

무게중심이 변동되는 차륜형 역진자의 평형점 상태에 관한 연구

A Derivation of the Equilibrium Point for a Controller of a Wheeled Inverted Pendulum with Changing Its Center of Gravity

이 세 한*
(Se-Han Lee¹)

¹Division of Mechanical Engineering, Kyungnam University

Abstract: An equilibrium point of a WIP (Wheeled Inverted Pendulum) with changing its center of gravity is derived and validated by various numerical simulations. Generally, the WIP has two equilibrium points which are unstable and stable one. The unstable one is interested in this study. To keep the WIP over the unstable equilibrium point, the WIP is consistently being adjusted. A state feedback controller for the WIP needs a control reference for the equilibrium point. The control reference can be obtained by studying an equilibrium point of the WIP based on statics. By using Lagrange method, this study is deriving dynamic equations of the WIP both with and without changing its center of gravity. Various numerical simulations are carried out to show the validation of the equilibrium point.

Keywords: wheeled inverted pendulum, equilibrium point, center of gravity, state feedback controller

I. 서론

역진자 시스템은 1965년경 Kapitza [1]에 의해서 최초로 제안되었다. 그 후, 다양한 형태를 갖는 역진자들이 소개되어 제어이론 검증[2-4] 등 여러 분야에 사용되어 왔다. 본 연구의 대상인 차륜형 역진자는 그 역진자들의 한 종류에 해당하며 역진자 시스템 특유의 비선형 특성을 그대로 계승하고 있다.

차륜형 역진자의 제어목표는 쓰러지지 않도록 횡방향으로 배치된 2개의 차륜을 제어하여 차체를 직립[5]시키는 것이다.

역진자 이론은 다양한 분야에 응용되어 왔다. 그 관련 이론들은 중력의 반대방향으로 비행하는 항공용 로켓의 자세 안정화 제어에 응용되고 있으며, 민수용으로는 2001년 상업용으로 개발된 개인용 이동수단인 SEGWAY [6], 2008년 조종 핸들을 소형화 시킨 Toyota Winglet [7] 그리고 최근에 본격적 2인승 운송수단으로 등장한 PUMA[8] 등에 응용되고 있다.

차륜형 역진자는 차체를 직립 시켜서 차체의 평형을 유지하고 있으므로 차체의 점유면적이 최소화 되는 특징이 있다. 이러한 특징은 협소한 장소에서 쉽게 운용될 수 있는 장점이 될 수 있다. 그 외에도 차륜형 역진자를 다양한 분야에서 이동체의 플랫폼으로 사용하려는 연구와 기타 관련 연구들이 [9,10] 진행되었다.

역진자의 주행조건 변동에 관한 연구로, 차륜형의 경우 역진자의 부하무게의 변화변동을 고려한 연구[11], 주행면의 경사각도를 검출하는 연구[12] 등을 들 수 있으며, 수레형 역진자의 경우 경사면 주행면을 고려한 연구[13]가 있다.

차륜형 역진자의 평형을 유지하기 하기 위해서는 차체의 무게중심은 정확히 파악되어야 한다. 실제의 차륜형 역진자

가 구현될 때, 무게중심의 위치는 정확히 파악될 수 없을 뿐만 아니라 그 위치가 파악되더라도 동작시킬 때마다 배터리의 설치 위치와 기타 부품들의 위치변동으로 인하여 그 무게중심의 위치는 변동되어 버린다. 게다가 차륜형 역진자가 응용분야의 이동체 플랫폼으로 사용되는 경우 무게중심 위치는 예측이 불가능해 진다.

본 연구에서는 차륜형 역진자의 동역학적 거동 파악을 위해서 Lagrange 기법으로 동역학 방정식을 유도하며, 평형점의 의미와 차체의 무게중심 변동에 따른 평형점 특성을 해석하고 시뮬레이션을 통하여 그 타당성을 보이도록 한다. II 장에 차륜형 역진자 시스템의 구조와 평형제어의 개략적인 개요, III 장에 동역학 방정식과 통상적인 평형점 및 무게중심에 따른 평형점 유도, IV 장에는 시뮬레이션 결과와 토론, 마지막으로 V 장에는 본 연구의 결론이 제시된다.

