비정합 불확실성을 갖는 시스템을 위한 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계

Integral Sliding Mode Controller Design for Unmatched Uncertain Systems

최 한 호*

(Han Ho Choi¹)

¹Dongguk Univ. - Seoul

Abstract: This paper presents an LMI-based method to design an integral sliding mode controller for a class of uncertain systems with unmatched uncertainties. The uncertain system under consideration may have unmatched parameter uncertainties in the state matrix as well as in the input matrix. Using LMIs an existence condition of a sliding surface is derived. And a switching feedback control law is given. Finally, numerical examples are given to show that the proposed method can be better than the existing results for some cases.

Keywords: LMI (Linear Matrix Inequality), uncertain system, sliding mode

I. 서론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성의 높 크기가 알려진 시스템을 위한 강인한 폐환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다[1-6]. 최근에 [7]에서는 리칭모드가 존재하지 않고 시작시간부터 슬라이딩 모드가 존재하는 적분 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법이 제시되었다. 그리고 [8], [11]에서는 비정합 불확실성이 존재하는 시스템으로 확장하였다. 본 논문에서는 [7,8,11]의 결과를 보조하고 대체할 수도 있는 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안한다. [8,11]에서처럼 비정합 불확실성이 존재하는 시스템을 대상으로 슬라이딩 평면이 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하고 스위칭 폐환 제어기를 제시한다. 마지막으로 기존 방법들에서 제시된 조건식들은 해를 주지 않아 적용할 수 없는 경우의 시스템에도 본 논문에서 제안하는 방법은 적용할 수 있어 기존 방법을 보조하고 대체할 수 있음을 보이기 위해 설계 예들을 제시하고 기존 방법들과 비교한다.

II. 대상 시스템

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다.

$$\dot{x} = [A + DF_A(t)]x + [B + EF_B(t)][u + f(t)] \quad (1)$$

여기에서 $x \in R^n$, $u \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며 $DF_A(t)$ 는 시스템행렬의 불확실성, $EF_B(t)$ 는 입력행렬의 불확실성, $f \in R^m$ 은 외란입력으로 다음을 만족시킨다고 가정한다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 3. 11., 수정: 2011. 4. 19., 채택확정: 2011. 5. 3.

최한호: 동국대학교 서울 전자전기공학부(hhchoi@dongguk.edu)

A1: (A, B) 로 안정가능하다.

A2: $\text{rank}(B) = m < n$

A3: $\|F_A(t)\| \leq 1, \|F_B(t)\| \leq 1$

A4: $\|f(t)\| \leq \rho_f(t)$ 를 만족하며 $\rho_f(t)$ 는 알려져 있다.

A5: $\|(B^T B)^{-1} B^T E\| < 1$ 를 만족시킨다.

기존의 [8]과 [11]에서는 $D = \rho_A I$, $E = \rho_B I$ 의 형태로 하여 본 논문에서 고려하는 시스템이 [8]과 [11]에서 다른 시스템을 포괄함에 유의해야 한다. 가정 A5는 III장에서 보듯이 유일한 등가제어입력의 존재를 위해 필요한 가정으로 유사한 가정들이 이전의 슬라이딩 모드 제어기 설계 관련 논문들에서 사용되었음에 유의해야 한다.

III. 주요 결과

다음 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} AX - BY + * & * & * & * & * & 0 \\ \gamma \phi E^T \Phi \Phi^T & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & -\gamma I & * & 0 & 0 \\ \tau D^T \Phi \Phi^T & 0 & \tau D^T B_g^T & -\tau I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

여기에서 $X \in R^{n \times n}$, $Y \in R^{m \times n}$, $\gamma \in R$, $\tau \in R$ 는 결정변수이며 $*$ 는 행렬의 대칭성에 의해 구해질 수 있는 블록행렬을 의미하고, $\phi = 1/(1 - \psi)$, $\psi = \|B_g E\|$, $B_g = (B^T B)^{-1} B^T$ 이며 Φ 는 $B^T \Phi = 0$, $\Phi^T \Phi = I$ 를 만족시키는 임의의 $n \times (n - m)$ 행렬이다. 그러면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)을 고려하자. LMI (2)를 만족시키는 해 X, Y, γ, τ 가 존재한다고 가정하고 다음의 스위칭 제어기를 고려하자.

$$u = -Kx - \rho(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (3)$$

여기에서 슬라이딩 평면은 다음처럼 정의된다.

