소수계량함수

이 상 운* · 최 명 복**

The Prime Counting Function

Sang-Un, Lee* · Myeong-Bok, Choi**

요 약

리만의 제타함수 $\zeta(s)$ 는 주어진 수 x 보다 작은 소수의 개수 $\pi(x)$ 를 구하는 해답으로 알려져 있으며, 소수정리에서 지금까지 리만의 제타 함수 이외에 $\frac{x}{\ln x}$, $Li(x)$ 와 $R(x)$ 의 근사치 함수가 제안되었다. 여기서 $\pi(x)$ 와의 오차는 $R(x) < Li(x) < \frac{x}{\ln x}$ 이다. 로그적분함수 $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$, $\sim \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k} = \frac{x}{\ln x} (1 + \frac{1!}{(\ln x)^1} + \frac{2!}{(\ln x)^2} + \dots)$ 이다. 본 논문은 $\pi(x)$ 는 유한급수 $Li(x)$ 로 표현됨을 보이며, 일반화된 $\sqrt{\alpha x} \pm \beta$ 의 소수계량함수를 제안한다. 첫 번째로, $\pi(x)$ 는 $0 \leq t \leq 2k$ 의 유한급수인 $Li_3(x) = \frac{x}{\ln x} (\sum_{i=0}^{\alpha} \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta)$ 와 $Li_4(x) = \lfloor \frac{x}{\ln x} (1 + \alpha \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta) \rfloor$, $k \geq 2$ 함수로 표현됨을 보였다. $Li_3(x)$ 는 $\pi(x) \simeq Li_3(x)$ 가 되도록 α 값을 구하고 오차를 보정하는 β 값을 갖도록 조정하였다. 이 결과 $x = 10^k$ 에 대해 $Li_3(x) = Li_4(x) = \pi(x)$ 를 얻었다. 일반화된 함수로 $\pi(x) = \sqrt{\alpha x} \pm \beta$ 를 제안하였다. 제안된 $\pi(x) = \sqrt{\alpha x} \pm \beta$ 함수는 리만의 제타함수에 비해 소수를 월등히 계량할 수 있었다.

▶ Keywords : 소수 정리, 소수계량함수, 리만 제타함수, 자연로그함수, 음셈 로그적분함수

Abstract

The Riemann's zeta function $\zeta(s)$ has been known as answer for a number of primes $\pi(x)$ less than given number x . In prime number theorem, there are another approximation function $\frac{x}{\ln x}$, $Li(x)$, and $R(x)$. The error about $\pi(x)$ is $R(x) < Li(x) < \frac{x}{\ln x}$. The logarithmic integral function is $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \sim \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k} = \frac{x}{\ln x} (1 + \frac{1!}{(\ln x)^1} + \frac{2!}{(\ln x)^2} + \dots)$. This paper shows that the $\pi(x)$ can be represent with finite $Li(x)$, and presents generalized prime counting function $\sqrt{\alpha x} \pm \beta$. Firstly, the $\pi(x)$ can be represent to $Li_3(x) = \frac{x}{\ln x} (\sum_{i=0}^{\alpha} \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta)$ and $Li_4(x) = \lfloor \frac{x}{\ln x} (1 + \alpha \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta) \rfloor$ $k \geq 2$ such that $0 \leq t \leq 2k$. Then, $Li_3(x)$ is adjusted by $\pi(x) \simeq Li_3(x)$ with α and error compensation value β . As a results, this paper get the

• 제1저자 : 이상운*, 교신저자 : 최명복**

• 투고일 : 2011. 05. 13, 심사일 : 2011. 06. 08, 게재확정일 : 2011. 07. 25.

*, ** 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University)

$Li_3(x) = Li_4(x) = \pi(x)$ for $x = 10^k$. Then, this paper suggests a generalized function $\pi(x) = \sqrt{\alpha x} \pm \beta$. The $\pi(x) = \sqrt{\alpha x} \pm \beta$ function superior than Riemann's zeta function in representation of prime counting.

▶ Keywords : prime number theorem, Riemann zeta function, natural logarithmic function, offset logarithmic integral function

I. 서론

1과 자신 이외의 어떤 수로도 나눌 수 없는 수, 즉 소수 (prime number)는 암호체계 (cryptograph)에 널리 활용되고 있다[1]. RSA 암호체계의 공개키 $n = pq$ 를 생성하기 위해서는 2개 소수 p, q 를 임의로 선택하여 곱한 결과를 쉽게 얻는다. 이 합성수 n 을 반소수 (semiprime)라고도 한다. 여기서 임의로 선택한 p, q 가 소수인지 여부는 소수 판별법 (primality test, PT)을 적용한다. 또한, RSA 암호 해독은 반소수 n 을 p, q 로 소인수분해해야 하지만 쉽지가 않다. 따라서 공개키를 만들기는 쉬운 반면에 역으로 이를 해독하는 소인수 분해는 어렵다는데 기반하여 RSA 암호체계가 개발되었으며, 이를 일방향함수 (one-way function)라고도 한다.

