

초등수학영재와 일반학생의 서술형 평가를 통한 수학적 추론 능력 및 오류 비교

김동관¹⁾ · 류성림²⁾

본 연구의 목적은 초등수학영재들과 일반학생들 사이의 서술형 평가에서 나타나는 수학적 추론 능력과 오류 유형을 비교분석 함으로써 초등수학영재의 인지적 특성을 이해하며, 초등수학영재의 교육에 도움을 주는 것이다. 연구 대상은 광역시 소재의 5개 초등학교 수학영재학급 학생 63명과 4개 초등학교 일반학생 63명이다. 연구 결과 첫째, 초등수학영재가 일반학생보다 서술형 평가에서 수학적 추론 능력이 높은 것으로 나타났다. 즉 $p < .05$ 수준에서 두 집단 간 유의미한 차이를 보이는 것으로 나타났다. 이러한 결과가 나타난 이유는 다음과 같다. 먼저, 귀납적 추론에 있어서 초등수학영재는 문제의 해결에 필요한 적절한 자료를 수집하는 능력과 수집한 자료를 분석하여 규칙을 찾고 문제를 해결하는 능력이 모두 일반학생보다 높았기 때문이다. 또 유비적 추론에 있어서도 초등수학영재는 두 상황의 구조적 유사성을 인식하고 기저 상황의 핵심을 더 잘 파악하였으며, 적용에 있어서도 타당한 대응을 통해 표적 상황을 유연성 있게 해결하였기 때문이다. 연역적 추론에 있어서는 초등수학영재와 일반학생 모두 완벽한 추론을 이끌어내는 데에 어려움을 겪는 것으로 나타났으나, 초등수학영재는 일반학생에 비해 문제 해결을 위한 타당성과 일반성을 가진 근거를 수집하였고, 논리적인 추론 단계에서 생략된 부분이 적었기 때문이다. 둘째, 초등수학영재가 일반학생에 비하여 오류를 적게 범하는 것으로 나타났다. 가장 많이 범하는 오류의 유형은 초등수학영재와 일반학생이 모두 풀이 과정의 생략으로 같았으나, 일반 학생들은 개념 원리의 오류나 문항 이해의 오류가 상대적으로 많은 편이었고, 초등수학영재들은 기록 단계의 오류가 높은 것으로 나타났다.

주제어: 초등수학영재, 서술형 평가, 수학적 추론 능력, 오류

I. 서 론

21세기는 하루가 다르게 변화하는 지식기반사회로 창의성을 갖춘 영재들이 국가 경쟁력이 되어가고 있다. 이에 세계의 각국들은 영재 교육에 집중하고 있으며 우리나라도 2002년 영재 교육 진흥법이 공포된 이후 영재 교육에 대한 관심을 높이며 영재 교육에 힘쓰고 있고, 특히 수학영재교육이 가장 활발히 이루어지고 있는 실정이다. 따라서 수학 영재의 인지적 특성을 정확히 파악하여 판별하고 교육하는 것이 중요하다. 수학영재의 인지적 특성에는 일반화하는 능력, 추론하는 능력, 추상화하는 능력, 적용하는 능력 등 여러 가지가

1) [제1저자] 대구도남초등학교

2) [교신저자] 대구교육대학교 수학교육과

있다(NCTM, 1987). 수학영재의 인지적 특성 중 수학적 추론은 수학적 사고의 여러 가지 하위 요소들 중 하나로서 증거를 모으고 추측하고 일반화하여 논거를 세우고 논리적 결론을 이끄는 것을 포함하여 기본 개념이나 지식을 기초로 새로운 결론을 이끌거나 기존의 지식들을 보다 체계화시키는 데 필요한 방법적 측면의 고차적인 사고 기능이다(송상현, 2004). NCTM(1991)은 모든 학생들을 위한 수학적 힘의 개발을 수학 교육의 목적으로 제시하고, 논리적으로 탐구하고 추측하고 추론하는 능력을 수학적 힘의 구성요소 중의 하나로 강조하였다. 이러한 수학적 추론 능력의 분석을 통해 영재와 일반학생의 인지적 특성과 차이를 알아볼 수 있을 것이다.

한편 학생들이 수학 문제를 해결할 때 범하는 오류를 분석하여 수학적 사고 과정을 파악하는데 도움을 얻을 수 있다. 오류는 많은 부분에서 일정한 규칙성 또는 일관성이 있는 것으로 알려져 있다(구광조·오병승·전평국, 1995). 초등수학영재와 일반학생이 문제를 해결해가는 과정에서 발생하는 오류를 비교·분석하는 것을 통해 그들의 수학적 사고과정과 인지적 특성을 파악하는데 도움을 얻을 수 있을 것이다.

이러한 수학적 추론 능력과 오류의 분석을 위해 적절한 평가 중의 하나는 서술형 평가이다. 이 평가 방식은 학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 ‘선택’ 하도록 하는 평가 방식이 아니라 학생이 답이라고 생각하는 지식이나 의견 등을 직접 ‘서술’ 하도록 하는 평가 방식이다. 이러한 서술형 평가는 기억력, 이해력과 같은 단순 사고 능력보다는 창의력, 비판력, 종합력 등과 같은 고등 사고 능력을 평가하기 위한 것이다(정현도·강신포·김성준, 2010). 선택형 평가를 통해서 학생이 어떠한 사고과정을 거쳤는지 알 수 없으며, 추측으로 답을 맞힐 수도 있다. 그러나 서술형 평가는 수학적 개념을 이해하고 원리를 적용하여 자신의 생각대로 쓰는 것이기 때문에 수학적 추론과 오류를 보다 정확히 분석해 낼 수 있다.

따라서 본 연구에서는 초등수학영재와 일반학생의 서술형 평가에 나타나는 귀납적 추론 능력, 유비적 추론 능력, 연역적 추론 능력에는 각각 어떠한 차이가 있는지 알아보고, 초등수학영재와 일반학생의 서술형 평가에서 나타나는 오류의 유형에는 어떠한 차이가 있는지 알아보고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학영재의 특성

수학 영재는 수학 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이를 것으로 예상되는 사람으로, 정규 학교 이상의 특별한 교육 프로그램과 서비스를 필요로 하는 사람이다. 보다 구체적으로 수학 영재는 다음과 같은 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식의 요인에서 평균 이상의 높은 능력을 지닌다(한국교육개발원, 1997: 7-8).

- ① 수학적 사고 능력: 수학적 문제를 이해하고 해결하는데 기본적으로 요구되는 사고 능력을 의미하며, 다음과 같은 하위 능력들이 포함된다: 직관적 통찰 능력; 정보의 조직화 능력; 공간화/시각화 능력; 수학적 추상화 능력; 수학적 추론 능력(연역적, 귀납적 사고 능력); 일반화 및 적용 능력; 반성적 사고 능력.
- ② 수학적 과제 집착력: 일정 시간동안 끈기있게 수학 문제에 몰두하는 능력으로, 수학에 대한 흥미와 태도, 인내심, 지속성, 집중성, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기-신뢰감 등과 관련을 맺는다.

- ③ 수학적 창의성: 수학적 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 의미하며, 융통성, 유연성, 독창성, 정교성 등의 능력들이 포함된다.
- ④ 배경 지식: 배경 지식은 수학 문제를 해결하는데 필요한 수학적 지식과 다른 영역의 지식을 의미한다.

일반적으로 수학영재는 다음과 같은 특성이 있다(남승인, 1998; 김민정, 류성림, 2007; 이정임, 류성림, 2012; House, 1987; Krutetskii, 1976): 주변 환경에서 수치와 양적 측면에 민감하고 관심이 많다; 직관적으로 문제를 해결하는 통찰력이 우수하며 수학적 지식을 즉흥적으로 만들어 낼 수 있다; 수학적 문제 해결 과정이 간단·명료하여 수학적 사고과정을 단축(간략화)하거나 생략할 수 있다; 수학적 사고 능력이 우수하여 분석적·귀납적·연역적으로 추론하는 능력과 원리·법칙을 일반화하는 능력이 우수하다; 문제 장면과 문제해결의 중요한 단서, 문제해결 방법 등을 잘 기억한다; 수학적 문제를 예상하지 못한 방법으로 해결하는 독창성이 있다; 수학적 패턴, 구조, 관계를 잘 지각하고 이것을 기호로 일반화하여 쉽게 표현한다; 일상생활에서 수학적으로 지각하고 해석하며 수학적 원리·법칙을 일상생활에 적용하는 능력이 뛰어나다; 수학적 사고 과정이 유연하여 문제해결 과정에 융통성이 있으며 사고 과정을 거꾸로 할 수 있다; 수학적 문제해결에 대한 과제집착력이 뛰어나다.

이와 같이 여러 연구에 의하면 수학적 추론 능력은 수학영재가 갖추어야 할 중요한 특성 중의 하나임에 틀림없음을 알 수 있다.

