韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 05. 제 49권, 제 2호, 199-221.
J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2010, Vol. 49, No. 2, 199-221.

산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화 분석

주 홍 연 (고려대학교 대학원)
김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)†
황 우 형 (고려대학교)

Ⅰ. 서 론

산술 평균(Arithmetic Mean)은 자료의 대푯값 또는 중심경향성에 대한 측도로 사용된다(Watson & Moritz, 2000). 산술 평균은 통계학의 가장 기초가 되는 개념이면서 물리학, 경제학 등 여러 다른 학문과도 밀접하게 관련되어 있으며 특히, NCTM의 학교 수학의 원리와 규준(2000)에서는 중심 측도로서 평균에 대한 "견고한 이해(solid understanding)"를 강조하고 있다. 산술 평균에 관한 연구는 1980년대에 초·중등 교육과정으로 통계 교육이 유입되면서 시작되었다. 초기 산술 평균에 관한 연구들은 초·중·고·대학생에 이르기까지 학생들 대다수가 산술 평균의 개념적 이해에 많은 어려움을 가지고 있으며, 산술 평균에 대한 교육이 피상적으로만 이뤄지고 있음을 지적하였다(Carpenter et al., 1981; Goodchild, 1988; Pollatsek, Lima, & Well, 1981; Zawojewski, 1986). 특히, Pollatset et al. (1981)은 학생들의 산술 평균 사용이 개념적 행동이기 보다는 계산적 행동이라고 지적하였다. 이후 많은 수학교육자들은 산술 평균이 겉보기에 간단하지만 사실상 상대적으로 복잡한 개념임을 언급하였다(Cai, 1998; Groth & Bergner, 2006; McGatha, Cobb, & MaClain, 2002; Mokros & Russell, 1995; Pollatsek et al., 1981). 지금까지 산술 평균의 이해에 관한 연구의 초점은 크게 산술 평균에 대한 학생들의 이해가 어떻게 발달하는가(Mokros & Russell, 1995; Leon & Zawojewski, 1990; Strauss & Bichler, 1988; Watson & Moritz, 2000), 산술 평균을 어떻게 개념화하는가(Goodchild, 1988; Mokros & Russell, 1995; Pollatset et al., 1981: Strauss & Bichler, 1988), 산술 평균을 구성하는 개념들이 어떻게 관련되어 있는가(MacCullough, 2007; Marnich, 2008)로 분류할 수 있다.

본 논문에서는 산술 평균의 개념 이해에 관한 선행 연구들의 결과를 토대로 개인이 산술 평균을 어떻게 개념화하는지에 초점을 두고자 한다. 산술 평균의 개념화에 관한 초기 연구로 Pollatsek et al. (1981)의 연구가 대표적이다. Pollatsek et al. (1981)은 17명의 대학생을 대상으로 산술 평균의 개념 이해에 관한 임상 면담을 실시한 결과, 산술 평균을 계산 공식으로만 아는 것을 가장 낮은 수준의 도구적 이해로 지적하였고, 산술 평균을 개념화하기 위해서는 산술 평균을 계산하기 위해 필요한 수학적 개념·절차와 관련된 계산적 지식(Computational Knowledge), 자료를 대표하는 실세계 개념으로 설명하기 위한 기능적 지식(Functional Knowledge), 방정식과 구어적 설명 사이를 연결하기 위해 균형점 개념으로 간주하는 유추적 지식(Analog Knowledge)인 세 가지 유형의 지식을 강조하였다. 또한 Mokros와 Russell (1995)은 학생들이 자료의 대푯값으로서의 평균[1]을 어떻게 개념화하고 있는가를 알아보기 위해 4, 6, 8학년 학생 21명을 대상으로 과제 기반의 면담을 실시하였다. 그들은 평균에 대한 학생들의 개념화를 5가지 접근 방법인 최빈값으로서의 접근법, 알고리즘적 접근법, 논리적 접근법, 중심점으로서의 접근법, 수학적 균형점으로서의 접근법으

* 접수일(2010년 2월 1일), 수정일(2010년 5월 3일), 게재확정일(2010년 5월 7일)
* ZDM분류 : B53
* MSC2000분류 : 97C70
* 주제어 : 산술 평균, 개념화
† 교신저자임

1) 본 논문에서 평균(Average)을 자료의 중심경향성을 나타내는 대푯값의 의미로 사용하고, 그것의 여러 측도 중 산술 평균(Arithmetic Mean)을 구별하여 사용하였다.

로 범주화하여 제시하였다. Mokros와 Russell (1995)은 최빈값과 알고리즘적 접근이 산술 평균의 대표성의 의미를 이해하는데 어려움을 주므로 이를 중등 교육과정 후반에 도입해야 함을 주장하였다. 또한 평균을 학습하는데 알고리즘을 제시하기 이전에 논리적, 중심점, 균형점으로서의 접근을 학교 교육에서 충분히 강조해야 한다고 하였다. Hardiman, Well과 Pollatsek (1984)의 연구에 따르면 균형 개념을 모르는 대학생들이 토크(Torques)[2]에 관한 균형 지식을 학습한 후 평균 문제 풀이에 유의미한 향상을 보였으며 이때, 저울(Balance Beam)을 산술 평균의 이해에 유용한 비유로서 간주하였다. 그리고 Cortina et al. (1999)의 연구에 의하면, 학생들은 동일하지 않는 집단의 평균을 이끌어 내거나 비교할 때 균등분배(Fair Share)의 개념을 사용하였는데 이를 산술 평균의 곱셈적(multiplicative) 개념이라 하였다.

산술 평균의 개념화와 관련된 최근 연구들(Cortina, Saldanha, & Thompson, 1999; Cortina, 2002; Groth, 2005; Konold & Pollatsek, 2002; MacCullough, 2007; Marnich, 2008)은 Pollatsek et al. (1981)과 Mokros와 Russell (1995)의 연구를 기반으로 산술 평균의 개념을 알고리즘으로 제시되는 '수학적 개념'과 자료의 대표성으로 제시되는 '통계적 개념'으로 구분하고, 산술 평균의 개념화 모델로서 '균등 분배(Fair Share)'와 '균형점(Center of Balance)' 개념을 구별하여 제시하였다. 예를 들어, Konold와 Pollatsek (2002)은 서로 다른 세 가지 통계적 처리 상황(동일 대상의 반복 측정 상황: 양팔저울에 금괴 한 개의 무게를 100번 재는 상황, 각기 다른 대상의 측정 상황: 무작위로 선택된 100명의 성인 남자의 키를 재는 상황, 이분법적 사건 상황: 아동이 백신을 접종했을 때 소아마비에 걸리거나 걸리지 않는 상황)에서 "신호(Signal)/잡음(Noise)"으로 비유된 관점을 어떻게 적용할 수 있는지를 조사하였다. 그들은 각각의 자료의 분포를 잡음으로 보고 대표성을 가진 개념으로서 산술 평균(또는 최빈값)을 중심경향성을 나타내는 신호로 비유하고 있다. 특히, 평균을 개념화하는 상황에 주목하고 '자료 요약(Data Reduction)', '균등 분배(Fair Share)', '대푯값(Typical Value)', '잡음 내의 신호(Signal in Noise)'로 범주화하여 설명하고 있으며 이 중에서 중심경향성과 자료 간 비교 등의 평균의 의미를 전달할 수 있는 방법으로서 "신호/잡음" 관점을 통계학 교육에서 강조해야 한다고 지적하였다. Groth (2005)은 Konold와 Pollatsek (2002)의 연구를 기반으로 하여 15명의 대학생들을 대상으로 '잡음 내의 신호'와 '대푯값'의 상황에서 산술 평균을 어떻게 개념화하는지를 과제 기반의 면담을 통해서 조사하였다. 특히, '잡음 내의 신호'의 관점은 산술 평균 학습에서 교수학적으로 많이 사용되고 있는 "균등화(Leveling-off)" 전략과 연결되며 이는 산술 평균의 개념모델로서 제시했던 균형점과 균등분배와도 밀접하게 관련될 수 있다(MacCullough, 2007; Marnich, 2008).