$$\sigma = B_g x + z \quad (4)$$

$z \in R^m$ 은 다음의 동역학을 만족하며

$$\dot{z} = -B_g A x + K \dot{x}, \quad z(0) = -B_g x(0) \quad (5)$$

$\rho(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\rho(t) = \frac{1}{1-\psi} [(\|B_g D\| + \psi \|K\|) \|x\| + (1+\psi) \rho_f(t) + \epsilon] \quad (6)$$

그리고 $\epsilon > 0$, $K = YX^{-1}$, $\psi = \|B_g E\|$ 을 만족시킨다. 그러면 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 처음부터 즉 $t=0$ 에서부터 시작된다.

증명: 슬라이딩 모드 동역학의 안정성을 보이기 위해 먼저 [1,2]에서의 방법을 사용하여 등가입력을 구하고 이를 이용하여 슬라이딩 모드 동역학을 구하고 리아푸노프 정리를 이용하여 안정함을 보이겠다. 가정 A5는 $1 > \|B_g E\| = \psi$ 를 뜻한다. 그러므로 A3를 이용하여 다음을 알 수 있다.

$$\|B_g E F_B(t)\| \leq \|B_g E\| = \psi < 1$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

$$\|I + B_g E F_B(t)\| \geq 1 - \psi > 0 \quad (7)$$

이는 $\|F_B(t)\| \leq 1$ 를 만족시키는 불확실성에 대하여 $I + B_g E F_B(t)$ 가 0이 되는 경우가 없음을 의미한다. 즉 역행렬이 존재하는 것을 보장한다. (1), (4), (5)를 이용하여 다음 동역학을 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = B_g D F_A(t)x + [I + B_g E F_B(t)][u + f(t)] + K \dot{x} \quad (8)$$

결국 [1,2]를 참조하여 $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ 으로 하여 (8)식으로부터 다음의 등가입력을 구할 수 있다.

$$u_{eq} = -f(t) - [I + B_g E F_B(t)]^{-1} [B_g D F_A(t) + K]x \quad (9)$$

(1)식에 (9)의 등가입력을 대입하여 다음과 같은 n 차의 슬라이딩 모드 동역학을 구할 수 있다.

$$\dot{x} = [A + D F_A(t)]x - [B + E F_B(t)][I + B_g E F_B(t)]^{-1} [B_g D F_A(t) + K]x \quad (10)$$

$B B_g + \Phi \Phi^T = I$ 를 이용하여 다음을 구할 수 있다.

$$B + E F_B(t) = B[I + B_g E F_B(t)] + \Phi \Phi^T E F_B(t) \quad (11)$$

결국 (11)을 이용하여 (10)을 정리하여 다음과 같은 슬라이딩 모드 동역학식을 구할 수 있다.

$$\dot{x} = A_1(t)x + A_2(t)x \quad (12)$$

여기에서 $A_1(t)$, $A_2(t)$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A + \Phi \Phi^T D F_A(t) - B K, \\ A_2(t) &= -\Phi \Phi^T E F_B(t) [I + B_g E F_B(t)]^{-1} [B_g D F_A(t) + K] \end{aligned} \quad (13)$$

(12)의 동역학식은 다음을 만족시키는 리아푸노프 행렬 $P > 0$ 가 존재하면 안정하다.

$$A_1(t)P + A_2(t)P + * < 0 \quad (14)$$

한편 (7)식은 다음을 의미한다.

$$\|I + B_g E F_B(t)\|^{-1} \leq \frac{1}{1-\psi} = \phi \quad (15)$$

(15)를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A_2(t)P + * &\leq \gamma \phi^2 \Phi \Phi^T E E^T \Phi \Phi^T \\ &+ \frac{1}{\gamma} X [B_g D F_A(t) + K]^T [B_g D F_A(t) + K] X \end{aligned} \quad (16)$$

위의 식과 [9]의 Schur complement 보조정리를 이용하여 다음이 성립하면 (14)식이 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} AP - BKP + * & * & * \\ -\gamma \phi E^T \Phi \Phi^T & -\gamma I & 0 \\ KP & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \Phi \Phi^T D \\ 0 \\ B_g D \end{bmatrix} F_A(t) \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + * < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

보조정리 1과 가정 A3를 이용하여 다음이 성립하면 (17)가 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} AP - BKP + * & * & * \\ -\gamma \phi E^T \Phi \Phi^T & -\gamma I & 0 \\ KP & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &+ \tau \begin{bmatrix} \Phi \Phi^T D \\ 0 \\ B_g D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \Phi^T D \\ 0 \\ B_g D \end{bmatrix}^T + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + * < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

결국 (18)과 [9]의 Schur complement 보조정리를 이용하여 (2)가 성립하면 $P = X$, $K = YX^{-1}$ 에 의해 만족됨을 알 수 있다. 즉 (10)이 안정함을 의미한다.