II. 차륜형 역진자 시스템

본 연구의 대상이 되는 차륜형 역진자의 개략적인 모습이 그림 1에 표시되어 있다. 일반적으로 알려져 있는 수레형 역진자와는 달리 차륜형 역진자는 2개의 차륜이 차체에 대하여 횡방향으로 연결되어 있어서 차륜을 제외하고 차체 전체가 역진자 역할을 하고 있다. 이러한 특징 때문에 차체 안에 부착되어 있는 기울기 센서의 본체 역시 역진자와 함께 움직이므로 그 센서의 기준점을 설정하는 것은 매우 곤란하다. 그러므로 기울기 센서로 각속도 센서인 자이로 센서가 사용되며, 그 각속도가 적분되어 최종적으로 기울기 각도로 산출되게 된다.

차륜형 역진자는 종래의 역진자의 특성으로 그대로 계승하고 있으므로 차륜형 역진자의 차체는 불안정한 상태에 있게 된다. 그러므로 평형제어가 적절히 실행되지 않으면 작은 외란에도 넘어지게 된다. 차륜형 역진자가 평형을 유지하는 원리는 막대기를 손 위에 올려놓고 평형을 유지하는 행동과

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 6. 27., 수정: 2011. 12. 23., 채택확정: 2012. 4. 22.

이세한: 경남대학교 기계공학부 (leesehan@kyungnam.ac.kr)

※ 본 연구는 2010년 경남대학교 학술연구 장려금 지원으로 이루어 졌음.

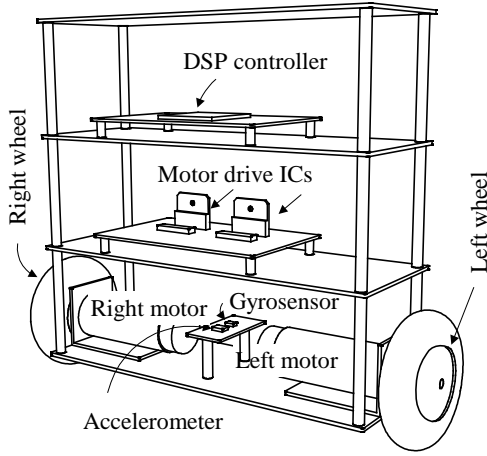


그림 1. 차륜형 역진자의 개략적 외관.
Fig. 1. A Wheeled Inverted Pendulum.

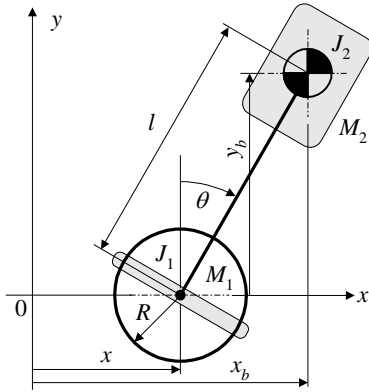


그림 2. 이상적인 차륜형 역진자의 시스템 모델링.
Fig. 2. System modeling of a Wheeled Inverted Pendulum.

매우 유사하다. 실험자는 경험상 막대기 (차체) 가 넘어지려는 방향에 대하여 반대방향으로 관성력을 발생시키기 위해서 손바닥을 신속히 움직여서 (차륜을 회전 시켜서) 막대기의 평형을 유지할 수 있다.

차륜형 역진자의 동역학적 모델링을 위해서 그림 2에 개략적인 모델을 표시하였다. 역진자 차체의 동역학적 변수로 차체의 집중질량 M_2 와 회전관성 J_2 를 들 수 있으며, 그 질량중심은 구동차륜의 회전축에서 l 만큼 떨어져 있다. 차륜에 관련된 변수로 차륜의 집중질량 M_1 과 회전관성 J_1 을 들 수 있다.

III. 동역학 방정식과 평형점

차륜형 역진자의 평형점을 파악하기 위해서는 먼저, 동역학적 거동이 파악되어야 한다. 이러한 목적을 달성하기 위해서 차륜형 역진자의 동역학 방정식이 필요로 하게 된다. 또한, 차륜형 역진자가 평형이 되도록 제어하기 위해서는 제어기의 목표인 평형점이 파악될 필요가 있다.

1. 동역학 방정식

동역학 방정식을 유도하는데 주로 사용되는 Newton-Euler 법은 대상의 내부에 존재하는 구속력 계산을 요구하는데, 그 구속력 계산결과는 실제로 기구 시스템을 구현하는데 매우

유용하게 사용될 수 있다. 그렇지만 본 연구의 주제는 차륜형 역진자의 동역학적 거동에 해당되는 평형점 연구이므로 번거로운 구속력 계산이 필요 없는 Lagrange 법이 동역학 방정식 유도에 사용된다.