2. 수학적 추론

수학적 추론은 수학적 사고의 여러 가지 하위 요소들 중 하나로 분류되고 있다. 추론은 주어진 문제의 요소를 체계적이고 분석적인 방법으로 이해하고, 그들 간의 관계를 발견하며, 일반화하거나 타당한 결론을 이끌어 내기 위하여 사용하는 논리적인 사고력이라고 볼 수 있다. 즉 수학적 추론은 증거를 모으고 추측하고 일반화하여 논거를 세우고 논리적 결론을 이끄는 것을 포함하여 기본 개념이나 지식을 기초로 새로운 결론을 이끌어내거나 기존의 지식들을 보다 체계화시키는 데 필요한 방법적 측면의 고차적인 사고 기능이다(송상현, 2004). Polya(1954)는 수학적 추론을 크게 연역적 추론과 개연적 추론(귀납적 추론, 유비적 추론)으로 나누고 있다. 3가지 유형의 추론에 대하여 의미를 간략히 알아본다.

가. 귀납적 추론

귀납적 추론은 어떤 집합에서 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 추론, 즉 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실 또는 다수의 연속적인 변화에서 일반적인 법칙을 이끌어내는 추론 방법이다. 따라서 귀납 추론은 단 하나 또는 제한적인 대상에 대한 추론에는 적용될 수 없고, 여러 대상에 통합하여 그들의 공통적인 속성으로부터 일반적인 원리나 법칙을 발견하는 것을 뜻한다(남승인, 1999). 유세희(2009)는 Sternberg(1982) 등 많은 학자들이 유추, 계열의 완성, 분류를 귀납적 추론의 대표적인 유형으로 나누었으나 유추적 추론을 수학적 추론의 하나의 분류로 생각하여 귀납적 추론에는 계열의 완성과 분류가 속하는 것으로 보았다.

나. 유비적 추론

유비적 추론이란 부분적인 유사성을 바탕으로 하여 어떤 대상에 대해 성립하는 성질이 나 어떤 관계 체제로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계체제를 추측 부분적인 답음을

근거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추론이다(박혜란, 2006). 유세희(2009)는 유비적 추론의 종류를 비유적 유추와 영역 간 유추로 나누어 설명하였다.

다. 연역적 추론

연역적 추론이란 논리적인 엄밀성이 철저히 적용되는 추론으로 일반적인 법칙 또는 원리에서 출발하여 부분에 관한 지식이나 특수사실을 이끌어내는 추론의 과정으로 가설 검증이라고 할 수 있다. 연역적 추론의 전형적인 형태로서 두 가지의 전제(대전제와 소전제)와 하나의 결론으로 이루어진 삼단 논법을 들 수 있는데 이것은 다시 범주적 삼단논법, 조건 삼단 논법, 선형 삼단 논법으로 분류할 수 있다(방정숙, 1996). 유세희(2009)는 범주 삼단 논법과 선형 삼단 논법으로 분류하였다.

3. 서술형 평가

일반적으로 서술형 평가방법은 학생들이 답이라고 생각하는 지식이나 주장을 직접 서술하도록 하는 평가 방식이다. 학생의 생각이나 의견을 직접 서술하도록 하기 때문에 학생의 창의성, 문제해결력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보 수집력 및 분석력 등 고등 사고 기능을 쉽게 평가할 수 있다(백순근, 1999). 서술형 평가는 반응의 자유도가 크기 때문에 학생들은 자신의 지적 배경에 따라 적절한 자료나 정보를 선택하여 자기 말로 표현할 수 있고, 문항이 지시하는 범위 내에서 자유로이 문제를 깊고 넓게 다룰 수 있다는 장점이 있다(이문정, 2000).

4. 오류

Radatz(1979)는 오류를 정보 처리적 과정 분류에 따라 수학 내용에서 일어나는 오류의 다양한 원인은 수학 과제에 포함된 정보를 얻고, 처리하고, 파지하고, 재생산하는데 사용되는 메커니즘을 조사함으로써 확인되어질 수 있다고 하였다. 오류를 통해 수학 교수·학습을 개선하기 위한 목적으로 오래전부터 오류에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다. 본 연구에서는 정현도, 강신포, 김성준(2010)의 연구를 기본으로 하고 있다. 그들은 수학적 오류를 수학 문제 해결에서 수학의 용어, 기호, 식, 개념 원리 등의 내용을 다루는 바르지 못한 과정으로 정의하였으며, 오류를 일으키는 유형과 의의를 <표 1>, <표 2>와 같이 나타내었다.

<표 1> 오류 유형

대분류	키워드	오류유형
개념적 오류	읽기	문항 이해의 오류
	이해	개념 원리의 오류
	변환	자료 사용의 오류
기술적 오류	처리	풀이 과정의 오류
	기록	기록 단계의 오류
	생략	풀이 과정의 생략

<표 2> 오류 유형의 의의

키워드	오류유형	내용
읽기	문항 이해의 오류	문제에서 요구하는 내용을 잘못 해석해서 발생하는 오류
이해	개념 원리의 오류	기본 개념을 잘못 파악, 기본 정보가 부적절하게 이끌어져 발생하는 오류
변환	자료 사용의 오류	문제의 내용을 이해하고, 구조를 파악해서 해결하는 것이 아니라 문제에 주어진 실마리나 키워드를 문제 내용의 식을 변환하거나 연산을 선택하는 오류
처리	풀이 과정의 오류	문제의 답을 논증하는 과정이 잘못되어 발생하는 오류
기록	기록 단계의 오류	풀이 과정은 옳게 정의되었으나, 답을 잘못 옮겨 쓴 경우 발생하는 오류
생략	풀이 과정의 생략	풀이 과정을 생략하고 답만을 언급한 경우

5. 선행 연구 고찰

여기서는 서술형 평가를 통한 수학적 추론 능력과 오류 유형에 대한 선행 연구를 분석해 봄으로써 본 연구에 대한 시사점을 얻고자 한다. 수학적 추론 능력에 관한 선행연구를 살펴보면, 유세희(2009)는 초등학교 5학년 학생들의 수학적 추론 능력에 대한 실태를 조사하였으며, 귀납적 추론 능력의 경우 간단하게 계열을 완성하는 문제에는 정답률이 높았으나 복잡한 상황까지 발전하여 일반화를 찾기 위해 규칙을 찾고, 적용하는 단계에 이르는 문제에서는 정답률이 낮은 것으로 나타났다. 또 두 문제 사이의 구조적인 유사성을 파악하여 핵심적인 전이가 이루어져야 하는 유비적 추론의 정답률이 매우 낮았으며, 연역적 추론의 경우 문제를 해결함에 있어 대전제와 소전제를 모두 사용하거나 한 개의 전제라도 사용하여 기술한 학생의 비율이 매우 낮았다고 기술하였다. 송상현(2004)은 수학 영재들의 수학적 추론 능력 분석에 관하여 연구하였으며, 수학 영재들이 문제를 해결하는 과정에서 문제의 구조를 파악하고 논리적인 사고과정을 통하여 일반화하거나 일반화를 시도한 경우가 있는 것으로 나타났다. 한편 김성민(2008)은 추론 능력의 개발이 수학적 사고력의 신장에 영향을 준다고 주장하였다. 김은희(2002)는 학습자의 수학적 사고 과정을 자연스럽게 정확하게 측정하기 위해 수학적 추론 능력 평가 기준을 제시하였다.

다음으로 서술형 평가를 통한 수학학습에서의 오류 유형을 분석한 선행연구들을 살펴보면, 정현도 외(2010)는 수학 성취도에 따른 오류 유형의 빈도를 연구하였는데, 상위권 학생들은 비교적 오류를 범한 비율이 낮게 나타났다. 또 문제해결과정에서 상위권 학생들은 ‘개념원리의 오류’, 중위권 학생들은 ‘풀이 과정의 오류’, 하위권 학생들은 ‘문항 이해의 오류’를 가장 많이 범한 것으로 나타났다. 한편 임지현(2005)은 오류 찾기 활동이 수학적 추론 능력의 향상에 영향을 준다고 주장하였다.

위의 선행 연구들을 볼 때, 수학적 추론 능력이 수학적 사고 과정을 파악하는 중요한 요소가 될 수 있음을 보여주고 있다. 선행 연구에서는 일반학생과 초등수학영재의 수학적 추론 능력을 각각 분석한 연구는 있었으나, 초등수학영재와 일반학생의 수학적 추론 능력을 비교한 연구가 없었으며, 또한 오류에 대한 연구도 마찬가지이다. 따라서 초등수학영재와 일반학생 간의 서술형 평가에서 나타나는 수학적 추론 능력 및 오류 유형의 차이에 대한 비교 연구가 필요하다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 2013년 광역시 소재 5개 지역교육청의 초등학교 6학년 수학영재학급 학생 63명과 4개 지역교육청의 초등학교 6학년 일반학생 63명이다. 일반학생은 수학 진단고사에서 부진으로 판별된 학생과 초등수학영재를 제외한 학생들이다. 본 연구의 표집대상에 관련한 자세한 사항은 <표 3>과 같다.