고대 그리스의 에라토스테네스 (BC. 278 ~ BC. 195)가 소수를 구하는 방법인 에라토스테네스 체 (Sieve of Eratosthenes)를 처음으로 제시하였다[2]. 이 방법은 $[2, n]$ 의 자연수를 나열하고 $[2, \sqrt{n}]$ 에 대해 배수를 삭제하면 남은 수가 n 보다 작은 소수의 개수이다. 이후 1859년에 리만은 “주어진 수 n 보다 작은 소수의 개수에 관하여”란 논문에서 제타 함수 (zeta function)를 제안하고 2, 3, 5, 7, ...의 소수들은 어떤 불규칙한 배열 패턴을 지니고 있는데도 불구하고 $\zeta(0)$ 의 직선상에 존재한다고 제시하였다[3]. 리만 가설이란 “ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ 의 복소수 자명하지 않은 근 $s = a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$)의 실수부 a, b 는 모두 $\frac{1}{2}$ 이다.”[4]. 소수의 분포 패턴을 하나의 함수로 제시한

리만 가설이후 150년 동안 리만 가설은 증명되지 못하고 있다. 리만 가설을 증명할 수 있다면 클레이 수학재단 (Clay Mathematics Institute)에서 제시한 상금 \$1,000,000를 획득할 수 있다.

소수의 정확한 규칙 (분포 패턴)은 지금까지 밝혀지지 않고 있다. 소수 정리 (prime number theorem)는 소수의 근사적인 분포에 관한 정리로 소수가 어떻게 분포되어 있는

지를 개략적으로 표현해준다[1]. 지금까지 알려진 소수의 정리는 주어진 수 x 보다 작은 소수의 개수를 소수계량함수

(prime-counting function) $\pi(x)$ 라 할 때 $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ 라는 소수분포의 근사적 법칙이다. 또한 Gauss는 오프셋 로그 적분 함수 (offset logarithmic integral function)

$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \sim \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k}$ 를 제시하였다. 리만

가설은 $\pi(x) \sim Li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln x} dx$ 를 고찰하기 위해 $\zeta(s)$

와 리만 소수계량함수 $R(x)$ 를 제안하였다. $\pi(x)$ 와의 오

차는 $R(e) < Li(x) < \frac{x}{\ln x}$ 형태를 나타내고 있으며, $R(x)$

가 $\pi(x)$ 에 가장 근사한 값을 얻고 있다[1, 5]. 그러나 아직까지도 $\pi(x)$ 의 정확한 값을 추정하는 함수는 제시되지 않고 있다.

소수 정리의 증명은 리만 제타함수에 대해 복소해석법을 사용하는 방법을 해석적 증명 (analytic proof), 복소해석법을 사용하지 않고 증명하는 방법을 초등적 증명 (elementary proof)이라 한다[5]. 대부분의 수학자들은 오랫동안 복소해석학을 사용하지 않고 소수정리를 증명할 방법이 없다고 생각하였다.

본 논문의 초점은 “소수 정리 $\pi(x)$ 를 구하는데 있어서 리만 제타함수 $\zeta(s)$ 이외에 어떠한 다른 함수가 존재하는가?”이다. 2장에서는 소수 정리와 관련된 연구를 고찰한다. 3장에서는 $\pi(x)$ 를 근사적으로 표현하지 않고 정확히 표현하는 함수를 제시한다.

II. 소수정리 관련 연구

$\pi(x)$ 의 정확한 값은 전수탐색 (Exhaustive or Brute-Force Search) 방법으로 $2^p - 1$ 회, 즉 $O(2^p)$ 를 수행해야 하며, 포함-배제 원칙 (inclusive-exclusive principle)을 적용하여 식 (1)로 구할 수 있으나 이는 하노이 타워 (Hanoi Tower)의 수행횟수와 동일하여 비현실적이다. 포함-배제 원칙을 변형시킨 소수계량함수로는 Legendre, Lehmer, Mapes와

Meissel 공식이 있다[5].

$$\pi(x) = [(x-1) + |p_i| - \sum \left\lfloor \frac{x}{p_i} \right\rfloor + \sum \left\lfloor \frac{x}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum \left\lfloor \frac{x}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \sum \left\lfloor \frac{x}{p_i p_j p_k p_l} \right\rfloor - \dots] \quad (1)$$

예로, $x = 100$ 에 대해 고찰해 보자.

$$x = 100, \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10, p = 2, 3, 5, 7, |p| = 4, 2^4 - 1 = 15$$