개념의 도입 단계에서 탐구적인 접근을 강조하는 것은 형식적인 접근보다 더 효과적이다(Tukey, 1977 재인용). 그러나 국내의 초등학교 5학년 국정 수학교과서에는 단순히 산술 평균을 '약속하기'로서 형식적인 접근(절차적인 방법)으로만 도입하고 있어 산술 평균의 탐구적 접근과 개념적 이해의 중요성이 간과되고 산술 평균의 다양한 개념화가 제대로 이루어지지 못하고 있다. 따라서 산술 평균 개념화에 관한 연구가 다양한 이해를 통해 학생들이 학습할 수 있도록 교수학습을 개선하는데 중요한 토대를 마련해줄 것이다.

그러나 지금까지 산술 평균에 관한 연구들은 산술 평균의 개념화에 관한 일부 상황만을 제시하고 있을 뿐 산술 평균의 개념화를 전체적으로 범주화하거나 질적으로 심도 있게 구체화한 연구는 부족하다. 특히, 국내 연구의 경우는 산술 평균의 개념화에 관한 연구뿐만 아니라 초·중·고등학교에 이르는 통계 교육 전반에 관한 연구가 매우 미흡한 실정이다. 따라서 통계학의 기초 개념인 산술 평균을 개인이 어떻게 개념화하는가에 관한 연구가 필요하다.

본 연구의 목적은 예비교사들이 산술 평균을 어떻게 개념화하고 있는지 알아보고, 예비교사들의 개념화가 산술평균의 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지는지 알아보는 것이다. 본 연구에서는 예비교사들이 어떤 지식을 이용하여 산술 평균을 개념화하고 있으며, 산술 평균의 문제를 어떻게 해결하는지 알아보고자 한다. 또한 산술 평균의 문제 유형과 예비교사들의 개념화 사이에 어떤 관련성이 있는지 살펴보고자 한다. 본 연구의 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

2) 무게와 균형점으로 부터 거리의 곱

1. 예비교사들은 산술 평균을 어떻게 개념화하고 있는가?
   1-1. 예비교사들은 어떤 지식을 이용하여 산술 평균을 개념화하고 있는가?
2. 산술평균에 대한 예비교사들의 개념화가 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지고 있는가?
   2-1. 예비교사들은 어떤 지식을 이용하여 산술 평균의 문제를 해결하는가?
   2-2. 산술 평균의 문제 유형과 예비교사들의 개념화 과정은 어떤 관련성이 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 산술 평균의 역사적 발생

‘산술 평균’이라는 용어의 사용은 명시적으로 고대 그리스 수학에서 발견된다. 피타고라스(Pytagoras)시대(B.C. 580~500년 경)에 세 가지의 평균이 사용되고 있었는데 이 중 하나가 산술 평균이다(Heth, 1981). 당시에는 산술 평균의 의미가 통계적으로 사용되지는 않았지만 그리스시대의 산술 평균 정의를 통해서도 산술 평균을 학습할 수 있다. 그리스시대에는 $a-b=b-c$ 이라면 b를 a,c의 산술 평균이라고 불렀다. 이런 정의는 조건으로 제시되는 두 수에 대해서만 정의되며 현대에 사용되고 있는 산술 평균의 정의 $\dfrac{(a+c)}{2}$의 공식과는 차이가 있다. 그리스시대의 정의는 두 수의 중위수로서 산술 평균을 정의함으로써 일반화가 어렵다. 반면에 현대의 산술 평균의 정의는 산술 평균의 계산적인 측면이 강조될 수 있지만 일반화가 쉽다. 이후, Pappus(A.D. 3세기 경)는 ‘수학의 집성(Mathematical Collection)’ 제 3권에서 기하적인 방법을 통해 산술 평균, 기하평균, 조화평균의 작도법을 소개하기도 하였다(Boyer, 1991). 한편, 평균(Average)의 개념은 산술 평균과는 다른 기원을 가지고 있다. 즉, “평균”라는 용어 자체는 보험과 관련된 이익과 손해에 대한 균등한 분배로서 해상무역법에서 유래되었다. 평균이라는 용어는 원래 “배에 짐을 실으면서 손상된 물건들”을 뜻하는 아라비아어의 ‘awariyah’로부터 유래되어 이탈리아와 프랑스에서 손상된 물건의 경제적 손실과 관련되어 사용되었다(Schwartzman, 1994). 이후에 평균은 배에 투자한 다수의 사람들에 대한 한 개인에게 산출되어지는 손실 부분을 의미하게 되었다. ‘평균’의 사용은 점차 변화하면서 일반적으로 산술 평균을 의미하게 된다. 따라서 학교 현장에서는 산술 평균을 가르치기 위해서 학생들에게 산술 평균(Mean)이나 평균(Average)을 구분 없이 균등 분배의 문제 상황을 통해 처음으로 접하게 하고 있으며 이런 문제 상황은 산술 평균을 이해시키는데 적절할 수 있다(Cortina, 2002; Mokros & Russell, 1995; Strauss & Bichler, 1988). 두 개 이상의 수에 대한 산술 평균은 9~11세기 아라비아 천문학이나 야금술(Metallurgy), 항해술에 사용되었던 범위의 중앙(Midrange)에서 유래된다(Eisenhart, 1974). 범위의 중앙은 여러 개의 수에 대한 중심경향값이다. 따라서 현대의 산술평균의 관점에서는 범위의 중앙이 학생들에게 산술평균을 이해시키는데 더 적절할 수 있다(Bakker & Gravemeijer, 2006). 17세기 이후로 산술 평균은 두 개 이상의 수에 대해서 $\dfrac{(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n})}{n}$으로 일반화되어졌다. 특히 천문학자(Tycho Brahe에 의해 처음 사용됨)가 별의 위치를 파악하거나 과학자들이 몇 개의 측정값의 오차를 줄이기 위해서 산술 평균을 유용하게 사용하였다(Plackett, 1970). 19세기에는 Quetelet이 대푯값으로서의 산술 평균을 사용하였다. 통계적으로 대푯값으로서 산술 평균의 변화는 매우 중요한 개념적 변화이다(Porter, 1986; Stigler, 1986).