차륜의 운동에너지 T_1 과 위치에너지 U_1 는 다음과 같이 계산된다.

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(M_1 + \frac{J_1}{R^2} \right) \dot{x}^2$$

$$U_1 = 0$$

이 때, \dot{x} 와 $\dot{\phi}$ 는 각각 차륜 회전중심의 선속도와 각속도를 나타내고 차륜과 지면 사이에 미끄럼이 없다고 가정하면 $\dot{\phi} = \dot{x}/R$ 관계가 있다. 계속해서 차체의 운동에너지 T_2 와 위치에너지 U_2 는 다음과 같이 계산된다.

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 + M_2 \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} (J_2 + M_2 l^2) \dot{\theta}^2$$

$$U_2 = M_2 g l \cos \theta$$

이 때, v_2 는 차체 무게중심의 속도이고 차체 무게중심의 변위는 각각 $x_b = x + l \sin \theta$, $y_b = l \cos \theta$ 로 표현되고 g 는 중력가속도를 나타낸다.

각 부분에 해당하는 T_1 , T_2 , U_1 , U_2 을 이용하여 차륜형 역진자 시스템의 전체 라그랑지안 L 은 다음과 같다.

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2$$

$$= \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + J_1/R^2) \dot{x}^2 + M_2 \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{2} (J_2 + M_2 l^2) \dot{\theta}^2 - M_2 g l \cos \theta$$

구해진 전체 라그랑지안 L 과 일반화 변수로 x 와 θ 을 그리고 일반화 힘으로 τ/R 와 $-\tau$ 를 선정하여 동역학 방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 + M_2 + J_1/R^2) \ddot{x}$$

$$+ M_2 l \cos \theta \ddot{\theta} - M_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta = \frac{\tau}{R}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = M_2 l \cos \theta \ddot{x}$$

$$+ (J_2 + M_2 l^2) \ddot{\theta} - M_2 g l \sin \theta = -\tau$$

2. 이상적인 평형점 및 평형조건

차륜형 역진자의 평형제어의 목적은 차체가 넘어지지 않도록 평형점에 대해서 차체를 안정되게 직립 시키는 것이다. 이러한 목적을 달성하기 위해서 평형점이 파악되어야 하며, 먼저, 평형상태의 동역학적인 정의가 필요하게 된다.

차륜형 역진자의 차체에 작용하는 힘들로 차륜의 구동에 의해서 발생하는 관성력, 구동장치의 반력토크, 그리고 차체

에 작용하는 중력 등을 들 수 있다. 만일, 차체가 넘어지지 않고 직립상태를 유지한다면 차륜 구동에 의한 관성력은 사라지고 오직 구동장치의 구동토크와 중력만이 차체에 작용할 것이다. 그 결과 차체가 주행하지 않으면서 넘어지지 않으므로 평형상태가 달성된다. 이러한 상태를 앞에서 유도한 동역학 방정식 (6)과 (7)에 대입하면 그 동역학 방정식은 다음과 같이 간략한 형태의 정역학적 방정식이 될 것이다.

$$0 = \tau / R \tag{8}$$

$$-M_c g l_c \sin \theta = -\tau \tag{9}$$

위 식 (8)에 의하면 평형점에 해당하는 구동토크 τ_{ss} 가 구해지고 구해진 구동토크를 이용해서 평형점에 해당하는 차체의 기울기 각도 θ_{ss} 는 (9)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\tau_{ss} = 0 \tag{10}$$

$$\theta_{ss} = \sin^{-1} \left(\frac{\tau_{ss}}{M_2 g l} \right) = 0 \tag{11}$$

예상한 바와 같이 $\theta_{ss} = 0$ 인 상태를 얻을 수 있다. 이것은 동역학 방정식을 유도할 때, 무게중심이 차체에 대하여 이상적인 수직방향에 존재한다고 묵시적으로 가정하였으므로 매우 자연스러운 결과이다.

이 평형점 유도 과정에서 다음과 같은 사실이 고려되어야 한다. 엄밀하게 서술하면 $\theta_{ss} = 0$ 은 평형점 조건이 아니라 단순히 정상상태의 기울기 각도일 뿐이다. 이 $\theta = 0$ 결과는 앞에서 서술한 $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 로부터 유도된 하나의 정상상태에 해당한다. 즉, 평형점의 본질은 $\theta = 0$ 가 아니라 $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 인 것이다. 이 $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 인 사실을 이용하여 무게중심의 위치가 변동하는 경우에 대하여 적극적인 평형점을 유도하기로 한다.