$t=0$ 에서부터 슬라이딩모드가 존재함을 보이기 위해 $\sigma(0)=0$ 이며 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 이 아닌 σ 에 대하여 성립함을 보이기만 하면 된다. (4)와 (5)는 $\sigma(0)=0$ 을 의미하므로 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 만 보이면 된다. (8)식에 스위칭 입력 (3)을 대입하고 가정 3과 $1 > \|B_g E\| = \psi$ 를 이용하여 $\sigma^T \dot{\sigma} \leq -\epsilon \|\sigma\|$ 를 얻을 수 있다. 결국 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 $t=0$ 에서부터 시작됨을 알 수 있다.

주 1: [9]의 101페이지에 주어진 결과를 이용하면 (A, B) 쌍이 안정가능하지 않으면 (2)의 1행1열에 위치하는 블록식인 다음 LMI의 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

$$AX - BY + * < 0$$

이는 결국 (A, B) 쌍이 안정가능하지 않으면 LMI (2)의 해가 존재하지 않음을 의미한다.

주 2: [8]의 방법은 $n(n+1)/2 + 5$ 개의 LMI 최적화 변수를 요구하고 [11]의 방법은 $n(n+1)/2 + nm + 1$ 개의 최적화 변수를 요구하며 본 논문에서 제안된 방법은 $n(n+1)/2 + nm + 2$ 개의 최적화 변수를 요구해 저차의 경우에는 계산량에서 별 차이가 없지만 $n \cdot m \gg 4$ 인 경우에

계산량에 있어서 [8]의 방법이 훨씬 유리하고 [11]과 본 논문의 방법이 비슷하다. 보수성에서는 아래 예제에서 보여진 것과 같이 본 논문에서 제안된 방법이 가장 우월하다.

IV. 수치적 예

[10,11]에서 다루어진 F4E 팬텀 전투기의 5000피트에서의 동역학 모델을 고려해보자. 다음의 데이터로 표현될 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix} \quad (19)$$

[10,11]에서처럼 $DF_A(t), EF_B(t), f(t)$ 가 다음처럼 주어진다 고 가정하자.

$$DF_A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, EF_B(t) = \begin{bmatrix} p_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, f(t) = 0 \quad (20)$$

여기에서 p_i 는 불확실한 매개변수로 $|p_1| \leq k_1, |p_2| \leq k_2, |p_3| \leq k_3$ 을 만족한다. 위의 시스템에 대하여 기존의 [1-7]의 방법들은 적용이 불가능함에 유의해야 한다. (20)은 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_A(t) = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2}{k_2} & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F_B(t) = \frac{p_3}{k_3} \quad (21)$$

k_i 가 $k_1 = k_2 = 2, k_3 = 5$ 로 주어진다고 하자. 이들을 이용해 (2)를 풀어 다음의 이득 행렬과 제어기를 얻을 수 있다.

$$u = [2.951, 8.846, 5.208]x - (0.524\|x\| + 1) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (22)$$

여기에서 σ, z 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma &= [-0.009, 0, 0.003]x + z \\ \dot{z} &= [-2.96, -8.68, -4.22]x, \\ z(0) &= [0.009, 0, -0.003]x(0) \end{aligned}$$

초기값은 $x(0) = [0, 1, 0]^T$ 이고 $p_1 = k_1 \sin 10t, p_2 = k_2 \sin 20t, p_3 = k_3 \sin 30t$ 이라고 가정하였다. 그림 1은 (22)를 사용한 경우 응답을 보여주고 있다. 한편 (20)에 주어진 불확실성의 놈 경계치들이 다음을 만족시킴을 쉽게 알 수 있다.

$$\|DF_A(t)\| \leq \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 2.8284, \|EF_B(t)\| \leq k_3 = 5$$

그러므로 $\rho_A = 2.8284, \rho_B = 5$ 로 놓고 기존의 방법 [8]과 [11]을 적용할 수도 있을 것이다. 그러나 [8]과 [11]에서 주어진 조건식들은 해가 존재하지 않았다. 결국 [8]과 [11]은 위의 시스템이 불확실성의 경계치가 너무 커서 적용이 불가능하다. 이는 그림 2를 통해서 확인할 수 있다. $\rho_A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \rho_B = k_3$ 로 하여 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 (19)에 주어진 데이터가 해를 줄 ρ_A, ρ_B 의 범위를 구한 것이 그림 2의 맨 위에 주어졌다. 비교를 위해 [8,11]

의 방법에 따라 구한 범위도 그림 2에 표시하였다.