2. 산술 평균의 개념화

(1) 산술 평균의 수학적 지식

Pollatsek et al. (1981)은 산술 평균과 관련된 지식의 유형으로서 계산적 지식을 범주화하였는데 이는 산술 평균의 계산 절차뿐 아니라 산술 평균 공식과 관련된 수학적 개념이 포함된다. 따라서 산술 평균의 수학적 지식은 절차에 의한 것과 수학적 개념에 의한 것으로 나누어 이해될 수 있다. 예를 들어, 산술 평균의 공식을 사용하여 평균을 계산하거나, 공식을 특정 변수로 정의하거나, ‘모든 변량에 대한 산술 평균으로부터 편차의 합은 0이다’는 사실을 아는 것은 절차적이다. 그러나 산술 평균 공

식을 통해 왜 평균에 대한 편차의 합이 0이 되는가를 수학적으로 이해했거나, 산술 평균이 이항 연산이 아니면 자료 집단의 어느 변량과 반드시 같을 필요가 없다는 것을 아는 것은 개념적일 수 있다.

1) 산술 평균의 수학적 절차 지식

많은 선행 연구를 통해서 학생들은 산술 평균의 도입 시기부터 평균에 대한 개념적 이해를 무시하고 자료의 평균을 구하기 위해서 대부분 절차를 사용하는 경향이 있음이 밝혀졌다(Groth & Bergner, 2006; Mokros & Russell, 1995; Pollatsek et al., 1981). 이는 산술 평균이 절차에 의한 기계적 알고리즘($\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}$)에 의해 개념화되기 쉽다는 것을 의미한다. Hiebert와 Leferve (1986)가 제시한 절차적 지식의 두 가지 정의는 상징적 기호·기호 간의 구조 관계(Syntax)를 인식하는 것과 알고리즘·공식을 적용하는 것으로 볼 수 있다. 이런 정의는 산술 평균의 절차적 지식에도 쉽게 적용될 수 있다. 전자의 경우, 산술 평균의 상징적 표상은 보편적으로 $\overline{x}$ 또는 μ로 나타냄을 아는 것이다. 더 나아가서는 자료의 변량을 의미하는 x와 자료의 수 n으로 인식하는 것을 포함한다. 후자의 경우, 산술 평균을 계산하는 절차·알고리즘·공식을 아는 경우이다. 만약 공식의 상징적 표상을 배우지 않았다 하더라도 더한 후 나누는 전략(add-and-then-divide strategy)을 사용하거나 $\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}$ 공식을 사용하는 것을 말한다.

2) 산술 평균의 수학적 개념 지식

산술 평균의 수학적 개념 지식은 산술적 이해와 대수적 이해를 바탕으로 하는 두 가지 개념화 상황으로 나눌 수 있다. 여기서 산술은 산술 평균 공식과 그 계산의 본래적인 의미를 가진다. 대수는 산술 평균 공식을 조작하는 것뿐 아니라 미지의 변량을 구하는 문제 해결에서도 필수적인 요소가 된다. 대수적 성질에 대한 이해는 학생들이 산술 평균을 적용할 때 군의 특징에 대한 오개념을 해소하는데 도움을 줄 수 있다.

자료의 대표성과 같은 중요한 통계적 개념이 간과될 수 있지만 산술 평균의 수학적 개념을 충분히 이해하기 위해서는 산술적 이해(덧셈, 곱셈, 나눗셈)와 대수적 이해(산술 평균 공식의 조작, 공식에 대한 성질, 비, 수학적 군의 성질)에 기초해야 한다. 산술 평균의 수학적 개념을 이해하기 위해서는 산술 연산에 대한 지식과 연관시킬 필요가 있다. 즉, 덧셈과 나눗셈의 개념적 이해가 요구된다. 예를 들어, $\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}$ 는 $\sum x_i$을 구하고 n으로 나누는 것은 $\overline{x}$와 크기가 같다는 것을 의미한다. 또한 이것은 덧셈과 곱셈 사이의 연결성을 이해하는데 도움을 준다. $n\overline{x}=\sum x_i$는 $\overline{x}$를 n번 더한다면 자료의 각 변량의 전체 합을 구함을 의미하기 때문이다.

산술 평균의 공식을 조작하거나 공식 내의 미지의 변량을 알아내는 것과 같은 대수적 이해의 부분은 산술 평균을 이해하는데 중요한 요소이다. 비와 비율에 대한 대수적 사고의 이해는 균등 분배와 균형점과 같은 산술 평균과 관련된 다른 개념화 상황에 대한 수학적 사고의 확장을 가능케 한다. 또한 Mevarech (1983)는 수학적 군에 대한 대수적 성질이 산술 평균을 이해하는데 중요한 역할을 한다는 것을 발견하였다. 산술 평균을 구하는 일반적인 이항 연산은 닫혀있지 않고, 결합법칙이 성립하지 않으며, 항등원과 어떤 원소의 역원이 존재하지 않는다. 군의 성질(닫혀있음, 결합법칙, 항등원의 존재성, 역원의 존재성)이 정수의 덧셈이나 (0을 제외한) 유리수의 곱셈에 대해서는 성립하지만 산술 평균의 계산에서는 성립하지 않는다는 사실은 학생들의 기존 스키마의 변화를 요구한다. 즉, 형식적이든 비형식적이든 간에 덧셈과 곱셈에 대한 대수적 성질에 관해 배웠던 지식이 산술 평균의 대수적 성질에 전이되지 않는다. 예를 들어, 두 수의 산술 평균을 구하는 이항 연산 $\overline{a}=a*b=\frac{(a+b)}{2}$ 일 때, 이것은 항등원을 갖지 않는다. 왜냐하면 $y\neq\overline{a}$ 이면 $(\overline{a}*y)\neq\overline{a}$ 이기 때문이다. 대수적 성질 적용에 대한 제한된 경험만을 가지고 있는 학생들은 군의 성질과 그것의 적용에 대해서 지나치게 일반화하기 쉽다(Mevarech, 1983). 예를 들어, 학생이 항등원의 대수적 성질에 대해서 충분히 이해하지 못했다면 0을 자료에 추가해도 산술 평균이 변하지 않을 것이라는 오개념을 가질 수도 있다.

(2) 산술 평균의 통계적 지식

산술 평균의 통계적 개념은 자료 집합을 요약할 수 있는 대푯값으로서 그 특징을 나타낼 수 있다(Russell & Mokros, 1996). 이는 자료 집합의 대표성을 의미하고 있기 때문에 위의 수학적 개념과는 다르다. Pollatsek et al. (1981)은 “산술 평균은 점수를 가장 잘 대표할 수 있는 양을 의미한다.”, “산술 평균은 포괄적인 수행의 지표이다.”라고 지적하면서 기능적 지식으로서 대표성을 설명하였다. 산술 평균은 자료 집합을 설명하는 도구이고 여러 자료 집합 사이의 비교를 가능케 한다. Bakker (2004)는 통계적 개념으로서 변이성(Variability), 표본추출(Sampling), 자료, 분포, 공변량을 주요 개념으로 제안하였다. 또한 이영하・남주현 (2005)은 통계 교육에서 핵심적인 통계적 개념으로 분포, 요약, 표본 개념을 제시하고 있다. 그들은 자료를 각종 도표화 하는 시각적 표현화를 분포 개념으로 보고 분포의 상태와 같은 정보를 총체적인 입장에서 요약을 자료의 중심에 관한 척도들과 자료의 퍼짐에 관한 척도라고 하였다(이영하・남주현, 2005). 따라서 산술 평균은 통계적 요약 개념으로서 측정값들을 객관적으로 대표할 수 있는 측도로 사용되며 주로 주어진 자료가 어떤 값을 중심으로 분포되었는가를 나타내는 위치 특성을 가진 중심경향값이다(김우철 외, 1992). Mokros와 Russell (1995)은 산술 평균의 경우 “통계적 이해의 중요성과 광범위한 의미의 수학적 중요성”이 있음을 지적하였다. 즉, 산술 평균의 완전한 이해를 위해서는 산술 평균의 계산, 수학적 관련성, 통계적 측면의 이해가 통합되어야 한다(Cai, 1998; Cobb & Moore, 1997).