3. 무게중심 변동이 존재하는 경우에 대한 일반적인 평형점

앞에서 제시된 동역학 방정식은 무게중심이 차체에 대하여 이상적인 수직방향에 존재한다고 가정하여 유도되었다. 무게중심이 그림 3과 같이 차체에 대한 수직방향에 대해서 미지의 β 만큼 변동한다고 가정한다. 이러한 가정을 적용하면 차체의 운동에너지와 위치에너지에 해당하는 식 (3)과 (4)

는 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 + M_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta + \beta) + \frac{1}{2} (J_2 + M_2 l^2) \dot{\theta}^2 \tag{12}$$

$$U_2 = M_2 g l \cos(\theta + \beta) \tag{13}$$

수정된 차체의 운동에너지와 위치에너지를 적용하면 최종 동역학 방정식 (6)과 (7)은 다음과 같이 수정된다.

$$(M_1 + M_2 + J_1 / R^2) \ddot{x} + M_2 l \cos(\theta + \beta) \ddot{\theta} - M_2 l \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \beta) = \frac{\tau}{R} \tag{14}$$

$$M_2 l \cos(\theta + \beta) \ddot{x} + (J_2 + M_2 l^2) \ddot{\theta} - M_2 g l \sin(\theta + \beta) = -\tau \tag{15}$$

차체 무게중심 변동각 β 를 고려한 동역학 방정식에 대해서 평형조건 $\dot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 을 대입하면 평형점에 해당하는 구동토크 τ_{ss} 와 차체의 기울기 각도 θ_{ss} 는 다음과 같이 구해진다.

$$0 = \frac{\tau_{ss}}{R} \rightarrow \tau_{ss} = 0 \tag{16}$$

$$M_2 g l \sin(\theta_{ss} + \beta) = 0 \rightarrow \theta_{ss} = -\beta \tag{17}$$

식 (16)과 (17)의 물리적인 의미는 차체의 실질적인 무게중심이 외형적인 중심에서 벗어나 있다라도 평형유지를 위한 토크는 여전히 $\tau_{ss} = 0$ 이 되고 평형점에 해당하는 차체의 기울기 각도는 $\theta_{ss} = -\beta$ 로 무게중심 변동각 β 로 표현됨을 알 수 있다.

4. 평형 제어기의 제어목표

앞에서 무게중심이 차체의 외형적인 중심에서 벗어나 있는 경우에 해당하는 평형점의 구동토크와 차체의 기울기 각도를 제시하였다. 현실적으로 무게중심 변동각 β 는 알려져 있지 않으며, 응용분야 및 동작조건에 따라서 계속해서 변동하게 된다.

차륜형 역진자를 구체적으로 평형 제어하기 위해서는 제어기의 제어목표가 필요하게 된다. 차륜형 역진자의 평형 제어 후보로 상태변수를 0으로 수립시키는 레귤레이터 형태로 설정될 수 있다. 현실적으로 차륜형 역진자를 구현하게 되면 차륜구동장치에 엔코더, 기울기각도 센서에 각속도 센서가 주로 사용되므로 상태변수에 해당하는 $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ 가 자연스럽게 얻어지는 특징이 있다. 그러므로 레귤레이터의 후보로 상태피드백형 제어기가 자연스럽게 구성될 수 있다.

한 편, 무게중심의 변동 때문에 식 (6), (7)과 식 (14), (15)사이의 차이점은 미지의 무게중심 변동각 β 가 존재한다는 것이다. 새로운 차체의 기울기 각도 $\tilde{\theta}$ 를 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$\tilde{\theta} = \theta + \beta \tag{18}$$

새로운 기울기 각도를 이용하면 식 (14)와 (15)는 다음과 같이 표시되며 그 형태는 (6), (7)과 동일해진다.

$$(M_1 + M_2 + J_1 / R^2) \ddot{x} + M_2 l \cos \tilde{\theta} \ddot{\theta} - M_2 l \dot{\theta}^2 \sin \tilde{\theta} = \frac{\tau}{R} \tag{19}$$