회

x	x/p	x/pq	x/pqr	$x/pqrs$
2	100/2=50	2*3=6: 100/6=16	2*3*5=30: 100/30=3	2*3*5*7=210: 0
3	100/3=33	2*5=10: 100/10=10	2*3*7=42: 100/42=2	
5	100/5=20	2*7=14: 100/14=7	2*5*7=70: 100/70=1	
7	100/7=14	3*5=15: 100/15=6	3*5*7=105: x	
		3*7=21: 100/21=4		
		5*7=35: 100/35=2		
4	117	45	6	0

$$\pi(x) = (99+4) - 117 + 45 - 6 = (103 - 117 + 39) = (-14 + 39) = 25$$

주어진 수 x 보다 작은 소수의 개수 $\pi(x)$ 에 관한 소수 정리는 $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ 라는 소수분포의 점근적 법칙이다. 이 소수 분포에 대해 1796년에 Legendre는 $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - B}$, $B = 1.08366$ 의 변형을 제시하였다[6]. 또한 Gauss는 보다 좋은 근사 공식으로 $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$ 를 제시하였으며, 근사적 확장을 하면 식 (2)가 된다[1,7].

$$Li(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k} = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1!}{(\ln x)^1} + \frac{2!}{(\ln x)^2} + \frac{3!}{(\ln x)^3} + \dots \right) \quad (2)$$

식 (2)는 $\pi(x)$ 를 잘 표현하는 반면에, 이 식도 무한급수 형태로 계산은 쉽지 않다.

리만의 제타함수 값 $\zeta(0)$ 이 되는 변수들은 직선상에 존재한다. 제타함수와 소수를 연관시킨 방법은 오일러가 식 (3)을 제안하였다[1,8]. 이 함수는 임의로 선택한 정수들 s 가 서로소(coprime)일 확률을 계산하는데 사용된다. 직관적으로 소수 p 로 나누어질 수 있는 어떤 수의 확률은 p^{-1} 이다. 따라서 정수들 s 가 이 소수로 나누어질 수 있는 확률은 p^{-s} , 나누어질 수 없는 확률은 $1 - p^{-s}$ 이다.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \left(\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \right)^{-1} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots \quad (3)$$

식 (3)을 만족시키려면 무한급수로 존재하는 모든 소수에 대해 계산해야한다.

$$\begin{aligned} \text{리만의 소수계량함수 } R(x) \text{는} \\ R(x) = Li(x) - \sum_p Li(x^p) - \ln(2) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\ln t} dt = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mu(n) Li(x^{\frac{1}{n}}) \sim \end{aligned}$$

$$Li(x) - \frac{1}{2} Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} Li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5} Li(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6} Li(x^{\frac{1}{6}}) -$$

$\frac{1}{7} Li(x^{\frac{1}{7}}) + \dots$ 로 알려져 있다. 여기서, ρ 는 리만 제타함수 $\zeta(s)$ 의 모든 자명하지 않은 0 값 ρ 를 모두 합한 값이며, $\mu(n)$ 은 Möbius 함수이다.

Wikipedia[1]와 Mathworld[5]에서 제시한 $\pi(x)$ 와 $\frac{x}{\ln x}$, $Li(x)$, $R(x)$ 에 대해 $\pi(x)$ 와의 오차는 표 1에 제시되어 있다.

<표 1>의 데이터와 Legendre와 유사한 공식을 적용하여 $\pi(x)$ 와의 오차를 계산하였다. 그 결과 $R(x) < Li(x) < \frac{x}{\ln x - 1.0297} < \frac{x}{0.98074 \ln x} < \frac{x}{\ln x - 1.08366} < \frac{1.00001x}{\ln x} < \frac{x}{\ln x}$ 를 보였다. 즉, $\frac{x}{\ln x}$ 는 $\pi(x)$ 보다 적은 값을, $Li(x)$ 는 $\pi(x)$ 를 초과한 값을 보이고 있다. 반면에 $R(x)$ 가 $\pi(x)$ 에 가장 근사한 값을 얻고 있다. 결국, $\pi(x)$ 를 정확히 표현하는 공식은 아직 제시되지 않고 있다.

10^k 단위로 소수의 개수를 구한 <표 1>을 선택한 이유는 RSA 수 $n = pq$ 의 경우, n 의 자리수 $l(n) = \text{짝수}$ 라면 $l(p) = l(q) = l(n)/2$ 이므로 p, q 는 동일한 10^k 범위에서 임의로 선택한 소수가 되기 때문이다. 예로, $1933 \times 9419 = 18206927$ 인 경우 $l(n) = 8$, $l(p) = l(q) = 4$ 이다. 즉, p, q 는 $10^4 = [1001, 9999]$ 에서 선택되었다.

Wikipedia[1]가 제시한 <표 1>의 $Li(x)$ 로 계산한 값에 문제가 있다. 식 (3)에 의거 $Li(x) = \frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{t!}{(\ln x)^t} \right) =$

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1!}{(\ln x)^1} + \frac{2!}{(\ln x)^2} + \frac{3!}{(\ln x)^3} + \dots \right) \text{이다.}$$

$$x = 10 \text{인 경우 } \pi(x) = 4 \text{이다. 이 경우 } \frac{x}{\ln x} = 4.3429,$$

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1!}{\ln x} \right) = 6.2291, \frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^2 \frac{t!}{(\ln x)^t} = 7.8673, \frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^3$$

$\frac{t!}{(\ln x)^t} = 10.0018$, $\frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^4 \frac{t!}{(\ln x)^t} = 13.7097$ 로 발산하며, $t=3$ 일 때 $\pi(x)$ 는 x 값을 초과한다. $x=100$ 에 대해서도 동일한 결과가 발생한다. 결국, $Li(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t!}{(\ln x)^t}$ 가 성립하지 않아 $Li(x)$ 를 소수계량함수로 사용할 수 없다.