(3) 산술 평균의 균등 분배 개념과 균형점 개념

균등 분배와 균형점의 개념은 산술 평균의 수학적 지식과 통계적 지식 사이의 인지적 연결성을 제공한다(MacCullough, 2007; Marinich 2008). 균등 분배란 대상의 균등 분할로 구성원에게 대상을 동일하게 분배하는 것을 말한다. 대상을 분할하거나 분배하는 행동은 일찍이 아동의 사회적 환경의 경험을 바탕으로 발달한다(Kieren, 1988). 균등 분배의 개념을 설명할 수 있는 아동의 공통적인 최초의 전략은 분명하게 세기를 하지 않는 상태에서 대상들을 집단별로 나누어 주는 것이다(Hunting & Sharply, 1988; Miller, 1984). Cortina et al. (1999)의 연구 결과에 따르면, 학생들은 동일하지 않은 집단의 평균을 이끌어 내거나 비교할 때 균등 분배의 개념을 사용하였다. 균형점 개념은 Inhelder와 Piget (1958)의 연구 이후에 아동의 인지 발달에 주목하여 폭 넓게 연구되어져 왔다. Siegler (1976)는 저울을 통해서 아동이 다양한 규칙들을 발견하고 발달하게 된다고 주장하였다. 특히 그는 토크를 이해하는 것을 균형점 개념의 가장 높은 이해 수준으로 제시하고 있다. 그러나 토크의 개념 이해는 특별한 교수 없이는 어려우며 잘 발달되지 않는다(Hardiman, Pollatsek, & Well, 1986).

산술 평균을 개념화함에 있어 균등분배와 균형점 개념을 각각 수학적 지식과 통계적 지식으로 나누어 생각할 수 있다. Pollatsek et al. (1981)은 균등 분배와 균형점의 개념을 산술 평균의 수학적・통계적 지식 사이의 전이를 가능하게 하는 유추개념으로 보고 이들을 유추적 지식으로 간주하였다.

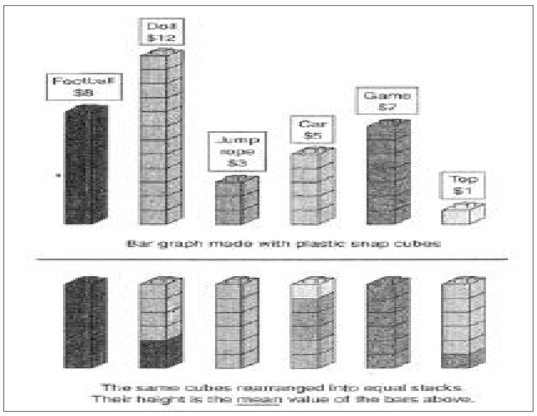
1) 수학적 지식으로서의 균등 분배

Fischbein, Deri, Nello와 Marino (1985)는 “기본적인 산술 연산이 일반적으로 암묵적・무의식적인 초기 직관 모델과 연관되어 있다”고 가정하였다. 균등 분배는 등분할을 근거로 하는 직관 모델이다. 산술 평균 공식은 대상들의 집합을 주어진 부분 집합으로 균등하게 나누어 계산되므로 등분할의 예가 될 수 있다. Cortina (2002)는 산술 평균의 균등 분배 개념을 정규화된 비로서 설명하였는데, 이는 산술 평균의 균등 분배 개념이 측정의 단위로서 사용될 수 있음을 암시한다. 또한 Cortina et al. (1999)은 “산술 평균은 평균 비율과 같다; 만약 개인이 동일한 양을 기여한다면 한 기여자 당 집단 기여도는 n명의 각 기여자들이 기여한 양과 같다”라고 지적하며 균등 분배 개념을 설명하였다.

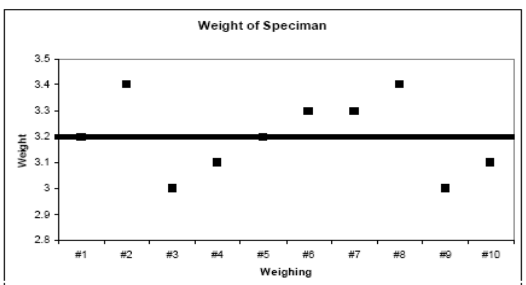
2) 통계적 지식으로서의 균등 분배

균등 분배의 개념화는 균등화(Leveling-off) 전략을 사용하거나 재분배(Redistribution) 방법을 사용하여 설명할 수 있다(Cai, 1998; MacCullough, 2007; Marinich 2008; Mokros & Russell, 1995). 이 방법들은 신호(Signal)・잡음(Noise)의 관점을 통해서도 해석되어질 수

있으며 신호 · 잡음의 관점에서 산술 평균은 신호의 표시이고, 자료들은 잡음의 과정으로 간주한다(Groth, 2005; Konold & Pollatsek, 2002). 균등화 전략의 경우 자료의 각 변량과 같은 높이의 블록들이 제시되어져 있을 때 이들을 높이가 같도록 균등하게 분배하여 쌓는 과정에서 동일하게 분배되어진 블록들의 높이가 자료 집합의 산술 평균이 된다. 또한 재분배의 경우는 모든 변량을 합하여 사람의 인원만큼 동일하게 분배할 때 한 사람이 받게 되는 양이 산술 평균이 된다. <그림 1-1>과 <그림 1-2>는 위의 두 가지 관점을 나타낸 것으로, 이런 개념화 모델들은 산술 평균의 대표성에 대한 통계적 개념과 관련하여 균등 분배 개념을 자세히 보여준다(Van deWalle & Lovin, 2006).