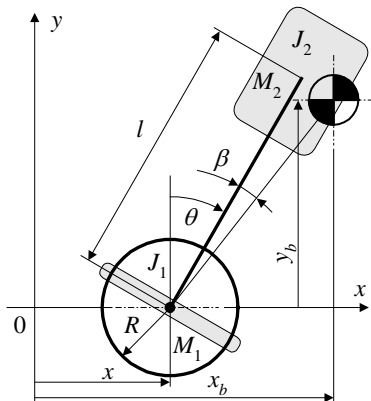


그림 3. 현실적인 차륜형 역진자의 시스템 모델링.
Fig. 3. Realistic system modeling of a Wheeled Inverted Pendulum.

$$M_2 l \cos \tilde{\theta} \ddot{x} + (J_2 + M_2 l^2) \ddot{\tilde{\theta}} - M_2 g l \sin \tilde{\theta} = -\tau \quad (20)$$

식 (19)와 (20)의 평형점은 자연스럽게 $\tilde{\theta} = \dot{\tilde{\theta}} = 0$ 이 되어 상태피드백 제어기 형태의 레귤레이터가 채택될 수 있다. 그렇지만 차륜형 역진자용 제어기를 구현할 때, 미지의 무계중심 변동각 β 이 존재하므로 센서를 통해서 얻어지는 값은 $\tilde{\theta}$ 이 아니라 θ 라는 문제가 발생하게 된다.

미지의 무계중심 변동각 β 이 상태피드백 제어기 성능에 미치는 효과를 파악하기 위해서 식 (19), (20)을 선형화 하여 다음과 같은 상태방정식 형태로 표현되도록 한다. 이 때, 차륜형 역진자가 평형점 부근에서 동작하고 있을 때, $\dot{\tilde{\theta}} \approx 0$, $\sin \tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}$, $\cos \tilde{\theta} \approx 1$ 인 사실이 적극적으로 이용되었다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{G}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{G}_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/R \\ -1 \end{bmatrix} \tau \quad (21)$$

이 때, \bar{G} 는 식 (19), (20)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 + J_1/R^2 & M_2 l \\ M_2 l & J_2 + M_2 l^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 g l \end{bmatrix} \quad (22)$$

적절한 상태피드백 이득행렬 K 를 선정하여 다음과 같이 제어입력 τ 가 계산될 수 있다.

$$\tau = K\tilde{X}, \tilde{X} = [x \quad \tilde{\theta} \quad \dot{x} \quad \dot{\tilde{\theta}}]^T \quad (23)$$

그러나 현실적으로 τ 는 센서에서 출력되는 θ 를 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\tau = K(\tilde{X} - X_\beta), X_\beta = [0 \quad \beta \quad 0 \quad 0]^T \quad (24)$$

현실적인 제어입력 (24)를 (21)에 적용하면 (21)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + BK(\tilde{X} - X_\beta) = (A + BK)\tilde{X} - BKX_\beta \quad (25)$$

이 때, 이득행렬 K 가 시스템 안정화 및 적절한 성능을 달성할 수 있는 값으로 설정되었다고 가정하면 식 (25)에서 상태변수 벡터는 특정한 값으로 수렴하여 $\dot{\tilde{X}} = 0$ 조건이 만족되고 이 조건을 이용하면 정상상태에 해당하는 상태변수 벡터 \tilde{X}_{ss} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{X}_{ss} = (A + BK)^{-1} BKX_\beta \neq 0 \quad (26)$$

이 때, 시스템의 안정성 때문에 $(A + BK)^{-1}$ 는 존재하고 \tilde{X}_{ss} 는 정의 가능해진다.

한편, 식 (21)의 시스템 행렬 A 의 형태에 유의해서 고찰해보면 $A\tilde{X}_{ss}$ 는 다음과 같은 형태를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} A\tilde{X}_{ss} &= [\dot{x}_{ss} \quad \dot{\tilde{\theta}}_{ss} \quad \bar{G}_{12}\tilde{\theta} \quad \bar{G}_{22}\dot{\tilde{\theta}}]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \because \dot{\tilde{\theta}}_{ss} = \dot{\tilde{\theta}}_{ss} = \dot{x}_{ss} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (25)와 (27)을 결합하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$BK(\tilde{X}_{ss} - X_\beta) = 0 \rightarrow K(\tilde{X}_{ss} - X_\beta) = \tau_{ss} = 0 \quad (28)$$

이것은 앞에서 유도한 (16)과 부합되는 결과이다. 그리고 (28)을 살펴보면 정상상태의 센서출력과 무계중심 변동각의 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\theta_{ss} = -\beta \quad (29)$$

새롭게 발생하는 정상상태의 주행변위 x_{ss} 는 K 와 θ_{ss} 을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$K_1 x_{ss} + K_2 \theta_{ss} = 0 \rightarrow x_{ss} = -K_2 \theta_{ss} / K_1 \neq 0 \quad (30)$$

무계중심 변동각이 존재할 때, 정상상태의 주행변위는 원점에서 벗어남을 알 수 있고 그 벗어남 정도는 제어기의 이득행렬 K 의 성분을 이용하여 계산될 수 있다.