표 1. $\pi(x)$, $\frac{x}{\ln x} - \pi(x)$, $Li(x) - \pi(x)$, $R(x) - \pi(x)$ Table 1. $\pi(x)$, $\frac{x}{\ln x} - \pi(x)$, $Li(x) - \pi(x)$, $R(x) - \pi(x)$

x (10^k)	$\pi(x)$	오차		
		$\left[\frac{x}{\ln x} \right]$	$Li(x)$	$R(x)$
10^1	4	0	2	-1
10^2	25	-3	5	-1
10^3	168	-23	10	0
10^4	1,229	-143	17	-2
10^5	9,592	-906	38	5
10^6	78,498	-6,116	130	-29
10^7	684,579	-44,158	339	-88
10^8	5,761,455	-332,774	754	-97
10^9	50,847,534	-2,592,592	1,701	79
10^{10}	455,052,511	-20,758,029	3,104	1,828
10^{11}	4,118,054,813	-169,923,159	11,588	2,318
10^{12}	37,607,912,018	-1,416,705,193	38,263	1,476
10^{13}	346,065,536,839	-11,992,858,452	108,971	5,773
10^{14}	3,204,941,750,802	-102,838,308,636	314,880	19,200
10^{15}	29,844,570,422,669	-891,604,962,452	1,032,619	-73,218
10^{16}	279,238,341,033,925	-7,804,289,844,393	3,214,632	-327,052
10^{17}	2,623,557,157,654,233	-68,883,734,693,281	7,966,589	598,255
10^{18}	24,739,954,287,740,860	-612,483,070,893,536	21,949,555	3,501,366
10^{19}	234,057,667,276,344,607	-5,481,624,169,369,960	99,877,775	-23,884,333
10^{20}	2,220,819,632,560,918,840	-49,347,193,044,669,701	222,744,644	4,891,825
10^{21}	21,127,269,486,018,731,928	-446,579,871,578,168,707	597,394,254	86,432,204
10^{22}	201,467,286,689,315,906,290	-4,080,704,006,019,620,994	1,932,355,208	127,132,665
10^{23}	1,925,320,391,606,803,968,923	-37,083,513,766,578,631,309	7,250,186,216	

“리만의 소수 계량함수 이외에 $\pi(x)$ 를 보다 정확히 표현할 수 있는 함수는 존재하는가?” 이 함수를 찾는 것이 본 연구의 핵심이다.

III. 유한급수 $Li(x)$ 로 $\pi(x)$ 표현

본 장에서 제안하는 공식은 $\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < Li(x)$ 의

특징에 기반하고 있다. 무한급수 $Li(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t!}{(\ln x)^t}$ 는 잘못 계산되었음을 2장에서 증명하였다. 따라서 근사적 무한급수를 유한급수로 한정시킨 함수를 제안한다. 함수를 제안하기 위해 먼저, 식 (4)와 식 (5)를 고찰해 본다.

$$Li_1(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^k \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \quad (4)$$

$$Li_2(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^{\lfloor 0.5k+1 \rfloor} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \sum_{t=\lfloor 0.5k \rfloor+2}^{2k} \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \quad (5)$$

$Li_1(x)$, $Li_2(x)$ 와 $\pi(x)$ 의 오차를 비교한 결과는 표 2에 제시되어 있다. 편의상 일반 프로그램으로 표현할 수 있는 계산 정확도로 수행할 수 있는 10^{16} 까지 제시하였다.

표 2에서 $0 \leq t \leq 2k$ 인 $Li(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^{2t} \frac{t!}{(\ln x)^t} \right)$ 의 유한급수로 $\pi(x)$ 를 충분히 표현할 수 있음을 알 수 있다. 왜냐하면 $Li_1(x)$ 은 $10^1 \leq x \leq 10^{12}$ 에 대해서는 $Li(x) - \pi(x)$ 에 비해 오차가 보다 적은 반면 $10^{13} \leq x$ 에서만 오차가 보다 커지는 특징을 갖기 때문이다. 또한, $Li_2(x)$ 는 $10^{16} \leq x$ 에서만 $Li(x)$ 보다 오차가 크기 때문이다.