<그림 1-1> 균등화 전략에서의 산술 평균



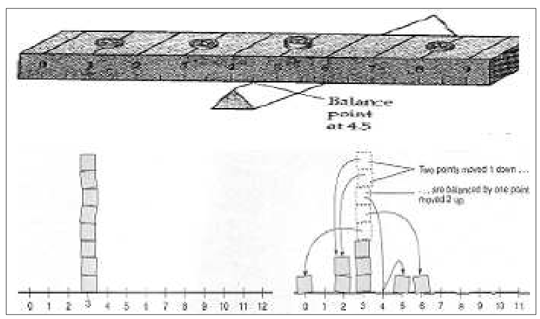
<그림 1-2> 신호 · 잡음 관점에서의 산술 평균

3) 수학적 지식으로서의 균형점

균형점 개념은 수학적 개념 · 절차와 직접적으로 관련된다. 토크 개념은 곱셈, 덧셈, 벡터곱을 사용하여 계산한다. Hardiman et al. (1986)은 “저울을 기울어지게 하는 무게 효과는 무게(w)와 받침점으로부터 거리(d)의 곱에 의해 결정된다.”고 하였으며, 이를 “토크(Torque)”라고 명명하였다. 이런 수학적 개념은 산술 평균에 의한 편차의 합이 0이 되는 성질과 연관된다.

(4) 통계적 지식으로서의 균형점

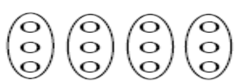
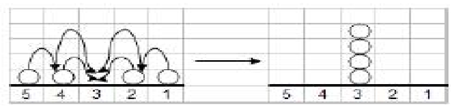
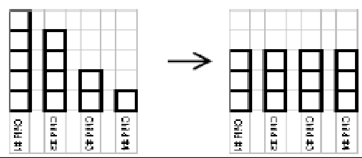
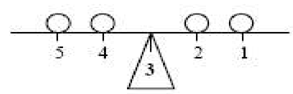
<그림 2>는 통계적 개념으로서 대표성을 나타내기 위해서 어떻게 균형점을 묘사할 수 있는지를 보여준다. <그림 2>의 위쪽 그림은 자료의 도수 분포가 무게의 분포와 유사하므로 저울의 받침점(균형점)이 산술 평균으로 간주될 수 있음을 보여주는 것이고(Aufmann, Lockwood, Nation, & Clegg, 2007), 아래쪽 그림은 균형을 유지하기 위해서 같은 개수의 블록을 가상의 중심(산술 평균)으로부터 양쪽에 같은 거리만큼 움직여야함을 보여 줌으로서 그 중심이 산술 평균임을 설명하고 있다(Van deWalle & Lovin, 2006). 즉, 균형점을 통해 자료 집합의 원래 분포를 가장 잘 대표할 수 있는 것이 산술 평균임을 설명할 수 있다.



<그림 2> 균형점으로서의 산술 평균

균형점 개념은 균형에 대한 경험과 일반적인 지식을 형성하도록 연결시켜 주고, 논리적으로 산술 평균의 정확한 접근을 이끌며, 산술 평균을 결정하는데 중요한 개념인 상대 도수를 명확히 하는데 도움을 주기 때문에 매우 유용하다(Hardiman, Well, & Pollatsek, 1984, p. 794). <표 1>은 산술 평균에 대한 균등 분배와 균형점 개념을 다양한 표현 방법으로 설명한 것이다(Marnich, 2008).

<표 1> 균등 분배와 균형점 개념의 산술 평균

	균등 분배	균형점
현실 세계 상황	4명의 학생들이 학교에 초콜릿을 5,4,2,1개씩 각각 가지고 왔다. 4명의 학생에게 초콜릿을 공평하게 나누어 준다면 몇 개씩 줄 수 있는가?	4명의 학생들이 학교에 초콜릿을 5,4,2,1개씩 각각 가지고 왔다. 초콜릿의 평균 개수는 몇 개인가?
구두 표현	"나는 동일하게 나누어 주고 개별적으로 봉투에 초콜릿을 담았다."	"나는 중간(또는 균형점)에 있는 수가 각 학생들이 가지고 온 초콜릿 수임을 알았다"
그림 표현		
서술 표현	$5+4+2+1=12$ … $12\div 4=3$	$(5-x)+(4-x)+(2-x)+(1-x)=0$ $12-4x=0$ … $x=3$
개념 모델		

Ⅲ. 연구 방법

1. 참여자

서울에 소재한 A대학교 사범대학 수학교육과 1, 2, 3학년 학생들을 대상으로 현재 재적 중인 인원을 무작위로 30명을 추출하여 산술 평균의 개념화에 관한 설문을 실시하였다. 30명의 학생들 중 1명을 제외하고 29명의 학생들이 모두 교사가 되고자 희망했으며, 학년별로 3학년이 20명, 2학년이 4명, 1학년이 6명이었고, 남학생은 16명, 여학생은 14명이었다. 또한 이들 중 사범대학 내 교육과정에서 산술 평균과 관련한 통계학 강좌를 수강한 학생은 20명, 수강 중인 학생은 1명, 수강하지 않은 학생은 9명이었다. 30명의 학생들의 평점은 3.5(4.5만점)이상이 24명으로 교과 내용학, 교과 교육학 과목에 대해서 전반적으로 우수하였으며, 특히 통계학 강좌를 수강한 학생들의 통계학 강좌의 학점은 A학점 15명, B학점 5명으로 보편적으로 우수한 것으로 확인되었다. 대부분의 예비교사들은 산술 평균을 산술 평균의 알고리즘 공식으로 배운 것으로 확인되었다.

2. 연구 절차

본 연구는 산술 평균의 개념화를 알아보기 위해서 30명의 사범대학 학생들을 대상으로 2009년 8월부터 2010년 1월까지 6개월 동안 수행되었다. 우선 학생들은 일반적인 학업 수준·사회적 배경 ·통계학과 관련된 수학적 성향 및 수준을 알아보기 위해서 자기 관찰 체크 리스트, 사회적 배경 설문지를 작성하였다. 그 다음 학생들이 산술 평균을 어떻게 개념화 하고 있는지 알아보기 위하여 산술 평균의 의미를 묻는 설문을 1차적으로 실시하고, 2차적으로 예비교사들의 개념화가 산술 평균의 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지는지 알아보기 위하여 다양한 표현(이산량, 연속량, 문자, 수, 그래프)과 평가의 내용요소(산술 평균 구하기, 미지의 변량 구하기)로 구성된 문항으로 평가를 실시하였다. 이후 설문지와 평가지의 결과를 토대로 분석틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 산술 평균의 개념화를 범주화하고 분석을 실시하였다. 좀 더 깊이 있는 분석을 위해 설문지와 평가지로 확인이 어려운 부분들에 대해서는 1·2차 설문 참여자 중 면담 대상자를 선정하고 면담 계획서를 작성한 후 반구조화된(Semi-structured) 개별 임상면담을 실시하여

확인하였다. 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사하였으며, 개별 면담 자료는 산술 평균에 대한 개념화를 범주화하고, 산술 평균의 문제 유형과 예비교사들의 개념화 과정의 관련성을 알아보는데 중요한 분석 자료로 사용되었다.

3. 예비 연구

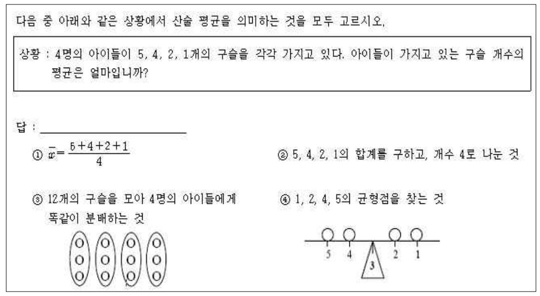
연구자가 작성한 도구가 연구검사 도구로 적절한지를 알아보기 위하여 B대학 수학교육 전공 대학원생 2명을 대상으로 설문지와 평가지를 이용하여 산술 평균을 어떻게 개념화 하고 있는지를 연구하였다. 이 과정에서 초안으로 작성한 연구도구의 오류를 수정하고 2명의 수학교육 전문가의 조언을 통하여 연구 도구를 확정하였다.