[8]에서 다루어졌던 다음의 시스템을 고려해보자.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

그리고 $DF_A(t), EF_B(t)$ 가 다음처럼 주어진다고 가정하자.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_A(t) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F_B(t) = q_2 \quad (24)$$

여기에서 $|q_1| \leq 1, |q_2| \leq 1, h_1 = 2, h_2 = 0.2$ 를 만족한다. 이들 자료를 이용하여 LMI (2)를 풀어 다음의 이득 행렬과 제어기를 얻을 수 있다.

그림 1. (19)에 대한 시뮬레이션 결과. (위) x , (가운데) σ , (아래)

u .

Fig. 1. Simulation results for (19). (Top) x , (Middle) σ , (Bottom)

u .

그림 2. (19)에서 해가 존재하는 범위. (위) 제안된 방법, (가운데) [11]의 방법, (아래) [8]의 방법.

Fig. 2. Feasible region for (19). (Top) proposed method, (Middle) Choi [11], (Bottom) Choi [8].

$$u = -[6.347 \quad 33.61 \quad 12.64]x - \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (25)$$

여기에서 σ, z 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma &= [0, \quad 0, \quad 1]x + z \\ \dot{z} &= [6.347 \quad 33.61 \quad 12.64]x, \quad z(0) = [0, 0, -1]x(0) \end{aligned}$$

초기값은 $x(0) = [0, 1, 0]^T$ 이고 $q_1 = \sin 10t$, $q_2 = \sin 20t$ 이라고 가정하였다. 그림 3은 (25)를 사용하였을 경우 응답을 보여주고 있다. LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 $\rho_A = \sqrt{2}|h_1| = \|D\|$, $\rho_B = |h_2| = \|E\|$ 로 하여 (23)에 주어진 데이터가 해를 줄 ρ_A, ρ_B 의 범위를 구한 것이 그림 4의 맨 위에 주어졌다. 비교를 위해 [8,11]의 방법에 따라 구한 범위도 그림 4에 도시하였다.

그림 3. (23)에 대한 시뮬레이션 결과. (위) x , (가운데) σ , (아래)

u .

Fig. 3. Simulation results for (23). (Top) x , (Middle) σ , (Bottom)

u .

그림 4. (23)에서 해가 존재하는 범위. (위) 제안된 방법, (가운데) [11]의 방법, (아래) [8]의 방법.

Fig. 4. Feasible region for (23). (Top) proposed method, (Middle) Choi [11], (Bottom) Choi [8].

V. 결론

본 논문에서는 이전의 결과를 보조하고 대체할 수 있는 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안하였다. 수치적인 예를 제시하여 보조하고 대체할 수 있음을 보였다.

참고문헌

- [1] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *IEEE Proceedings*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, Mar. 1988.
- [2] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, Feb. 1977.
- [3] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 40, no. 10, pp. 1761-1769, Oct. 2004.
- [4] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, "Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 1, pp. 115-119, Jan. 2001.
- [5] H. H. Choi, "An improved existence condition of linear sliding surfaces," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 13, no. 9, pp. 851-855, Sep. 2007.
- [6] H. H. Choi, "An LMI-based design of reduced order observers substitutable for full order sliding mode observers," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 3, pp. 232-235, Mar. 2008.
- [7] J. Ackermann and V. I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann's formula," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 234-237, Feb. 1998.
- [8] H. H. Choi, "LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 4, pp. 736-742, Apr. 2007.
- [9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory*, Philadelphia, SIAM, 1994.
- [10] U. Shaked "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 5, pp. 866-872, May 2003.
- [11] H. H. Choi, "LMI-based design of integral sliding mode controllers for mismatched uncertain systems," *Transactions of Korea Institute of Electrical Engineers*, vol. 59, no. 8, pp. 1441-1443, 2010.

최 한 호

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제13권 제9호 참조