IV. 수치 시뮬레이션 및 토론

본 연구에서 제시된 차륜형 역진자의 평형점 결과를 확인하기 위해서 다양한 조건에 대하여 수치 시뮬레이션이 수행되었다. 제어기 이득행렬을 구하는 과정에서는 LQ 레귤레이터 기법을 사용하기 위해서 선형화된 동역학 모델 (21)이 사용되었지만 수치 시뮬레이션에는 비선형 방정식인 (19), (20)이 사용되었다.

1. LQ 레귤레이터 제어기

차륜형 역진자를 제어하기 위해서 상태피드백 제어기가 채택되었다. 제어 이득행렬을 선택하는 데 있어서 Linear Quadratic 레귤레이터 기법이 선택되었다. 차륜형 역진자는 필수적으로 사용되는 엔코더와 자이로 센서로부터 자연스럽게 모든 상태변수가 얻어지는 특징이 있으므로 이 선택은 매우 합리적이다. 시뮬레이션에 사용된 차륜형 역진자 파라미터를 표 1에 나타내었다.

식 (21)에서 주어진 행렬 A 와 B 는 가제어성을 갖는다는 것이 알려져 있으며, 가중치 $Q = \text{diag}(1.5 \quad 0.1 \quad 0.25 \quad 0)$, $R = 1$ 을 이용하여 다음과 같이 제어 이득행렬이 구성되었다. 본 연구의 초점은 무계중심 변동각이 존재하는 차륜형 역진자의 평형점이므로 자세한 제어 이득행렬 산출과정은 [4]를 참고하고 구체적인 내용은 생략되었다.

$$K = [1.225 \quad 2.114 \quad 1.066 \quad 0.2928] \quad (31)$$

2. 이상적인 차륜형 역진자에 대한 레귤레이터

이상적인 차륜형 역진자, 즉, 무계중심이 정확하게 차체의

표 1. 차륜형 역진자 파라미터.

Table 1. Wheeled Inverted Pendulum parameters.

변수	값	내용
M_1	0.2kg	차륜 질량
M_2	2.55kg	차체 질량
J_1	$1.54 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	차륜 회전관성
J_2	$1.39 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	차체 회전관성
R	0.038m	차륜 반지름
l	0.036m	차륜 중심과 차체중심까지 거리

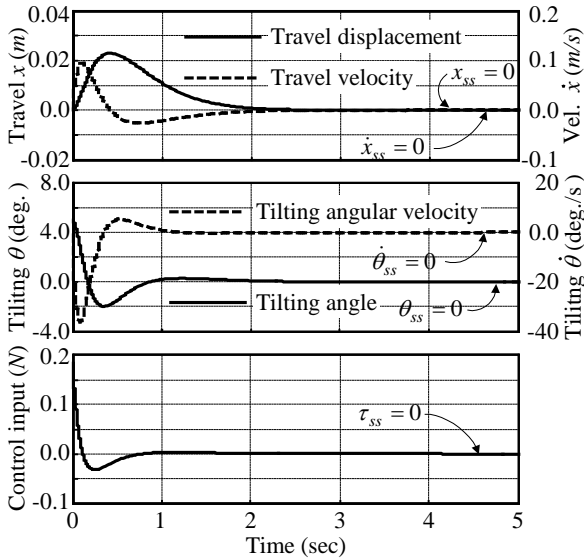


그림 4. 이상적인 차륜형 역진자의 $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ 시간응답.
 Fig. 4. Time responses of $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ in case of a perfect Wheeled Inverted Pendulum.