4. 자료 수집 및 분석

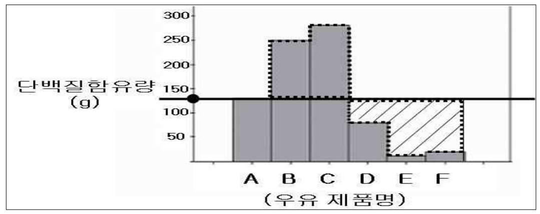
본 연구는 학생들이 작성한 설문지와 평가지, 면담 과정이 녹화된 비디오테이프, 면담 과정에서 학생들이 작성한 기록지, 연구자가 적은 기록물과 녹음 내용에 대한 면담 일지 등의 자료를 수집하여 일정 비교 분석법(Constant Comparative Method)을 사용하여 분석을 실시하였다.

(1) 산술 평균의 개념화

예비교사들의 산술 평균의 개념화를 알아보기 위하여 다음과 같은 형식의 질문을 하였다. “산술 평균의 의미 쓰시오.”, “철수가 5개, 영희가 4개, 민수가 3개, 나영이가 4개의 사탕을 가지고 있다. 학생들 개개인이 가지고 있는 사탕 전체 개수를 하나의 수로 나타내시오. 그리고 그 수를 무엇이라 합니까?”에 대해 자유롭게 쓰게 했으며, <그림 3>을 제시하고 산술 평균의 의미를 모두 고르도록 하였다. 또한 <그림 4>를 제시하여 기준선의 위, 아래 도형의 넓이가 같을 때 표시되어 있는 점이 의미하는 통계적 측도를 적고 그 이유를 자세히 쓰게 하였다. 예비교사들이 작성한 설문 내용 중에서 분석이 애매하거나 보충 설명이 필요한 경우는 개별 면담을 통해서 산술 평균을 어떻게 개념화하고 있는지 확인하였다. 설문지와 면담일지를 통해서 산술 평균의 개념화에 대한 범주화를 실시하고 분석을 하였다.



<그림 3> 산술 평균의 의미를 묻는 선택형 설문 문항



<그림 4> 히스토그램을 통한 산술 평균의 의미를 묻는 설문 문항

(2) 산술 평균의 문제 해결 과정

산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화가 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지는지 알아보기 위하여 MacCullough (2007), Marnich (2008), Mokros와 Russell (1995), Strauss와 Bichler (1988)의 연구에서 사용되었던 대표 평가 문항들을 연구 목적에 맞게 선택하여 번역한 후 우리나라 문맥에 맞게 재구성하여 평가지를 구성하였다. 평가지에 구성된 문항들은 산술 평균의 개념화와 관련하여 이전 연구에서 검증받은 문항들이며 연구 결과에 높은 타당도와 신뢰도를 보여주었다. 산술 평균의 문제 유형과 예비교사들의 개념화 과정 사이에 어떤 관련성이 있는지 알아보기 위하여 문항의 구성은 표현 방법(이산량·연속량의 그림 표현, 문자·수의 상징 표현)과 평가 내용요소(산술 평균을 구하기, 미지의 변량을 구하기)를 통해 서로 다른 문제 유형으로 구별하여 제시하였다. 그러나 ‘수’로 표현된 ‘산술 평균 구하기’ 문항은 예비연구의 결과에서 모든 참여자가 산술 평균 공식을 통해 산술

평균을 구했기 때문에 다양한 개념화를 조사할 수 없어 평가문항에서 제외하였다. 본 연구에서 사용한 평가지의 문항 구성 및 내용은 <부록>에 첨부하였다.

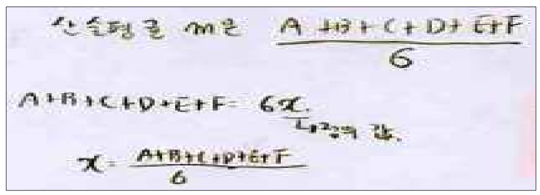
Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 산술 평균의 개념화

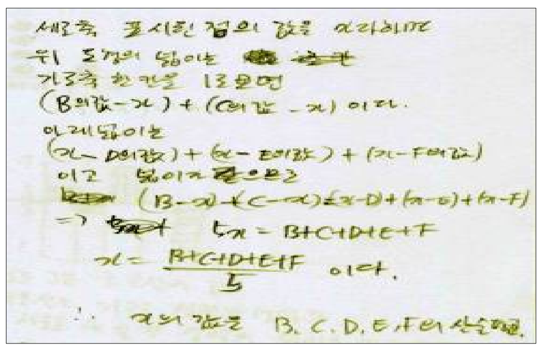
이해는 대상 또는 과정에 대한 일반화된 의미이며 시험되어진 일반화된 통찰로 여러 상황에서 대상(Object), 사실(Fact), 과정(Process), 사고(Idea)를 사용하는 능력을 포함한다(Bigge & Sherimis, 1999, p. 85). 따라서 산술 평균에 대한 개념화 역시 다양한 상황에서 여러 방법을 이용하여 추측할 수 있을 뿐이다. 본 연구에서는 예비교사들이 1차 설문에서 작성한 산술 평균의 의미와 표상 예시, 문제 접근 과정, 개별 면담 자료를 기초로 분석하여 산술 평균의 개념화를 크게 '수학적 지식', '유추적 지식', '통계적 지식'에 의한 개념화로 범주화하였다. 이는 Pollatsek et al. (1981)이 산술 평균을 개념화하기 위해서 범주화한 계산적 지식, 기능적 지식, 유추적 지식과 유사하다. 본 연구에서는 선행연구들(Cai, 1998; Leavy & O′loghlin, 2006; Russell & Mokros, 1996)을 토대로 수학적 지식은 절차적 지식의 상황과 개념적 지식의 상황으로 세분화하고, 유추적 지식은 균등분배의 상황과 균형점 개념의 상황으로 좀 더 세분화하였다. 산술 평균에 대한 예비교사들의 1, 2차 설문 결과를 분석한 결과 30명 중 산술 평균에 대한 의미, 표상, 문제 접근 과정의 의한 범주가 모두 일치하는 경우는 없었으며 질문에 따라 산술 평균의 다른 개념화 범주를 나타냈다.