<표 3> 연구 대상자 현황

초등수학영재		일반학생	
학교	학생 수	학교	학생 수
A초등학교	6	a초등학교	25
B초등학교	15	b초등학교	7
C초등학교	11	c초등학교	23
D초등학교	15	d초등학교	8
E초등학교	16		
합계	63	합계	63

2. 검사도구

가. 수학적 추론 능력 및 오류 유형 검사도구

본 연구에서 사용한 수학적 추론 능력 및 오류 유형 검사지는 유세희(2009)가 사용한 수학적 추론 능력 평가 문항이다. 유세희는 초등학교 5학년 학생들에게 적용하였으나 연구 시기가 1학기 초이므로 본 연구에서는 6학년 학생을 대상으로 검사를 실시하였다. 문항은 귀납적·유비적·연역적 추론 각각에 2개 하위 유형으로 나누고, 다시 각 하위 영역별로 3문항씩 전체 18 문항으로 구성되어 있다. 각 문항별 구체적 내용은 <표 4>와 같다.

<표 4> 수학적 추론 검사지의 문항별내용

수학적 추론의 유형		평가내용	문항 수
귀납적 추론	계열의 완성	<ul style="list-style-type: none"> • 규칙성을 갖는 도형의 계열 찾기 • 다각형의 대각선의 수 찾기 • 정사각형의 개수 찾기 	3 (1~3번)
	분류	<ul style="list-style-type: none"> • 입체도형 완성하기 • 전개도 분류하기 • 직육면체의 성질 	3 (4~6번)
유비적 추론	비율 유추	<ul style="list-style-type: none"> • 입체도형 완성하기 • 겹쳐지는 도형의 성질 추론하기 • 돌리기로 무늬 만들기 	3 (7~9번)
	영역 간 유추	<ul style="list-style-type: none"> • 삼각형을 이용하여 사각형 덮기 • 직육면체를 테이프로 묶기 • 평행한 선분 사이의 각 구하기 	3 (10~12번)
연역적 추론	범주적 삼단논법	<ul style="list-style-type: none"> • 접대칭 도형의 대응변의 길이 • 선대칭 도형의 대응각의 크기 • 평행한 선분 사이의 각 구하기 	3 (13~15번)
	선형 삼단 논법	<ul style="list-style-type: none"> • 여러 가지 각 찾기 • 정다각형의 변의 수 • 여러 가지 도형의 종류 	3 (16~18번)
계			18

3. 연구 절차

본 연구를 수행하기 위하여 먼저 수학적 추론 능력 및 오류 유형에 대한 문헌 분석을 실시하였고, 이를 토대로 검사도구를 선정한 후, 본 조사 실시에 앞서 문항들의 양호도를 알아보기 위해 초등수학영재 15명과 일반학생 15명을 대상으로 예비검사를 실시하였다. 예비검사 결과 큰 문제점이 없어 원안 검사도구를 사용하여 2013년 4월 3일~4월 6일 본 검사를 실시하였다. 수학적 추론 능력 검사지에 대해 초등수학영재 63명과 일반학생 63의 검사지를 모두 회수하였고, 확인 결과 모두 응답에 이상이 없었으므로 126부의 자료가 최종 연구 자료로 활용되었다.

4. 자료 처리

가. 귀납적 추론 능력 평가 기준

본 연구에 사용된 귀납적 추론 평가 기준은 김은희(2002)의 수학적 추론 능력 평가 기준을 수정·보완하여 사용하였다. 김은희(2002)의 연구는 중학교 2학년을 대상으로 하므로 귀납적 추론 능력의 평가 범주로 일반화가 있으나 초등학교 6학년 수준에서는 수학적 기호를 사용한 일반화가 교육과정에 나타나지 않으므로, 본 연구에서는 일반화를 평가 범주에서 삭제하여 귀납적 추론 과정을 자료 수집과 규칙 추측으로 나누어 각 3점을 만점으로 하였다. 귀납적 추론 능력의 평가 기준은 <표 5>와 같다.

<표 5> 귀납적 추론 능력의 평가 기준

평가 범주	평가 관점	점수	평가 기준
자료 수집 (I)	I-1. 자료의 적절성	3	일반적인 규칙을 찾기 적절하고 정확한 자료를 충분히 수집
	I-2. 자료의 정확성	2	자료의 충분성, 적절성, 정확성에서 부분적으로 부족한 자료 수집
	I-3. 자료의 충분성	1	문제해결에 적절하지 않지만 규칙을 찾으려는 의도로 자료 수집
	I-4. 자료의 체계성	0	규칙을 찾으려는 의도 없이 단순히 자료를 나열하였거나 시도하지 않음
규칙 추측 (II)	II-1. 자료 분석 능력 (비교, 대조, 분류)	3	일반적인 규칙을 정확히 찾음
	II-2. 규칙의 정확성	2	·규칙의 일반성, 정확성이 부분적으로 부족함 ·문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음(자료 분석 능력)
	II-3. 규칙의 일반성	1	자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음
		0	시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련 없는 단순한 규칙을 찾음

나. 유비적 추론 능력 평가 기준

본 연구에 사용된 유비적 추론 평가 기준은 김은희(2002)의 수학적 추론 능력 평가 기준을 사용하였다. 유비적 추론 능력의 평가 기준은 <표 6>과 같다.

<표 6> 유비적 추론 능력의 평가 기준

평가 범주	평가 관점	점수	평가 기준
접근과정 (I)	I-1. 유사성 인식 · 유사 관계의 근거 (구조적 표면적 유사성) · 문제 해결과의 관련 I-2. 기저 상황의 핵심 파악	3	두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저 상황의 핵심을 완전히 파악함
		2	두 상황의 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심 파악이 다소 부족함
		1	두 상황의 비교가 이루어졌으나 구조적 유사성을 인식하지 못함
		0	두 상황의 구조적 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함
사용과정 (II)	III-1. 대응의 타당성 (기저, 표적 상황의 핵심 요소의 대응) III-2. 적용의 유연성 (수학적 조작 능력, 표적 상황의 특수성 고려) III-3. 대응의 일관성	3	타당한 대응을 통해 표적 상황을 유연성 있게 해결함
		2	타당한 대응을 하였으나 적용과정의 유연성이 다소 부족함
		1	·대응, 적용이 부분적으로 이루어짐 ·타당하지 못하지만 근거와 일관된 적용을 함
		0	두 상황의 구조적인 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함

다. 연역적 추론 능력 평가 기준

본 연구에 사용된 연역적 추론 평가 기준은 김은희(2002)의 수학적 추론 능력 평가 기준에 따랐다. 연역적 추론 능력의 평가 기준은 <표 7>과 같다.

<표 7> 연역적 추론 능력의 평가 기준

평가 범주	평가 관점	점수	평가 기준
근거 제시 (증명의 구상) (I)	I-1. 근거의 타당성 (분석적, 종합적 사고, 보조 요소 수집) I-2. 근거의 일반성	4	결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함(사소한 실수나 관련업이 제시된 옳은 근거는 고려하지 않음)
		3	결론을 정당화하기 위한 일반적인 근거를 구상하였으나 중요한 추론 단계에서 부분적으로 타당하지 못한 근거를 제시함
		2	타당하지만 일반적이지 못한 근거를 제시함
		1	전반적으로 타당하지 않은 근거를 제시하였거나 시도하지 않음
		0	타당하지 않은 근거를 제시하거나 시도하지 않음
근거의 종합 (II)	III-1. 논리성 (이유제시, 진술의 일관성, 추론 규칙) III-2. 추론 단계 III-3. 수학적 언어 사용	3	모든 추론 단계를 논리적으로 기술함
		2	추론 단계가 부분적으로 생략되었거나 기술의 논리성이 다소 부족함
		1	부분적으로 논리성을 보임
		0	결론과 관련 없는 근거를 단순히 나열하였거나 시도하지 않음

라. 서술형 평가에서 나타나는 오류의 유형

본 연구에서 서술형 평가에 나타나는 오류의 유형은 정현도 외(2010)의 것을 수정·보완하여 사용하였다. 문제해결과정에서 정답을 찾았으나 풀이과정이 많이 생략된 경우와 적게 생략된 경우의 차이가 커서 두 가지를 구분하여 풀이과정의 생략1과 풀이과정의 생략2로 나누었다. 또 응답을 하지 않은 경우는 무응답으로 처리하였고, 오류가 없는 경우 오류없음으로 처리하였다. 본 연구에 사용된 서술형 평가에서 나타나는 오류의 범주는 <표 8>과 같다.