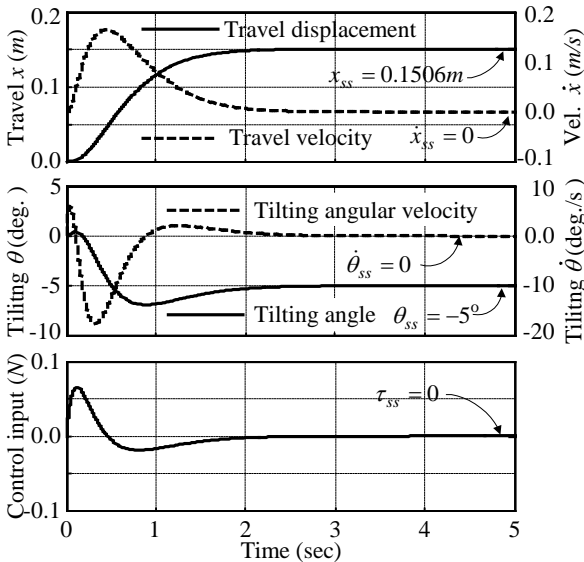


그림 5. 무계중심 변동각 $\beta = 5^\circ$ 를 갖는 차륜형 역진자의 $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ 시간응답.
 Fig. 5. Time responses of $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ in case of a Wheeled Inverted Pendulum with eccentricity of gravitational center of $\beta = 5^\circ$.

수직방향에 존재하는 이상적인 경우에 대하여 식 (31)의 제어기를 적용한 제어결과인 주행변위, 기울기 각도, 그리고 제어입력을 그림 4에 나타내었다. 이 때, 차체의 초기 기울기 각도는 $\theta_0 = 5^\circ$ 로 설정되었다. 예상한 바와 같이 차체의 기울기 각도는 과도응답 과정을 거쳐서 0으로 수렴하고 있는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 차체의 주행변위 역시 0으로 수렴하고 있다. 이렇게 평형점에 도달하면서 제어입력은 0으로 수렴하고 있다.

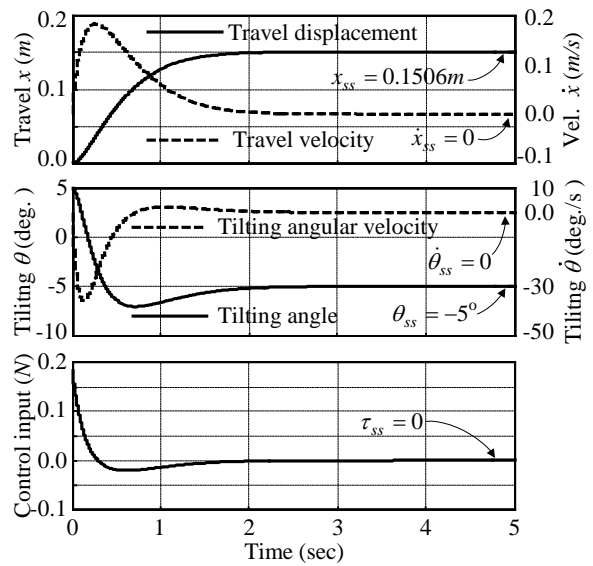


그림 6. 차체의 기울기 초기각도 $\theta_0 = 5^\circ$ 경우에 대한 무계중심 변동각 $\beta = 5^\circ$ 를 갖는 차륜형 역진자의 $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ 시간응답.

Fig. 6. Time responses of $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau$ in case of a Wheeled Inverted Pendulum with eccentricity of gravitational center of $\beta = 5^\circ$.

계속해서 무계중심 변동각 $\beta = 5^\circ = 0.08727 \text{ rad}$ 을 가정하고 식 (31)의 제어기를 적용한 제어결과인 주행변위, 기울기 각도, 그리고 제어입력을 그림 5에 나타내었다.

그림 5에 의하면 차체의 무계중심 변동각이 존재하게 되면 정상상태에서 차체의 기울기 각도는 더 이상 0이 아니며 뿐만 아니라 주행변위 역시 0이 아닌 값으로 수렴하게 된다. 정상상태의 차체 기울기 각도는 앞의 (29)에서 제시된 각도로 수렴함을 알 수 있으며, 정상상태의 주행변위 역시 다음과 같이 (30)의 계산결과 값으로 수렴됨을 알 수 있다.

$$x_{ss} = -2.114/1.225 \times (-0.08727) = 0.1506(m) \quad (32)$$

제어입력의 경우 무계중심의 변동각 존재 여부에 관계없이 0으로 수렴됨을 알 수 있다.

계속해서 실제로 차륜형 역진자를 동작시킬 때, 발생할 수 있는 차체 기울기 각도가 초기값으로 $\theta_0 = 5^\circ$ 임의의 값을 갖는 경우에 대한 주행변위, 기울기 각도, 그리고 제어입력을 그림 6에 나타내었다.