'수학적 절차 지식'은 산술평균의 의미로 각 변량을 더한 후 나누는 전략을 쓰거나 상징적 표상을 통해 산술평균 공식을 작성하고 이를 문제 해결에 이용한 경우이다. 예를 들어, "도수의 총합을 도수의 총 개수로 나눈 것", "$\dfrac{\text{변량의 총합}}{\text{변량의 총 개수}}$" 또는 "$\dfrac{a+b}{2}$, "$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$", "$\dfrac{\sum a_i n_i}{\sum n_i}$" 등으로 의미를 이해하거나 선택형 질문의 경우 "5, 4, 2, 1개의 구슬의 평균"을 묻는 질문에 대한 답으로 "5, 4, 2, 1의 합계를 구하고, 개수 4로 나눈 것" 또는 "$\overline{x}=\dfrac{5+4+2+1}{4}$" 의 선택지를 택한 경우이다. 또한 문제 접근 과정에서 통계적 측도를 산술평균으로 작성하고 그 이유에 대해서 "수식에 의해서"(Z), "넓이가 같아서 6으로 나눴을 때 값이 같다"(D, P), "$\dfrac{A+B+C+D+E+F}{6}$ = 긁은 수평선 값"(G, T)와 같이 수학적 절차 지식을 사용하여 산술평균을 개념화하였다.

'수학적 개념 지식'은 산술 평균의 의미를 묻는 질문에서 수학적 절차 지식만 나타났기 때문에 분석되지 않았으나 문제 접근 과정에서 예비교사 L, M은 대수식에 의한 공식 조작을 통해 통계적 측도로서 답을 산술평균이라고 적어 내고 그 이유로 <그림 5>, <그림 6>과 같이 대수적 이해를 바탕으로 하는 산술평균의 수학적 개념 지식을 보여주었다.



<그림 5> L의 대수적 이해를 바탕으로 한 수학적 개념 지식



<그림 6> M의 대수적 이해를 바탕으로 한 수학적 개념 지식

'통계적 지식'에 의한 개념화는 산술 평균을 "주어진 여러 수치 자료를 대표하는 대푯값의 한 종류"(P), "대

푯값들 중 하나"(V, X)의 의미로 이해하거나 "철수가 5개, 영희가 4개, 민수가 3개, 나영이가 4개"의 사탕을 가지고 있을 때 학생들 개개인이 가지고 있는 사탕 전체 개수를 하나의 수로 나타낼 수 있는가와 같은 자료의 대표성을 묻는 질문에서 통계적 요약 개념으로서 산술 평균을 이해하고 이를 구한 경우이다. 다음은 예비교사 P의 개별면담 과정의 일부로 산술 평균의 통계적 지식을 보여준다(프로토콜 04-09). 이처럼 전체 자료들을 줄여서 숫자로 나타내는 것이 통계적 요약 개념이다(이영하·남주현, 2005).

00 P : 그니깐 철수 3개, 영희가 2개, 용수 7개를 찾았잖아요?
01 R : 네
02 P : 애네들이 찾은 각각의 네잎클로버의 개수는 여기서 의미가 없는 거 같아요. 애네의 평균을 구해서... 3 더하기 2 더하기 7은 12이고 3으로 나누면 4잖아요. 그러니깐 각각 4개씩 찾았다 이건데
03 R : 음.
04 P : 그니깐 애네 3명을 통틀어서 대표할 수 있는 값이 4라는 의미로 생각했어요.
05 R : 그게 산술 평균의 의미라는 거죠?
06 P : 네. 애네 3명을 통틀어서 나타낼 수 있는 거요.
07 P : 그래서 그런 상황이 어디에서 적용될까를 생각해 보다가 네잎클로버 찾기 대회를 나가서 심사위원이 봤을 때는 각각의 팀원이 찾은 네잎클로버의 개수보다는 팀 전체가 찾은 네잎클로버의 개수에 관심이 있으니깐 이제 대푯값을 심사위원들이 보고 판단한다는 거죠.
08 R : 그럼 대푯값의 의미가 여러 개의 수치가 있는데 그걸 어떻게 하는 게 대푯값의 의미인가요?
09 P : 여러 개의 수를 하나의 수로 나타내는 거요.

P는 산술 평균을 자료를 대표할 수 있은 값으로 개념화하고 있었다(프로토콜 04). 기존 연구들에 의하면, 많은 학생들이 산술 평균을 알고리즘 공식으로 이해하고 있으며 통계적 지식을 사용하여 산술 평균을 개념화하고 있는 학생들이 적다는 점을 지적하였다.

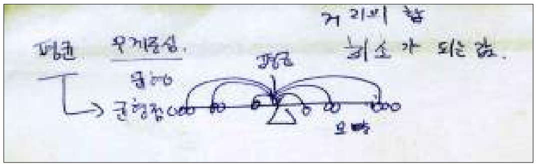
'유추적 지식'에 의한 개념화는 각각 균등 분배의 개념과 균형점 개념의 이해를 바탕으로 하는 경우로 세분되었다. '균등 분배'에 의한 개념화는 "어떤 양을 등분했을 때 부분"(J)으로 산술 평균의 의미를 이해하거나 평균을 묻는 선택형 질문에서 "12개의 구슬을 모아 4명의 아이들에게 똑같이 분배하는 것"의 선택지를 택한 경우이다. J의 경우 개별 면담과정에서 "각자의 양을 개인이 가지고 있는 걸로 안 보고 전체적으로 가지고 있다고 생각해서 (모든) 양을 하나로 모아서 하나씩 똑같이 분배했을 때 한 사람이 받을 수 있는 양"이라고 설명하였다. 또한 문제 접근 과정에서 통계적 측도를 산술 평균이라 쓰고 그 이유를 "모두가 동일한 값을 가졌을 때", "양을 동일하게 해주는 점" 등으로 설명하며 균등분배의 개념을 나타냈다. Russell과 Mokros (1996)는 산술 평균을 균등 분배 개념으로 유추하는 것이 산술 평균 공식 이해에 효과적이지만 실제 자료의 분포와 산술 평균과의 관계성을 이해시키는데 한계가 있다고 지적하였다. '균형점'에 의한 개념화는 각 변량을 수직선 모델에 표현하고 "각 변량과의 거리의 합이 최소인 점"(N), "주어진 자료들의 중간값"(Q) 등으로 산술 평균의 의미를 작성하고 평균을 묻는 선택형 질문에서 "균형점을 찾는 것"의 선택지를 택한 경우이다. Mokros와 Russell (1995)의 연구에서는 중간점(Midpoint)으로서 평균과 균형점으로서의 평균을 구분하고 중간점으로서 평균이 단순히 좌우 대칭 방식의 시각적인 접근이라고 하였다. 그러나 본 연구에서 '중간값'이라고 작성한 참여자들은 직관에 의한 거리에 초점이 있는 것이 아니라 각 자료 값에 주목하여 거리를 편차로 간주하고 산술 평균을 이해하고 있어 균형점 개념으로 분석하였다. 특히 J는 면담과정에서 "오차 개념으로 생각했는데 어떤 선을 평균값이라고 보고 위쪽은 플러스, 아래쪽은 마이너스로 봐서 비교해 보다가 상쇄가 되면 그게 평균값이다"라고 대답하였다. 다음은 예비교사 N의 개별면담 과정이며 이는 균형점 개념을 통해서 산술 평균을 개념화한 경우이다.