<표 8> 서술형 평가에서 나타나는 오류의 유형

대분류	키워드	오류유형
개념적 오류	읽기	문항 이해의 오류
	이해	개념 원리의 오류
	변환	자료 사용의 오류
기술적 오류	처리	풀이 과정의 오류
	기록	기록 단계의 오류
	생략	풀이 과정의 생략 1 풀이 과정의 생략 2
무응답	무응답	무응답
오류없음	오류 없음	오류없음

수학적 추론 능력은 귀납적 추론 능력, 유비적 추론 능력, 연역적 추론 능력의 세 가지 범주로 나누었고, 다시 각 범주를 두 가지 하위 범주로 나누었다. 각 하위 범주별로 3문항이며 문항별로 다시 두 개의 범주로 나누어 채점하였다. 두 집단 간 수학적 추론 능력 및 각 하위 범주의 채점 결과 값이 차이가 있는 것을 분석하기 위하여 평균차이 검정인 t-검정을 실시하였고, 각 문항별로 수학적 추론 능력 수준(0, 1, 2, 3)의 차이가 있는지를 비교하기 위하여 χ^2 -검정을 하였으며, 모든 분석에서 유의수준은 0.05로 설정하였다. 오류 유형의 분석은 개념적 오류와 기술적 오류의 두 가지 범주로 나누었고, 다시 각 범주를 세 가지의 하위 유형으로 나누었다. 초등수학영재와 일반학생의 오류 유형별 빈도를 구하였고, 백분율로 나타내어 분석하였다.

IV. 연구 결과 분석

1. 초등수학영재와 일반학생 간의 수학적 추론 능력 전체의 비교

수학적 추론 능력 전체에 대해 초등수학영재와 일반학생 집단 간 평균 차이를 알아보기 위하여 t-검정을 실시한 결과는 <표 9>와 같다.

<표 9> 초등수학영재와 일반학생의 수학적 추론 능력 전체 비교 결과

영역구분	집단구분	평균	표준편차	t	p
수학적 추론 능력	초등수학영재	81.8095	10.92475	9.743	.000*
	일반학생	59.1270	14.90236		

(*p<.05)

<표 9>에 의하면 초등수학영재와 일반학생 간의 수학적 추론 능력에서 유의미한 차이를 보이고 있다(t=9.743, p<.05). 이는 초등수학영재가 일반학생들보다 더 높은 수학적 추론 능력을 가지고 있음을 의미한다.

2. 초등수학영재와 일반학생 간의 추론 능력 하위 범주별 비교

가. 초등수학영재와 일반학생 간의 귀납적 추론 능력 비교

초등수학영재와 일반학생 간의 귀납적 추론 능력을 비교하기 위하여 t-검정을 실시한 결과는 <표 10>과 같다.

<표 10> 초등수학영재와 일반학생간의 귀납적 추론 능력 분석 결과

영역구분	집단구분	평균	표준편차	t	p
계열의 완성	초등수학영재	15.6825	2.66897	6.028	.000*
	일반학생	12.2857	3.58954		
분류	초등수학영재	13.2698	3.38977	5.298	.000*
	일반학생	9.9524	3.63419		
귀납적 추론	초등수학영재	28.9524	4.57352	7.307	.000*
	일반학생	22.2381	5.68165		

(*p<.05)

<표 10>에 의하면, 초등수학영재와 일반학생은 귀납적 추론 능력에서 유의미한 차이를 보이고 있다($t=7.307, p<.05$). 일반학생은 약 22.24점이나 초등수학영재는 약 28.95점이다. 이는 초등수학영재가 일반학생들보다 더 높은 귀납적 추론 능력을 가지고 있음을 의미한다. 하위 요소인 계열의 완성($t=6.028, p<.05$), 분류($t=5.298, p<.05$)에서 모두 초등수학영재가 일반학생보다 귀납적 추론 능력이 높은 것으로 나타났다.

나. 초등수학영재와 일반학생 간의 유비적 추론 능력 비교

초등수학영재와 일반학생 간의 유비적 추론 능력 비교를 위하여 t-검정을 실시한 결과는 <표 11>과 같다.

<표 11> 초등수학영재와 일반학생간의 유비적 추론 능력 분석 결과

영역구분	집단구분	평균	표준편차	t	p
비율적 유추	일반학생	11.9048	3.60875	6.017	.000*
	초등수학영재	15.2698	2.58536		
영역간 유추	일반학생	8.0000	4.77561	7.473	.000*
	초등수학영재	13.6984	3.71846		
유비적 추론	일반학생	19.9048	6.89954	8.558	.000*
	초등수학영재	28.9683	4.80245		

(* $p<.05$)

<표 11>에 의하면, 초등수학영재와 일반학생은 유비적 추론 능력에서 유의미한 차이를 보이고 있다($t=8.558, p<.05$). 일반학생은 약 19.90점이나 초등수학영재는 약 28.96점이다. 이는 초등수학영재가 일반학생들보다 더 높은 귀납적 추론 능력을 가지고 있음을 의미한다. 비율적 유추($t=6.017, p<.05$), 영역간 유추($t=7.473, p<.05$)에서 모두 초등수학영재가 일반학생보다 유비적 추론 능력이 높은 것으로 나타났다.

다. 초등수학영재와 일반학생 간의 연역적 추론 능력 비교

초등수학영재와 일반학생 간의 연역적 추론 능력 비교를 위하여 t-검정을 실시한 결과는 <표 12>와 같다.

<표 12> 초등수학영재와 일반학생간의 연역적 추론 능력 분석 결과

영역구분	집단구분	평균	표준편차	t	p
범주적 삼단 논법	일반학생	6.9683	2.37574	8.863	.000*
	초등수학영재	11.2857	3.05027		
선형 삼단 논법	일반학생	10.0159	4.14064	3.451	.001*
	초등수학영재	12.6032	4.27498		
연역적 추론	일반학생	16.9841	5.92831	6.631	.000*
	초등수학영재	23.8889	5.75890		

(* $p<.05$)

<표 12>에 의하면, 초등수학영재와 일반학생은 연역적 추론 능력에서 유의미한 차이를

보이고 있다($t=6.631, p<.05$). 일반학생은 약 16.98점이나 초등수학영재는 약 23.89점이다. 이는 초등수학영재가 일반학생들보다 더 높은 연역적 추론 능력을 가지고 있음을 의미한다. 범주적 삼단 논법($t=8.863, p<.05$), 선형 삼단 논법($t=3.451, p<.05$)에서 모두 초등수학영재가 일반학생보다 연역적 추론 능력이 높은 것으로 나타났다.

3. 초등수학영재와 일반학생간의 추론 능력 비교 분석 예시

여기서는 초등수학영재와 일반학생 간의 추론 능력의 하위 범주별로 의미 있게 차이가 나는 문항을 하나씩 선정하여 자세히 분석해 보고자 한다.

가. 초등수학영재와 일반학생간의 귀납적 추론 능력 비교 분석 예시

귀납적 추론 능력을 비교하기 위한 문항은 1번부터 6번까지 6문항이다. 이 중에서 2번 문항에 대해 예를 들어 알아본다.

2. 다각형의 대각선을 그려봅시다.

(1) 다각형에 대각선을 그어 보고, 각 도형의 대각선의 수를 구하시오.
삼각형 ()개 사각형 ()개 오각형 ()개 육각형 ()개
위 문제를 참고하여 십각형의 대각선의 수를 구하시오. ()개
문제를 어떻게 풀었는지 설명해보시오.

1) 문항 2의 초등수학영재와 일반학생의 귀납적 추론 능력 평가 기준 및 결과
문항 2에 대하여 수학적 추론 능력을 평가하기 위한 기준은 <표 13>과 같다.

<표 13> 문항 2의 귀납적 추론 능력 평가 기준

평가 범주	점수	추론 능력 평가 기준	문항 2에 대한 평가 기준
자료 수집	3점	일반적인 규칙을 찾기 적절하고 정확한 자료를 충분히 수집	<ul style="list-style-type: none"> 삼각형 사각형 오각형 육각형의 대각선 개 수의 자료를 찾음 이를 근거로 대각선의 개수가 변의 수가 증가할수록 +2, +3, +4...씩 증가한다는 것을 찾아냄 다각형의 한 점에서 그릴 수 있는 대각선의 개수의 자료를 정확히 찾아냄 자료의 체계성이 우수하고 정확하며 수집한 자료를 추론에 활용하였음
	2점	자료의 충분성, 적절성, 정확성에서 부분적으로 부족한 자료 수집	삼각형, 사각형, 오각형, 육각형까지 정확한 자료를 찾았으나 자료의 체계성이 부족하고 수집한 자료를 추론에 제대로 활용하지 못하였음
	1점	문제해결에 적절하지 않지만 규칙을 찾으려는 의도로 자료	삼각형 사각형 오각형 육각형의 대각선의 개수에 대한 자료를 수집하였으나 부분적으로 부정확한 자

		수집	료가 있음
	0점	규칙을 찾으려는 의도 없이 단순히 자료를 나열하였거나 시도하지 않음	•규칙을 찾기 위한 자료를 수집하지 않거나 찾은 자료가 부정확함
규칙 추측	3점	일반적인 규칙을 정확히 찾음	•도형의 변의 수가 증가할수록 대각선 수는 +2, +3, +4씩 증가하며 십각형에 정확히 적용함 •한 점에서 나오는 대각선 수의 규칙을 찾아 십각형에 정확히 적용함 예) $7+7+6+5+4+3+2+1=35$ •일반화된 공식을 찾아 대입함 예) (한 점에서 나오는 대각선의 수) \times (각의 수) $\div 2$
	2점	규칙의 일반성 정확성이 부분적으로 부족함 문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음	•도형의 변의 수가 증가할수록 대각선 수는 +2, +3, +4...씩 증가하는 규칙성을 찾았으나 십각형에 적용함에 있어 부분적인 오류를 범함. •규칙을 정확히 기술하지 않고 그렸으나 한 점에서 나오는 대각선의 규칙을 찾아 정답을 찾음
	1점	자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음	•도형의 변의 수가 증가할수록 대각선 수는 +2, +3, +4...씩 증가하는 규칙성을 찾으려고 시도하였으나 부분적인 규칙성만을 찾아냄. •규칙을 정확히 기술하지 않고 그렸다고 하였으나 정답을 찾지 못함.
	0점	시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련없는 단순한 규칙을 찾음	•규칙을 기술하지 못하거나 기술한 규칙이 타당하지 않음.