표 2 $Li(x), Li_1(x), Li_2(x)$ 와 $\pi(x)$ 의 오차Table 2 The error of $Li(x), Li_1(x), Li_2(x)$ and $\pi(x)$

x	$\ln x$	$Li_i(x) - \pi(x)$		
		$Li(x)$	$Li_1(x)$	$Li_2(x)$
10^1	2.302585	2	0	0
10^2	4.605170	5	1	0
10^3	6.907755	10	3	-3
10^4	9.210340	17	8	-1
10^5	11.512925	38	25	-11
10^6	13.815511	130	111	59
10^7	16.118096	339	313	100
10^8	18.420681	754	716	403
10^9	20.723266	1,701	1,645	303
10^{10}	23.025851	3,104	3,021	1,048
10^{11}	25.328436	11,588	11,470	1,270
10^{12}	27.631021	38,263	38,245	20,199
10^{13}	29.933606	108,971	110,584	29,220
10^{14}	32.236191	314,890	344,571	164,095
10^{15}	34.538776	1,052,619	1,402,620	973,643
10^{16}	36.841361	3,214,632	7,019,141	4,262,664

본 장에서는 첫 번째로, $\pi(x)$ 를 정확히 표현하는 공식으로 식 (6)을 제안한다.

$$Li_3(x) = \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^{\alpha} \frac{t!}{(\ln x)^t} \pm \beta \right) \right\rfloor \quad (6)$$

여기서 α 는 $t=0, 1, 2, \dots$ 를 증가시키면서 $Li(x) \simeq \pi(x)$ 가 되는 값으로 결정하고 오차 보정 항 β 를 구하였다. $Li_3(x)$ 는 표 3에 제시되어 있다. 결론적으로, $\frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^{\alpha} \frac{t!}{(\ln x)^t} \pm \beta \right)$ 의 유한급수로 $\pi(x)$ 를 정확하게 표현할 수 있음을 알 수 있다. 표 3에서는 $[10^{17}, 10^{23}]$ 의 $Li_3(x)$ 함수는 프로그램의 표현 정확도로 인해 오차가 발생할 수 있기 때문에 변경될 수 있음을 참고하기 바란다. 본 데이터 처리는 Python Ver. 3.1로 처리되었다.

추가로 $x \neq 10^k$ 가 아닌 경우도 고찰하였다. 예로, $\pi(500)95$ 에 대해 $Li_3(10^3) = \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1!}{(\ln x)^1} + \frac{3!}{(\ln x)^3} \right) \right\rfloor$ 을 적용한 결과 95를 얻어 $Li_4(500) - \pi(500) = 0$ 으로 정확한 해를 얻었다.

두 번째로, 식 (7)을 제안한다. 식 (7)은 표 4에 제시되어 있으며, 10^{21} 까지 계산되었다. 10^{22} 와 10^{23} 은 오차로 인해 계산이 정확하게 수행되지 않아 표현하지 않았다.

$$Li_4(x) = \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(1 + \alpha \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta \right) \right\rfloor, k \geq 2 \quad (7)$$

먼저, $Li_3(x)$ 와 $Li_4(x)$ 제안하였지만 10^k 에 대한 $\pi(x)$ 를 표현할 수 있는 특징을 찾지 못하여 하나의 정확한 공식은 제안하지를 못하였다. 따라서 추가적으로 식 (8)을 제안한다.

$$\pi(x) = \sqrt{\alpha x} \pm \beta \quad (8)$$

식 (8)로 추정한 결과는 표 5에 제시되어 있다. 여기서

$$0 \leq \pi(x) - \sqrt{\alpha x} \leq 8, \pi(x) - \sqrt{\alpha x} \pm \beta = 0 \text{의 범위를}$$

갖는 특징을 갖고 있다. 또한, α 값에 대해 $k=1$ 인 경우

$$l(\alpha) = l(k), 2 \leq k \leq 4 \text{인 경우 } l(\alpha) = l(k-1),$$

$5 \leq k \leq 14$ 인 경우 $l(\alpha) = l(k-2)$ 와 $15 \leq k \leq 23$ 인 경우

$$l(\alpha) = l(k-3) \text{의 규칙을 갖고 있다.}$$

IV. 결론 및 향후 연구과제

소수정리는 아직까지 정확한 공식을 제시하지 못하고 근사치만을 구할 수 있었다. 또한, 리만의 제타함수가 증명되지 않고 있으며, 제타함수를 이용하여 $R(x)$ 를 구한 결과도 근사값이다.

본 논문은 유한급수 $Li_3(x) = \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^{\alpha} \frac{t!}{(\ln x)^t} \pm \beta \right) \right\rfloor$, $Li_4(x) = \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(1 + \alpha \frac{k!}{(\ln x)^k} \pm \beta \right) \right\rfloor$ 로 $x = 10^k$ 인 $\pi(x)$ 를 정확히 표현할 수 있음을 보였다. 그러나 k 의 값에 따라 α 와 β 가 모두 달라 일반화된 하나의 공식으로 제시하지는 못하였다. 따라서 비록 추정값을 제시하지만 $\pi(x)$ 에 대한 하나의 공식으로 $\sqrt{\alpha x} \pm \beta$ 를 제안하였으며, 이 공식은 리만의 제타함수로 추정된 값보다 좋은 성능을 보였다.