그림 6에 의하면 무계중심 변동각이 존재하고 0이 아닌 초기값이 존재하더라도 여전히 상태피드백 제어기가 적용된 차륜형 역진자는 평형을 유지하고 있으며, 평형점에 해당하는 차체의 기울기 각도와 주행변위 및 제어입력은 여전히 그림 4의 결과와 동일함을 보이고 있다.

V. 결론

본 연구에서는 무계중심 변동각이 존재하는 차륜형 역진자의 동역학 방정식이 Lagrange 기법을 이용하여 유도되었다. 적절한 제어이득을 갖는 일반적인 상태피드백 제어기가 미

지의 무계중심 변동각이 존재하는 차륜형 역진자를 안정화시킬 수 있음을 이론적으로 제시하고 시뮬레이션을 통하여 그 유효함을 보였다. 무계중심 변동각의 존재 여부와 관계없이 상태피드백 제어기의 제어목표는 이상적인 차륜형 역진자의 평형점으로 알려진 $X_{ref} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 가 그대로 사용될 수 있으며, 정상상태에서 차체의 기울기 각도가 미지의 무계중심 변동각으로 수렴함을 보였다. 뿐만 아니라 무계중심 변동각 때문에 차체의 정상상태 주행변위가 발생하게 되며, 그 발생 정도는 제어기 이득행렬 K 에 의존한다. 마지막으로 평형상태에서 검출되는 정상상태의 차체 기울기 각도가 실제의 무계중심의 위치와 일치하는 특징은 실질적인 무계중심을 파악하는 기능으로 사용될 수 있다.

참고문헌

- [1] P. L. Kapitza, in *Collected Paper of P. L. Kapitza*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, London), pp. 174, 1965.
- [2] S.-H. Jung, J.-N. Choi, and S.-K., "Design of optimized fuzzy controller by means of HFC-based genetic algorithms for rotary inverted pendulum system," *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 2, pp. 236-242, 2008.
- [3] D. Park, M. Park, D. Chwa, and S.-K. Hong, "An observer design and compensation of the friction on an inverted pendulum using adaptive fuzzy basis functions expansion," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 13, no. 4, pp. 335-343.
- [4] S.-H. Lee and S.-Y. Rhee, "A mixed H_2/H_∞ state feedback controller based on LMI scheme for a wheeled inverted pendulum running on the inclined road," *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems (in Korean)*, vol. 20, no. 5, pp. 617-623, 2010.
- [5] G. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, and A. C. Rufer, "JOE a mobile, inverted pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 1, pp. 107-114, 2002.
- [6] http://www.segway.com/aboutus/press_releases/pr_120301.html
- [7] http://www.toyota.co.jp/jp/news/08/Aug/nt08_0805.html
- [8] <http://www.segway.com/puma>
- [9] H. U. Ha and J. M. Lee, "A control of mobile inverted pendulum using single accelerometer," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 5, pp. 440-445, 2010.
- [10] S. H. Kim, J. O. Lee, J. M. Hwang, B. H. Ahn, and J. M. Lee, "Dynamic modeling and performance improvement of a unicycle robot," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 11, pp. 1074-1081, 2010.
- [11] H. W. Kim and S. Jung, "Experimental studies of controller design for a car-like balancing robot with a variable mass," *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems (in Korean)*, vol. 20, no. 4, pp. 469-475, 2010.
- [12] S. Matsumoto, S. Kajita, and L. Tani, "Estimation and control of the attitude of a dynamic mobile robot using internal sensors," *Journal of Robotic Society of Japan (in Japanese)*, vol. 8, no. 5, pp. 37-46, 1990.
- [13] K. Furuta, H. Kajiwara, and K. Kosuge, "Digital control of a double inverted pendulum on an inclined rail," *International Journal of Control*, vol. 32, no. 5, pp. 907-924, 1980.



이 세 한

1989년 고려대학교 기계공학과 졸업.
1990년 동 대학원 기계공학과 졸업 (석사).
2002년 동 대학원 기계공학과 졸업 (박사).
2002년~2003년 UCD(美) AHMCT 센터 박사 후 연구원.
2003년~2004년 한국전기 연구원 선임연구원.
2004년~현재 경남대학교 기계공학부 교수.
관심분야는 자동화 로봇 시스템 설계 및 제어, 강인제어, 생산자동화 기구.