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 문항 2의 초등수학영재와 일반학생의 계열의 완성에 대한 자료 수집을 분석한 결과는 <표 14>와 같다.

<표 14> 문항 2의 초등수학영재와 일반학생의 자료 수집 능력 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	5	18	16	24	15.239	.002*
	%	7.9%	28.6%	25.4%	38.1%		
초등수학영재	N	0	11	8	44		
	%	0.0%	17.5%	12.7%	69.8%		
전체학생	N	5	29	24	68		
	%	4.0%	23.0%	19.0%	54.0%		

(*p<.05)

문항 2에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 자료 수집에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 초등수학영재와 일반학생의 계열의 완성에 대한 규칙 추측 능력을 분석한 결과는 <표 15>와 같다.

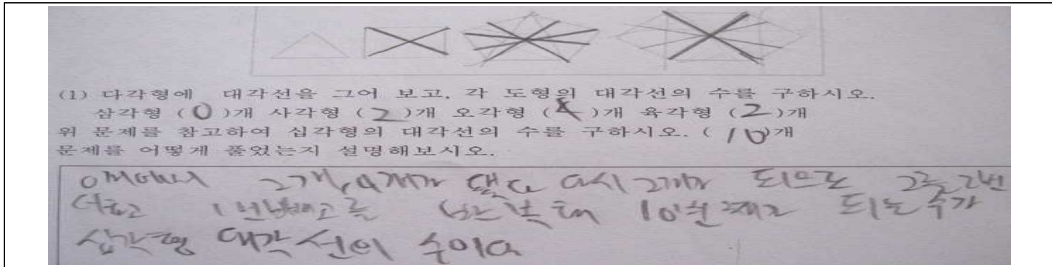
<표 15> 문항 2의 초등수학영재와 일반학생의 규칙 추측 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	22	15	7	19	19.940	.000*
	%	34.9%	23.8%	11.1%	30.2%		
초등수학영재	N	4	11	10	38		
	%	6.3%	17.5%	15.9%	60.3%		
전체학생	N	26	26	17	57		
	%	20.6%	20.6%	13.5%	45.2%		

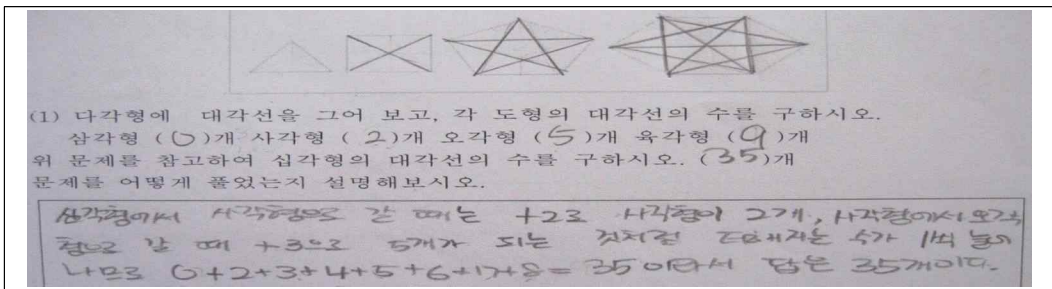
(*p<.05)

문항 2에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 규칙 추측에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

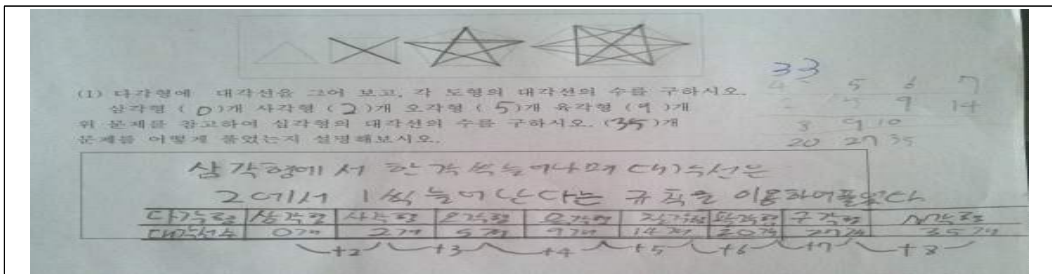
2) 문항 2의 초등수학영재와 일반학생의 귀납적 추론 능력 사례



[그림 1] 문항 2의 대표적인 일반학생의 자료 수집 및 규칙 추측 유형(1점)



[그림 2] 문항 2의 대표적인 초등수학영재의 자료 수집 및 규칙 추측 유형(3점)



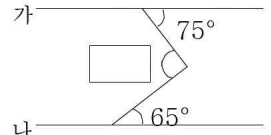
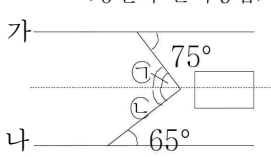
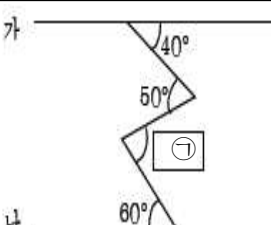
[그림 3] 문항 2의 자료의 체계성이 잘 드러난 초등수학영재의 응답 유형(3점)

문항 2의 자료 수집에서 전체적으로 54.0%가 적절하고 정확하게 자료를 찾아 3점을 받았다. 초등수학영재는 69.8%가 3점을 받은 것에 비해 일반학생은 38.1%였다. 일반학생은 1점이 28.6%, 2점이 25.4%였는데, 1점의 경우 [그림 1]과 같이 주어진 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형까지 대각선 개수를 부분적으로 찾지 못해 자료의 정확성이 떨어진 경우이다. 2점은 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형까지 대각선 개수를 정확하게 찾았으나, 수집한 자료를 제대로 분석하지 못해 문제해결에 활용하지 못한 경우이다. 이를 통해 초등수학영재가 일반학생에 비해 보다 정확하고 적절한 자료를 충분하게 수집하였음을 확인할 수 있다. 일반학생의 경우 부정확한 자료를 바탕으로 규칙을 추측하여 규칙 추측에서도 낮은 점수를 받았음을 알 수 있다. 다만 자료의 수집이 정확하게 된 경우에는 규칙을 올바르게 추측한 비율이 일반생과 초등수학영재의 비율이 비슷함을 확인할 수 있는데, 이는 일반학생 중에도 자료 수집을 정확하게 한 학생들이 학업성취도가 상위권일 것이기 때문이라고 추측된다. 초등수학영재의 경우 일반학생들에게서는 볼 수 없었던 [그림 3]과 같이 자료의 체계성이 뛰어난 응답(3점)을 보인 경우가 있었다.

나. 초등수학영재와 일반학생 간의 유비적 추론 능력 비교 분석 예시

유비적 추론 능력을 비교하기 위한 문항은 7번부터 12번까지 6문항이다. 이 중에서 12번 문항에 대해 예를 들어 알아본다.

12. <보기>의 문제를 경원이는 다음과 같이 풀었습니다.

<p><보기> 직선 가와 나 는 서로 평행선입니다. □ 안에 알맞은 각의 크기는 몇 도입니까?</p> 	<p style="text-align: center;"><경원의 풀이방법></p>  <p>가와 나에 평행한 보조선을 그으면 각 ㉠은 75°와 크기가 같고, 각 ㉡은 65°와 그 크기가 같으므로</p> $75^\circ + 65^\circ = 140^\circ$
<p>경원의 풀이 방법을 보고 다음 문제를 해결하십시오.</p> <p><문제> 아래 그림에서 직선 가와 나가 평행일 때, 각 ㉠의 크기는 몇 도 입니까?</p>	
	<p style="text-align: center;"><문제의 풀이 방법을 설명하십시오.></p>

1) 문항 12의 초등수학영재와 일반학생의 유비적 추론 능력 평가 기준 및 결과 문항 12에 대하여 수학적 추론 능력을 평가하기 위한 기준은 <표 16>과 같다.