본 논문에 제시된 각각의 10^k 의 유한급수 $Li_3(x)$ 과 $Li_4(x)$ 에 대해 다른 수식을 제안할 수도 있으며, 하나의 공통된 수식을 유도할 수도 있을 것이다. 이와 관련된 연구는 추후 과제로 남겨둔다.

비록 리만가설이 증명되더라도 소수 분포 패턴으로 소인수를 찾을 수 있는지는 의문이다. 예로, $RSA - 100(10^{100})$ 의 경우, $l(p) = l(q) = l(n)/2$ 이므로 p, q 는 동일한 10^{50} 범위에서 임의로 선택된 소수들이다. 따라서 $\pi(10^{50}) - \pi(10^{49})$ 의 소수들 중 $p < \sqrt{n}$ 모두를 대상으로 소인수분해를 하여야만 한다. 이를 소수의 분포 패턴으로 풀 수 있는지는 의문이다.

추후에는, $\sqrt{\alpha x} \pm \beta$ 에서 α 값을 결정하는 방법과 주어진 n 은 방법이 존재하는지 여부를 연구할 예정이다.
 합성수 (공개키) n 을 2개의 소수 p, q 로 쉽게 소인수분해하

표 3. $L_3(x)$ Table 3. $L_3(x)$

$x = 10^k$	$L_3(x)$	$\pi(x) - L_3(x)$
10^1	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} (1) \right\rfloor$	0
10^2	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^1 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{3!}{(\ln x)^3} \right) \right\rfloor$	0
10^3	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^2 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{3!}{(\ln x)^3} \right) \right\rfloor$	0
10^4	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^3 \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \right\rfloor$	0
10^5	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^3 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{4!}{(\ln x)^4} + \frac{10!}{(\ln x)^{10}} \right) \right) \right\rfloor \quad \text{or} \quad \left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^2 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \sum_{t=4}^7 \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \right\rfloor$	0
10^6	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^3 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{4!}{(\ln x)^4} + \frac{10!}{(\ln x)^{10}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^7	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^3 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{12!}{(\ln x)^{12}} \right) \right\rfloor$	0
10^8	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^4 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{5!}{(\ln x)^5} - \frac{7!}{(\ln x)^7} + \frac{12!}{(\ln x)^{12}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^9	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^4 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{6!}{(\ln x)^6} + \sum_{t=8}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{11!}{(\ln x)^{11}} \right) \right\rfloor$	0
10^{10}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^5 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \left(\frac{11!}{(\ln x)^{11}} + \frac{13!}{(\ln x)^{13}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{11}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^5 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \sum_{t=7}^8 \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) - \sum_{t=10}^{14} \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \right\rfloor$	0
10^{12}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^6 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{7!}{(\ln x)^7} + \sum_{t=9}^{12} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{14!}{(\ln x)^{14}} + \frac{19!}{(\ln x)^{19}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{13}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^6 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{10!}{(\ln x)^{10}} + \sum_{t=12}^{16} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{20!}{(\ln x)^{20}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{14}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^6 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \sum_{t=8}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{8!}{(\ln x)^8} \right) - \left(\frac{10!}{(\ln x)^{10}} - \frac{11!}{(\ln x)^{11}} + \sum_{t=14}^{16} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{23!}{(\ln x)^{23}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{15}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^7 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{8!}{(\ln x)^8} + \frac{10!}{(\ln x)^{10}} - \sum_{t=12}^{14} \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{16!}{(\ln x)^{16}} + \frac{20!}{(\ln x)^{20}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{16}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^7 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{8!}{(\ln x)^8} - \frac{9!}{(\ln x)^9} + \sum_{t=10}^{11} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{12!}{(\ln x)^{12}} + \frac{13!}{(\ln x)^{13}} - \frac{14!}{(\ln x)^{14}} + \sum_{t=16}^{17} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{20!}{(\ln x)^{20}} + \frac{23!}{(\ln x)^{23}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{17}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^{10} \frac{t!}{(\ln x)^t} + 5 \frac{9!}{(\ln x)^9} \right) - \left(2 \sum_{t=13}^{14} \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{13!}{(\ln x)^{13}} + \frac{21!}{(\ln x)^{21}} + \frac{23!}{(\ln x)^{23}} + \frac{31!}{(\ln x)^{31}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{18}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^8 \frac{t!}{(\ln x)^t} + 2 \frac{8!}{(\ln x)^8} \right) - \left(2 \frac{10!}{(\ln x)^{10}} + \frac{11!}{(\ln x)^{11}} + \sum_{t=14}^{15} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{16!}{(\ln x)^{16}} + \frac{19!}{(\ln x)^{19}} + \frac{21!}{(\ln x)^{21}} - \frac{26!}{(\ln x)^{26}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{19}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\sum_{t=10}^{11} \frac{t!}{(\ln x)^t} - 2 \frac{13!}{(\ln x)^{13}} + \sum_{t=15}^{16} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{18!}{(\ln x)^{18}} - \frac{23!}{(\ln x)^{23}} - \frac{25!}{(\ln x)^{25}} + \frac{34!}{(\ln x)^{34}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{20}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{12!}{(\ln x)^{12}} + 5 \frac{13!}{(\ln x)^{13}} \right) - \left(\frac{14!}{(\ln x)^{14}} - \frac{15!}{(\ln x)^{15}} + \frac{16!}{(\ln x)^{16}} - \frac{17!}{(\ln x)^{17}} + \sum_{t=19}^{21} \frac{t!}{(\ln x)^t} - \frac{26!}{(\ln x)^{26}} - \frac{31!}{(\ln x)^{31}} - \frac{35!}{(\ln x)^{35}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{21}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{t=0}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} - \left(\frac{11!}{(\ln x)^{11}} + 4 \frac{12!}{(\ln x)^{12}} - \sum_{t=14}^{15} \frac{t!}{(\ln x)^t} - 3 \frac{16!}{(\ln x)^{16}} + \sum_{t=20}^{21} \frac{t!}{(\ln x)^t} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{22}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^9 \frac{t!}{(\ln x)^t} + 3 \frac{10!}{(\ln x)^{10}} + 2 \frac{11!}{(\ln x)^{11}} + 3 \frac{12!}{(\ln x)^{12}} + \frac{14!}{(\ln x)^{14}} + \frac{16!}{(\ln x)^{16}} \right) - \left(\frac{17!}{(\ln x)^{17}} + \frac{18!}{(\ln x)^{18}} - \frac{19!}{(\ln x)^{19}} + \frac{20!}{(\ln x)^{20}} - \frac{21!}{(\ln x)^{21}} + \sum_{t=22}^{23} \frac{t!}{(\ln x)^t} + \frac{30!}{(\ln x)^{30}} + \frac{33!}{(\ln x)^{33}} \right) \right) \right\rfloor$	0
10^{23}	$\left\lfloor \frac{x}{\ln x} \left(\left(\sum_{t=0}^{10} \frac{t!}{(\ln x)^t} + 6 \frac{11!}{(\ln x)^{11}} \right) - \left(2 \frac{12!}{(\ln x)^{12}} - \frac{14!}{(\ln x)^{14}} + \frac{16!}{(\ln x)^{16}} - \frac{20!}{(\ln x)^{20}} + \frac{21!}{(\ln x)^{21}} - \frac{25!}{(\ln x)^{25}} + \frac{28!}{(\ln x)^{28}} + \frac{31!}{(\ln x)^{31}} \right) \right) \right\rfloor$	0

