & Sons, INC.
- [3] 양영순, 서용석, 이재욱, "구조 신뢰성 공학", 서울대학교 출판부
- [4] Richard H. Gallagher, Ivan Rattinger and John S. Archer, "A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis", Pergamon Press