<표 16> 문항 12의 유비적 추론 능력 평가 기준

평가 범주	점수	추론 능력 평가 기준	문항 12에 대한 평가 기준
접근 과정	3점	두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저 상황의 핵심을 완전히 파악함	<ul style="list-style-type: none"> ●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정을 정확히 파악함
	2점	두 상황의 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심 파악이 다소 부족함	<ul style="list-style-type: none"> ●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정을 파악하였으나 부분적으로 부족한 부분이 있음 ●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정에 대한 기술이 부분적으로 논리적이지 못함 ●<보기>의 기저 상황의 핵심을 이용하지 않고 세로선이나 대각선과 이어지는 직선을 그어 삼각형의 성질을 이용하여 문제를 해결함
	1점	두 상황의 비교가 이루어졌으나 구조적 유사성을 인식하지 못함	<ul style="list-style-type: none"> ●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정에 대하여 핵심을 파악하지 못하였으나, 부분적인 구조적 유사성을 파악함 ●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정에 대해 단순히 ‘생각해보니’, 또는 ‘규칙이 그러하다’ 등으로 기술함
	0점	두 상황의 구조적 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함	●<보기>에서 보조선을 그어 가운데 각을 구하는 과정에 대하여 핵심을 파악하지 못하였고 부분적인 추론 능력도 보이지 않음
사용 과정	3점	타당한 대응을 통해 표적 상황을 유연성 있게 해결함	●기저 상황의 핵심을 파악하여 보조선을 2개 그어서 위의 각이 10° , 아래 각이 60° 임을 찾아 구하고자 하는 각이 70° 임을 정확하게 찾아냄
	2점	타당한 대응을 하였으나 적용과정의 유연성이 다소 부족함	<ul style="list-style-type: none"> ●보조선을 두개 그었으나 부분적인 오류를 범하여 정확한 각을 찾아내지는 못함 ●<보기>의 기저 상황의 핵심을 이용하지 않고 세로선을 그어 삼각형의 성질을 이용하여 문제를 해결함
	1점	대응, 적용이 부분적으로 이루어짐 타당하지 못하지만 근거와 일관된 적용을 함	<ul style="list-style-type: none"> ●기저 상황의 핵심을 잘못 파악하였으나 나름의 논리적인 추론과정을 거쳐 적용함 ●보조선을 1개 밖에 긋지 않아 적용이 유연하게 이루어지지 않음
	0점	두 상황의 구조적인 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함	●기저 상황의 핵심을 파악하지 못하였고, 적용이 논리적이지 않음

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 문항 12의 초등수학영재와 일반학생의 영역간 유추에 대한 접근과정을 분석한 결과는 <표 17>과 같다.

<표 17> 문항 12의 초등수학영재와 일반학생의 접근과정 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	26	9	21	7	30.643	.000*
	%	41.3%	14.3%	33.3%	11.1%		
초등수학영재	N	7	2	23	31		
	%	11.1%	3.2%	36.5%	49.2%		
전체학생	N	33	11	44	38		
	%	26.2%	8.7%	34.9%	30.2%		

(*p<.05)

문항 12에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 접근과정에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 초등수학영재와 일반학생의 영역 간 유추에 대한 사용과정을 분석한 결과는 <표 18>과 같다.

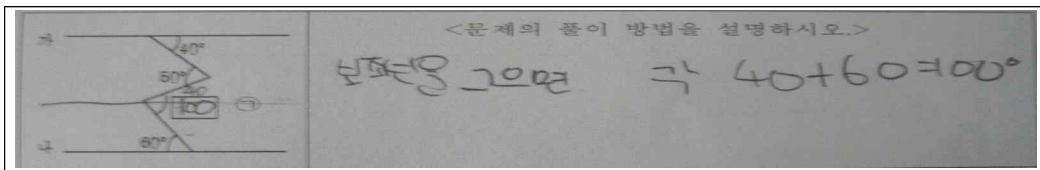
<표 18> 문항 12의 초등수학영재와 일반학생의 사용과정 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	26	27	4	6	32.325	.000*
	%	41.3%	42.9%	6.3%	9.5%		
초등수학영재	N	7	16	10	30		
	%	11.1%	25.4%	15.9%	47.6%		
전체학생	N	33	43	14	36		
	%	26.2%	34.1%	11.1%	28.6%		

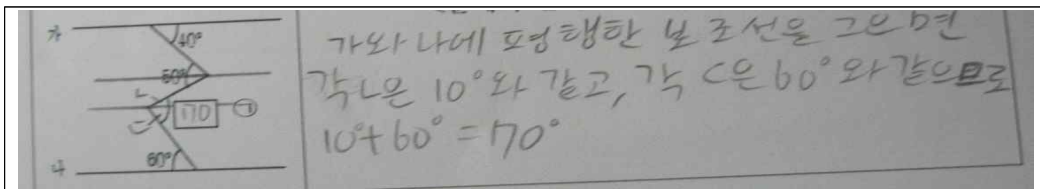
(*p<.05)

문항 12에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 접근과정에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

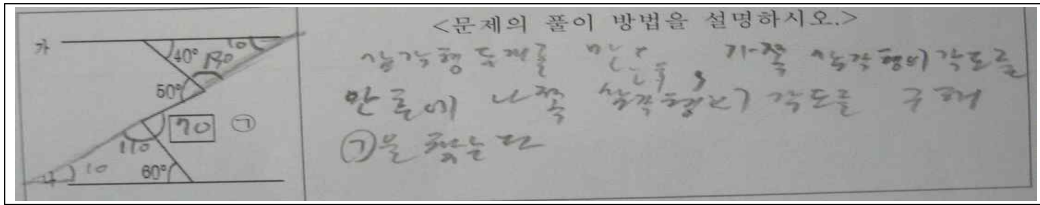
2) 문항 12의 초등수학영재와 일반학생의 유비적 추론 능력 사례



[그림 4] 문항 12의 대표적인 일반학생의 접근과정 및 사용과정 유형



[그림 5] 문항 12의 대표적인 초등수학영재의 응답 유형



[그림 6] 문항 12의 다른 방법을 이용한 초등수학영재의 정답 유형

문항 12의 접근과정에서 전체적으로 30.2%가 두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저상황의 핵심을 파악하여 3점을 받았다. 초등수학영재는 49.2%가 3점을 받은 것에 비해 일반학생은 11.1%만이 3점을 받았다. 전체적으로 결과가 낮은 편인데, 문항 12의 경우 한 개의 보조선을 긋는 기저상황의 핵심을 파악하더라도 적용에서 기저상황의 핵심을 응용하여 두 개의 보조선을 그어야 하는 난이도가 높은 문제이기 때문이다. 접근과정에서 2, 3점을 받은 학생들은 기저 상황의 핵심을 파악했다고 볼 수 있다. 접근과정에서 2, 3점을 받은 일반학생들이 44.4%였으나 사용과정에서 2, 3점을 받은 일반학생은 15.8%에 불과했다. 일반학생들은 [그림 4]와 같이 기저상황에서 파악한 핵심을 유연성있게 적용하지 못하였다. 이에 비해 초등수학영재는 접근과정에서 2, 3점을 받은 학생이 85.7%이고, 사용과정에서는 [그림 5]와 같이 기저상황에서 파악한 핵심을 유연하게 적용하여 2, 3점을 받은 학생들이 63.5%였다. 이를 통해 초등수학영재가 일반학생보다 기저상황의 핵심을 잘 파악할 뿐만 아니라 적용의 유연성도 높다는 것을 알 수 있다. 또 [그림 6]과 같이 기저상황의 핵심을 파악하지는 못하였으나 다른 형태로 보조선을 그어 문제를 해결한 경우가 있었으며, 이러한 경우는 일반학생보다 초등수학영재에게서 더 많았다.

다. 초등수학영재와 일반학생 간의 연역적 추론 능력 비교 분석 예시

연역적 추론 능력을 비교하기 위한 문항은 13번부터 18번까지 6문항이다. 이 중에서 13번 문항에 대해 예를 들어 알아본다.

13. 두 삼각형은 선대칭 위치에 있는 도형입니다. 각 크기의 크기는 얼마입니까?

()°

그 이유를 설명하시오.

1) 문항 13의 초등수학영재와 일반학생의 연역적 추론 능력 평가 기준 및 결과 문항 13에 대하여 연역적 추론 능력을 평가하기 위한 기준은 <표 19>와 같다.