표 4. $L_4(x)$ Table 4. $L_4(x)$

x	α	β	$\pi(x) - L_4(x)$
10^1	0	0	0
10^2	2	0	0
10^3	9	0	0
10^4	40	$-\frac{6!}{(\ln x)^6}$	0
10^5	176	0	0
10^6	816	0	0
10^7	3,991	$+\frac{11!}{(\ln x)^{11}}$	0
10^8	20,155	$-\frac{13!}{(\ln x)^{13}}$	0
10^9	104,365	$-6\frac{14!}{(\ln x)^{14}}$	0
10^{10}	551,818	$-5\frac{16!}{(\ln x)^{16}}$	0
10^{11}	2,967,545	$+5\frac{18!}{(\ln x)^{18}}$	0
10^{12}	16,184,624	$-9\frac{17!}{(\ln x)^{17}}$	0
10^{13}	89,303,574	$-15\frac{20!}{(\ln x)^{20}}$	0
10^{14}	497,625,074	$-\frac{20!}{(\ln x)^{20}}$	0
10^{15}	2,796,300,171	$-\frac{22!}{(\ln x)^{22}}$	0
10^{16}	15,827,776,599	$-100\frac{26!}{(\ln x)^{26}}$	0
10^{17}	90,159,481,981	$-25\frac{27!}{(\ln x)^{27}}$	0
10^{18}	51,640,795,574	$-34\frac{25!}{(\ln x)^{25}}$	0
10^{19}	2,973,037,792,653	$-215\frac{30!}{(\ln x)^{30}}$	0
10^{20}	17,190,844,388,314	$+122\frac{29!}{(\ln x)^{29}}$	0
10^{21}	99,798,695,987,215	$+32\frac{34!}{(\ln x)^{34}}$	0