<표 19> 문항 13의 연역적 추론 능력 평가 기준

평가 범주	점수	추론 능력 평가 기준	문항 13에 대한 평가 기준
근거 제시 (증명의 구성)	3점	결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형이 합동임을 제시함 •합동인 도형의 대응각이 같음을 제시함 •삼각형 내각의 합이 180도임을 제시함 •세 가지 근거 중 두 가지 이상을 제시함(선대칭의 위치에 있으므로 두 삼각형이 합동임을 생략하고 두 삼각형의 대응각이 같다고 하더라도 인정함).
	2점	결론을 정당화하기 위한 일반적인 근거를 구상하였으나 중요한 추론 단계에서 부분적으로 타당하지 못한 근거를 제시함	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형이 합동임을 제시함 •합동인 도형의 대응각이 같음을 제시함 •삼각형 내각의 합이 180도임을 제시함 •세 가지 근거 중 한 가지를 제시함
	1점	타당하지만 일반적이지 못한 근거를 제시함	<ul style="list-style-type: none"> •$180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ$ 만을 제시함 •정답을 찾았으나 추론에서 일반적인 근거를 찾기 어려움
	0점	전반적으로 타당하지 않은 근거를 제시하였거나 시도하지 않음.	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형이 합동임을 제시함 •합동인 도형의 대응각이 같음을 제시함 •삼각형 내각의 합이 180도임을 제시함 •세 가지 근거 중 한 가지도 제시하지 않음
근거의 종합	3점	모든 추론 단계를 논리적으로 기술함	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형은 합동이다. 두 삼각형은 선대칭 위치에 있으므로 합동이다. 합동인 두 삼각형의 대응각은 같다. 삼각형 세 내각의 합은 180° 이다. 따라서 각 $\angle C$는 $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ 이다. 각 $\angle C$의 대응각은 각 $\angle B$이므로 각 $\angle B$의 크기는 40° 이다.(선대칭에 있으므로 두 삼각형이 합동임을 생략하고 두 삼각형의 대응각이 같다고 하더라도 인정함). •추론 단계에서 생략된 부분이 없음
	2점	추론 단계가 부분적으로 생략되었거나 기술의 논리성이 다소 부족함	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형은 합동이다. 두 삼각형은 선대칭 위치에 있으므로 합동이다. 합동인 두 삼각형의 대응각은 같다. 삼각형 세 내각의 합은 180° 이다. 따라서 각 $\angle C$는 $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ 이다. 각 $\angle C$의 대응각은 각 $\angle B$이므로 각 $\angle B$의 크기는 40° 이다. •추론 단계에서 1-2개가 생략됨
	1점	부분적으로 논리성을 보임 타당하지 못하지만 근거와 일관된 적용을 함	<ul style="list-style-type: none"> •선대칭 위치에 있는 도형은 합동이다. 두 삼각형은 선대칭 위치에 있으므로 합동이다. 합동인 두 삼각형의 대응각은 같다. 삼각형 세 내각의 합은 180° 이다. 따라서 각 $\angle C$는 $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ 이다. 각 $\angle C$의 대응각은 각 $\angle B$이므로 각 $\angle B$의 크기는 40° 이다.

		<ul style="list-style-type: none"> •추론 단계에서 3-4개가 생략됨 •접속사 사용과 이유제시가 부족함. •$180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ$ 만을 제시함.
0점	결론과 관련 없는 근거를 단순히 나열하였거나 시도하지 않음	•결론과 관련 없는 근거를 단순히 나열하였거나 시도하지 않음

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 문항 13의 초등수학영재와 일반학생의 범주적 삼단 논법에 대한 근거 제시를 분석한 결과는 <표 20>과 같다.

<표 20> 문항 13의 초등수학영재와 일반학생의 근거 제시 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	5	36	21	1	48.033	.000*
	%	7.9%	57.1%	33.3%	1.6%		
초등수학영재	N	0	6	37	20		
	%	0.0%	9.5%	58.7%	31.7%		
전체학생	N	5	42	58	21		
	%	4.0%	33.3%	46.0%	16.7%		

(*p<.05)

문항 13에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 근거 제시에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

수학적 추론 능력 평가 기준을 통하여 초등수학영재와 일반학생의 범주적 삼단 논법에 대한 근거의 종합을 분석한 결과는 <표 21>과 같다.

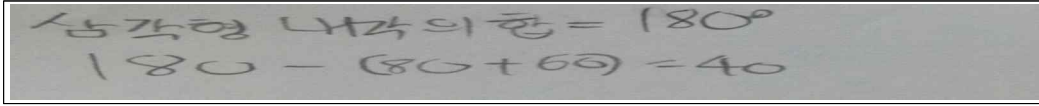
<표 21> 문항 13의 초등수학영재와 일반학생의 근거 종합 비교

구분		0	1	2	3	χ^2	p
일반학생	N	6	54	3	0	30.496	.000*
	%	9.5%	85.7%	4.8%	0.0%		
초등수학영재	N	0	35	22	6		
	%	0.0%	55.6%	34.9%	9.5%		
전체학생	N	6	89	25	6		
	%	4.8%	70.6%	19.8%	4.8%		

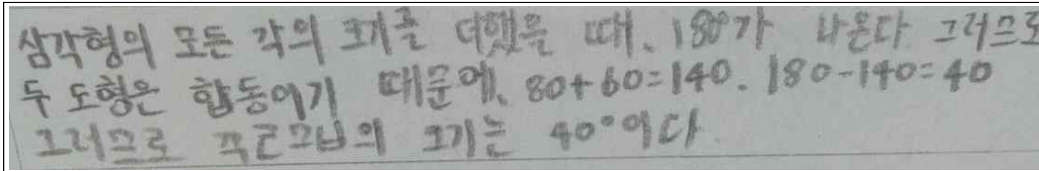
(*p<.05)

문항 13에 대해서 초등수학영재와 일반학생 간 근거의 종합에서는 차이를 보이며(p<.05), 초등수학영재의 경우 2, 3점에 해당하는 학생이 많이 분포되어 관계가 있는 것으로 나타났다.

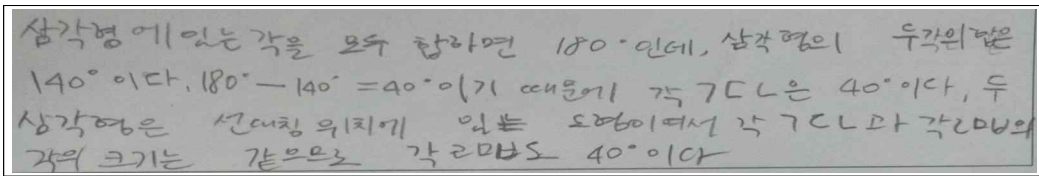
2) 문항 13의 초등수학영재와 일반학생의 수학적 추론 능력 사례



[그림 7] 문항 13의 대표적인 일반학생의 근거 제시 및 근거 종합 유형



[그림 8] 문항 13의 대표적인 초등수학영재의 근거 제시 및 근거 종합 유형



[그림 9] 문항 13의 논리적 비약이 없는 초등수학영재의 응답 유형

문항 13의 근거의 제시에서 전체적으로 16.7%가 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시하여 3점을 받았다. 초등수학영재는 31.7%가 3점을 받은 것에 비해 일반학생은 1.6%가 3점을 받았다. 또한 근거의 종합에서는 일반학생은 3점이 0%였고 초등수학영재도 9.5%에 불과했다. 문제를 해결하기 위해서 ‘선대칭 위치에 있으므로 두 삼각형이 합동이다’, ‘삼각형 세 각의 합은 180°이다’라는 두 가지 일반적인 근거를 찾아서 제시해야만 논리적인 비약 없이 문제를 해결할 수 있는데, 이러한 근거를 제시하였더라도 사고 과정을 연역적으로 오류 없이 추론하는 것은 일반학생뿐만 아니라 초등수학영재에게도 어려운 것으로 보인다. 문항의 정답을 찾는 것은 어렵지 않지만, 정답을 찾아가는 과정에서 타당하고 일반적인 근거를 모두 제시하는 것이 어려운 것으로 보인다. 다만 [그림 8]과 같이 초등수학영재의 경우 [그림 7]의 일반학생보다 타당하고 일반적인 근거를 많이 제시하였고 논리적인 비약이 적어서 일반학생보다 높은 점수를 얻었다. 또한 [그림 9]와 같이 논리적인 비약 없이 완전하게 추론한 경우는 일반학생에는 없었고 초등수학영재만 소수 있었다.

4. 수학적 추론에서의 초등수학영재와 일반학생의 오류 유형 분석

본 연구에서 초등수학영재와 일반학생이 서술형 문제를 해결해가는 과정에서 범한 오류 유형은 <표 22>와 같다.

<표 22> 수학적 추론에서의 초등수학영재와 일반학생의 오류 유형 빈도

오류의 유형		구분	빈도	백분율(%)
개념적 오류	문항 이해의 오류	일반학생	10	0.8
		초등수학영재	2	0.1
	개념 원리의 오류	일반학생	30	2.6
		초등수학영재	13	1.1
	자료 사용의 오류	일반학생	5	0.4
		초등수학영재	2	0.1
기술적 오류	풀이 과정의 오류	일반학생	274	24.1
		초등수학영재	140	12.3
	기록 단계의 오류	일반학생	16	1.4
		초등수학영재	30	2.6
	풀이 과정의 생략 1	일반학생	275	24.2
		초등수학영재	131	11.5
	풀이 과정의 생략 2	일반학생	137	12.1
		초등수학영재	219	19.3
오류 없음		일반학생	292	25.7
		초등수학영재	564	49.7
무응답		일반학생	95	8.3
		초등수학영재	33	2.9