표 5. $\sqrt{ax} \pm \beta$ Table 5. $\sqrt{ax} \pm \beta$

x	$\sqrt{ax} \pm \beta$		$\pi(x) - \sqrt{ax} \pm \beta$	
	α	β	$\lfloor \sqrt{ax} \pm \beta \rfloor$	$\lceil \sqrt{ax} \pm \beta \rceil$
10^1	$1^2 < 2 < 2^2$	0	0	-1
10^2	$2^2 < 6 < 3^2$	0	1	0
10^3	$5^2 < 28 < 6^2$	0	1	0
10^4	$12^2 < 151 < 13^2$	0	1	0
10^5	$30^2 < 920 < 31^2$	0	1	0
10^6	$78^2 < 6,162 < 79^2$	0	0	-1
10^7	$210^2 < 44,166 < 211^2$	0	4	3
		$+\sqrt{20}$	0	-1
10^8	$576^2 < 331,944 < 577^2$	0	-3	-4
		$-\sqrt{10}$	1	0
10^9	$1607^2 < 2,585,472 < 1608^2$	0	-2	-3
		$-\sqrt{10}$	1	0
10^{10}	$4550^2 < 20,707,279 < 4551^2$	0	-2	-3
		$-\sqrt{10}$	1	0
10^{11}	$13022^2 < 169,583,754 < 13023^2$	0	6	5
		$+\sqrt{20}$	1	0
10^{12}	$37607^2 < 1,414,355,046 < 37608^2$	0	5	4
		$+\sqrt{20}$	1	0
10^{13}	$109435^2 < 11,976,135,579 < 109436^2$	0	-3	-4
		$-\sqrt{10}$	0	-1
10^{14}	$320494^2 < 102,716,516,260 < 320495^2$	0	6	5
		$+\sqrt{20}$	1	0
10^{15}	$943768^2 < 890,698,383,714 < 943769^2$	0	-5	-6
		$-\sqrt{30}$	0	-1
10^{16}	$2792383^2 < 7,797,405,110,338 < 2792384^2$	0	-2	-3
		$-\sqrt{10}$	1	0
10^{17}	$8296416^2 < 68,830,521,594,788 < 8296417^2$	0	-8	-9
		$-\sqrt{50}$	0	-1
10^{18}	$24739954^2 < 612,065,338,159,507 < 24739955^2$	0	8	7
		$+\sqrt{60}$	0	-1
10^{19}	$74015533^2 < 5,478,299,161,084,404 < 74015534^2$	0	-6	-7
		$-\sqrt{30}$	0	-1
10^{20}	$222081960^2 < 49,320,397,071,188,375 < 222081961^2$	0	4	3
		$+\sqrt{10}$	1	0
10^{21}	$668102923^2 < 446,361,515,934,858,213 < 668102924^2$	0	5	4
		$+\sqrt{20}$	0	-1
10^{22}	$2014672866^2 < 4,058,906,760,595,500,615 < 2014672867^2$	0	-2	-3
		$-\sqrt{10}$	1	0
10^{23}	$6088397663^2 < 37,068,586,103,369,769,908 < 6088397664^2$	0	-4	-5
		$-\sqrt{20}$	0	-1

참고문헌

- [1] D. Zagier, "Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem," *American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 8, pp. 705-708, 1997.
- [2] A. O. L. Atkin and D. J. Bernstein, "Prime Sieves Using Binary Quadratic Forms," *Mathematics of Computation*, Vol. 73, pp. 1023-1030, 2004.
- [3] B. Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse," *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1859. (D. R. Wilkins, "On the Number of Primes Less Than a Given Quantity, 1998.
- [4] J. M. Borwein, D. M. Bradley, and R. E. Crandall, "Computational Strategies for the Riemann Zeta Function," *Journal of Computational Applied Mathematics*, Vol. 121, pp. 247-296, 2000.
- [5] T. Kotnik, "The Prime-counting Function and its Analytic Approximations," *Advanced Computational Mathematics*, Vol. 29, No. 1, pp. 55-70, 2008.
- [6] D. Goldfeld, "The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective," *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 31, No. 3, pp. 18-23, 2009.
- [7] N. M. Temme, "Exponential, Logarithmic, Sine, and Cosign Integrals," *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [8] G. H. Hardy and E. M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers," 5th ed., pp. 355-356, Oxford, England: Oxford University Press, 1979.

저자 소개

이 상 운 (Sang-Un, Lee)

1983년~1987년 : 한국항공대학교
항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 : 경상대학교
컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 : 경상대학교
컴퓨터과학과 (박사)
2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과
전임강사
2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학
여성교양과 조교수
2007.3 ~ 현재 : 강릉원주대학교 과학
기술대학 멀티미디어공학과
부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론, 소프
트웨어 척도, 분석과 설계 방
법론, 소프트웨어 시험 및 품
질보증, 소프트웨어 신뢰성,
신경망, 뉴로-퍼지, 그래프 알
고리즘

e-mail : sulee@gwnu.ac.kr

최 명 복 (Myeong-Bok, Choi)

1992년 : 호서대학교 전자계산학과
(학사)
1994년 : 아주대학교 컴퓨터공학과
(석사)
2001년 : 아주대학교 컴퓨터공학과
(박사)
1997~현재 : 강릉원주대학교 멀티미
디어공학과(교수)
2004. 1~현재 : 한국인터넷방송통신
학회 이사

관심분야 : 지능형 정보검색, 퍼지응
용, 지식표현, 신경망, 지
능형 교통제어, 소프트웨
어 공학, 알고리즘

e-mail : cmb5859@gmail.com,
cmbl@gwnu.ac.kr