초등수학영재들의 오류 없음의 비율은 49.7%로 일반학생의 25.7%보다 높게 나타났다. 즉 초등수학영재들은 일반학생들보다 오류를 적게 범하는 것으로 나타났다. 가장 많이 나타난 오류 유형은 ‘풀이과정의 생략’이다. 서술형 문제가 결론을 추론하는 문제였으므로 추론하는 과정에서 일반학생과 초등수학영재 모두 풀이 과정을 많이 생략한 것으로 나타났다. 일반학생이 36.3%, 초등수학영재도 30.8%가 풀이 과정을 생략한 것으로 나타났다. 그러나 풀이과정을 많이 생략한 ‘풀이 과정의 생략 1’ 과 풀이과정을 적게 생략한 ‘풀이 과정의 생략 2’ 로 나누어 살펴보면 일반학생은 ‘풀이과정의 생략 1’ 이 24.2%로 초등수학영재의 11.5%보다 훨씬 높다는 것을 알 수 있다. 다음으로 높은 오류의 유형은 ‘풀이과정의 오류’였다. 결론을 추론해가는 과정에서 기저상황의 핵심을 잘못 파악하거나 계산이 잘못된 경우이다. ‘문항 이해의 오류’와 ‘개념원리의 오류’, ‘자료 사용의 오류’는 낮은 비율로 나타났으나 모두 일반학생들이 초등수학영재보다 높게 나타났다. 다만 ‘기록단계의 오류’는 일반학생이 1.4%, 초등수학영재가 2.6%로 초등수학영재가 더 높게 나타났다. ‘기록단계의 오류’는 풀이 과정은 올바르게 정답을 옮겨 적는 과정에서 단순 실수를 범한 것인데, 올바른 풀이과정이 일반학생보다 초등수학영재가 더 많기 때문에 초등수학영재에게서 ‘기록단계의 오류’가 높은 것으로 보인다. 무응답의 경우 일반학생은 8.3%이고, 초등수학영재는 2.9%인데 무응답은 문제를 해결하려는 시도를 하지 않은 것을 말한다. 즉 초등수학영재들이 일반학생들보다 높은 과제집착력과 끈기를 보여준 것으로 볼 수 있다.

V. 결 론

본 연구는 영재들의 사고 과정과 인지적 특성을 파악하는데 도움을 얻기 위해 초등수학영재와 일반학생의 서술형 평가에서의 수학적 추론 능력과 오류 유형을 분석하고자 하였다.

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 초등수학영재들은 일반학생들보다 귀납적 추론 능력이 더 뛰어나다. 초등수학영재들은 자료를 수집함에 있어 적절하고 정확하며 체계적인 자료를 수집하였다. 올바른 추론을 얻기 위하여 적절한 자료의 수집이 필수적인데, 정확하고 적절한 자료를 표 등을 사용하여 체계적으로 수집한 학생들이 많았다. 잘 수집된 자료를 통해 규칙 추측에서도 더 높은 결과를 보였다. 뿐만 아니라 초등수학영재들 중 일부는 규칙을 일반화된 식으로 나타내었다.

둘째, 초등수학영재들은 일반학생들보다 유비적 추론 능력이 더 뛰어나다. 초등수학영재들은 일반학생들에 비해 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심을 더 잘 파악하는 것으로 나타났다. 또한 기저 상황의 핵심을 적용할 때 적용의 유연성을 발휘하였다.

셋째, 초등수학영재들은 일반학생들보다 연역적 추론 능력이 더 뛰어나다. 일반학생에 비하여 일반성을 가진 자료를 더 많이 찾았으며, 나름의 논리적인 추론 과정을 통해 결론을 이끌어내었다. 그러나 연역적 추론의 경우 초등수학영재와 일반학생 모두 오류 없음의 비율이 낮았다. 초등수학영재가 일반학생에 비하여 일반성을 가진 근거를 더 많이 제시하였으나 추론의 과정에서 논리적 비약이 없는 완전한 추론을 한 학생들은 많지 않았다. 특히 범주적 삼단 논법에서 이러한 현상이 두드러졌다. 선형 삼단 논법에서는 대전제가 문제에 제시되어 초등수학영재와 일반학생 모두 범주적 삼단 논법에서 보다 높은 결과를 보였다. 또 자신의 사고 과정을 일반학생에 비해 잘 전달하였다.

넷째, 초등수학영재들은 일반학생들에 비해 오류가 적다. 초등수학영재와 일반학생 모두 ‘풀이 과정의 오류’에서 가장 많은 오류를 범하였으나 초등수학영재는 일반학생에 비해 오류의 정도가 약하거나 수가 적었다. 또 일반학생들은 ‘개념 원리의 오류’나 ‘문항 이해의 오류’가 상대적으로 많은 편이었고, 초등수학영재들은 ‘기록 단계의 오류’가 많았다. 무응답의 경우 초등수학영재가 일반학생에 비해 적었고 이를 통해 초등수학영재들이 보다 높은 과제 집착력을 가지고 있음을 알 수 있었다. 그러나 초등수학영재도 오류를 범하는 학생들이 있는 것으로 나타났기 때문에 오류를 감안하여 지도할 수 있는 프로그램 개발하거나 영재 수업을 할 때 적절한 피드백을 해 줄 필요가 있다.

본 연구는 도형 영역에 대한 초등학교 6학년 일반학생과 초등수학영재의 수학적 추론 능력과 오류를 비교하였으나 연구를 더 확장하여 도형 영역 이외의 수학 영역에 대한 추론 능력과 오류 유형을 비교 분석할 필요성이 있다고 본다.

참 고 문 헌

- 구광조, 오병승, 전평국 (1995). **수학학습심리학**. 서울: 교학사.
- 김민정, 류성립 (2007). 수학영재의 특성에 관한 사례연구. **초등수학교육**, 10(1), 41-56.
- 김성민 (2008). **추론 능력 개발이 수학적 사고력 신장에 미치는 영향 비교 분석**. 동국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김은희 (2002). **수학적 추론 평가 기준에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도 방안에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지**, 2(1), 41-59.
- 남승인 (1999). 초등수학교육에 있어서의 추론 방법. **수학교육**, 8(1), 45-63.
- 박혜란 (2006). **추론 능력 향상 방안**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 방정숙 (1996). **초·중학생들의 조건 추론 능력에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 백순근 (1999). 수행평가의 이론적 기초. **초등교과교육연구**, 3. 한국교원대학교 초등교육연구소.
- 송상헌 (2004). 수학 영재들의 수학적 추론 능력 분석에 관한 연구. **과학교육논총**, 17, 17-34.
- 유세희 (2009). **초등학교 5학년 학생들의 수학적 추론 능력에 대한 실태조사**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이문정 (2000). **중학교 수행평가에서 의사소통능력에 초점을 둔 함수단원의 평가기준표 개발**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 이정임, 류성립 (2012). 초등수학영재 및 일반학생의 인지적 조합요인과 리더십의 관계 연구. **한국초등수학교육학회지**, 16(3), 337-358.
- 임지현 (2005). **도형 학습에서의 오류 찾기 활동이 수학 학업 성취도 및 추론 능력에 미치는 영향**. 대구교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 정현도, 강신포, 김성준 (2010). 초등수학 서술형 평가에서 나타나는 오류 유형 분석. **한국초등수학교육학회지**, 14(3), 885-905.
- 한국교육개발원 (1997). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(II)-검사 제작 편**, 수탁연구 CR 97-50. 서울: 한국교육개발원.
- House, P. A. (1987). *Providing opportunities for the mathematically gifted, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago Press.
- NCTM (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council

of Teacher of Mathematics.

- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Polya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. In G. polya (Ed.), *Mathematics and plausible reasoning, Vol. 1*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(1), 163-172.
- Sternberg, R. J. (1982). Reasoning, problem solving and intelligence. In R. J. Stenberg (Ed.), *Handbook of human intelligence*. London: Cambridge University Press.

<Abstract>

Mathematical Reasoning Ability and Error Comparison through the Descriptive
Evaluation of Mathematically Gifted Elementary Students and Non-Gifted
Students

Kim, Dong Gwan³⁾; & Ryu, Sung Rim⁴⁾

The purpose of this study is to figure out the perceptual characteristics of mathematically gifted elementary students by comparing the mathematical reasoning ability and errors between mathematically gifted elementary students and non-gifted students. This research has been targeted at 63 gifted students from 5 elementary schools and 63 non-gifted students from 4 elementary schools.

The result of this research is as follows.

First, mathematically gifted elementary students have higher inductive reasoning ability compared to non-gifted students. Mathematically gifted elementary students collected proper, accurate, systematic data. Second, mathematically gifted elementary students have higher inductive analogical ability compared to non-gifted students. Mathematically gifted elementary students figure out structural similarity and background better than non-gifted students. Third, mathematically gifted elementary students have higher deductive reasoning ability compared to non-gifted students. Zero error ratio was significantly low for both mathematically gifted elementary students and non-gifted students in deductive reasoning, however, mathematically gifted elementary students presented more general and appropriate data compared to non-gifted students and less reasoning step was achieved. Also, thinking process was well delivered compared to non-gifted students. Fourth, mathematically gifted elementary students committed fewer errors in comparison with non-gifted students. Both mathematically gifted elementary students and non-gifted students made the most mistakes in solving process, however, the number of the errors was less in mathematically gifted elementary students.

Key words: mathematically gifted elementary student, descriptive evaluation, mathematical reasoning ability, error

논문접수: 2014. 03. 17

논문심사: 2014. 04. 10

게재확정: 2014. 04. 28

3) gump81@hanmail.net

4) srryu@dnue.ac.kr