10 R : 산술 평균의 의미를 변량의 거리가 최소가 되게 하는 값이라고 한 것에 부연 설명을 해볼래요?
11 N : 평균이라고 하는 게 무게 중심...무게 중심이라면 조금 이상하긴 하지만요. 무게가 균형을 이루면 되잖아요. 음...(수직선을 그려서 설명한다) 한마디로 균형점이라고 생각하면 변량을 죽 나열했을 때 더 이상 흔들리지 않는 이 점이 평균이 되잖아요. 이 때 한 쪽으로 치우

치게 되면 거리가 늘어나게 되니깐 거리의 합 이 최소가 되어야죠.

12 R : 그럼 여기서 중심과의 거리는 뭘 뜻하죠?

13 N : 양이죠.



<그림 7> N의 균형점 개념

N은 균형점의 개념으로 산술 평균을 개념화하고 있었는데(프로토콜 11), 선행 연구들은 균형점으로서의 산술 평균의 개념화가 자료의 분포 내에서 중심 측도 의미를 강조할 수 있기 때문에 유용하다고 하였다(Hardiman, Well & Pollatsek, 1984; Mokros & Russell, 1995; Pollatsek et al., 1981).

본 연구에서는 산술 평균의 의미를 서술형과 선택형으로 구분하여 실시하였는데 서술형 질문에 대한 예비교사 30명의 응답을 분석한 결과, 산술 평균의 의미를 수학적 지식으로 개념화한 경우가 27명(90%)으로 가장 많았으며, 통계적 지식으로만 개념화한 경우는 없었고, 3명(10%)이 통계적 지식과 수학적 절차 지식을 동시에 개념화하고 있었다. 또한 유추적 지식의 경우 균등분배 개념이 1명(3.3%), 균형점 개념이 2명(6.7%)이었고 그 중 균형점 개념의 경우 1명의 학생이 수학적 절차 지식과 함께 의미를 이해하고 있었다. Leavy와 O'loughlin (2006)의 연구에서는 예비교사 263명을 대상으로 산술 평균의 이해를 조사한 결과 200명(76%)이 계산적 알고리즘에 의해 산술 평균을 제한적으로 이해하고 있었다. 대부분의 예비교사들이 수학적 절차 지식에 의해 산술 평균의 의미를 이해하는 것은 산술 평균을 공식에 의해 도입하였을 뿐 아니라 산술 평균을 계산에 기초한 수학적 알고리즘 위주의 학습을 하였기 때문이다(Pollatsek et al., 1981; Strauss & Bichler, 1988).

자료의 대표성을 묻는 질문에서 22명의 예비교사가 '산술 평균' 또는 '평균'을 하나의 수로서 제시하였으나 나머지는 '총합 6'이 4명(C, I, Z, 라), '변량 5, 4, 3, 4'가 2명(L, Q), '이해 안감'이 2명(R, T)으로 나타났다. 다음은 2차 평가 이후 L의 개별면담 과정의 일부이다.

14 R : (작성했던 설문지를 가리키며) 2번 질문을 다시 읽어 보고 저에게 자세히 설명해 주세요.

15 L : 개개인이 가지고 있는 사탕 전체를 하나의 수로 나타내라고 했으니까 철수 5, 영희 4, 민수 3, 나영이 4예요.

(중략)

16 R : 그러면 이 질문과 관련하여 산술 평균의 의미를 어떻게 생각해요?

17 L : 전 그냥 정의를 따라서 다 더한 거에다가 그 개수로 나눈 것이라고 생각해요.

18 R : (산술 평균) 공식을 말하는 건가요?

19 L : (끄덕이며) 네

L뿐 아니라 대다수의 예비교사들이 수학적 절차 지식을 이용하여 산술 평균을 "도수의 총합을 도수의 총 개수로 나눈 것"으로 개념화하고 있었다. 산술 평균을 수학적 절차 지식으로만 개념화하는 경우 자료의 대표성을 나타내는 산술 평균의 통계적 요약 개념 형성에 어려움을 나타냈다. 이는 Mokros와 Russell (1995)의 연구에서 산술 평균을 수학적 알고리즘에 의해 개념화하는 학생들이 평균의 대표성 개념을 잘 이해하지 못한다는 연구 결과와 일치한다. 계산 공식에 관한 지식은 근본적인 개념 이해를 의미하는 것이 아니며 실제로는 좀 더 충분한 이해의 습득을 저해하므로 지양되어야 한다(Pollatsek et al., 1981).

'산술 평균의 개념화를 위한 가장 근본적인 구조'를 알아내기 위해서는 수, 표, 구두 설명 등의 다양한 유형으로 제시된 평균 문제를 학생들에게 제시하고 그 반응을 살펴보아야 한다. 본 연구에서는 예비교사들에게 그림으로 제시된 히스토그램에서 통계적 측도를 묻고 그 점이 산술 평균이 되는 이유를 적게 하였다. 분석 결과 산술 평균의 의미를 유추적 지식에 의해 개념화하는 경우가 19명(63.3%)(균등분배 15명, 균형점 4명)으로 가장 많았고, 통계적 지식으로 개념화한 경우는 없었으며, 수학적 지식에 의해 개념화한 경우가 7명(23.3%)(절차 지식 3명, 개념 지식 4명)이었다. 이중 수학적 지식(절차)과 유추적 지식(균등분배)으로 동시에 문제를 접하고 있는 예비교사가 1명(3.3%), 답만 작성하고 그 이유를 적지 않아 개념화 분석이 불가능한 예비교사가 5명(16.7%)으로 나타났다.

히스토그램을 통하여 산술 평균을 묻는 질문의 분석

결과는 산술 평균의 의미를 묻는 앞선 질문에서 대부분의 예비교사들이 산술 평균을 수학적 절차 지식으로 개념화했던 결과와는 상이하게 다르며 특히 균등 분배와 균형점 개념이 많이 나타났다. 그 이유는 질문에 대한 표현 방법이 산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화에 영향을 주었기 때문으로 분석되었다. Pollatsek et al. (1981)은 서술형 평가를 기반으로 한 연구 결과에서 학생들이 히스토그램을 제시했을 때 산술 평균을 상당히 잘 추정한다는 것이 확인되었는데, 그 이유는 그림 표상이 구두 설명보다 더 직관적이기 때문이다. 따라서 산술 평균의 개념 도입 시기에는 다양한 유형의 문제 상황을 제시해주어야 하며 특히, 언어-대수적 표현보다는 다이어그램과 같은 시각적 표현을 이용한 문제 상황을 제시해 주는 것이 개념적 이해에 도움이 될 것이다.

2. 산술 평균의 문제 해결 과정

본 연구에서는 예비교사들이 어떤 지식을 이용하여 산술 평균의 문제를 해결하며, 문제의 표현 방법(이산량·연속량의 그림 표현, 문자·수의 상징 표현)과 평가의 내용 요소(산술 평균 구하기, 미지의 변량 구하기)가 산술 평균의 개념화에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 예비교사들이 다양한 유형의 산술 평균 문제를 풀은 결과 초콜릿을 '이산량' 그림으로 표현한 '산술 평균 구하기' 문제 유형은 30명(100%), 건물의 높이를 '연속량' 그림으로 표현한 '산술 평균 구하기' 문제 유형은 28명(93.3%), '연속량'으로서 산포도로 환자의 혈압을 표현한 '산술 평균 구하기' 문제 유형은 25명(83.3%), 블록 쌓기를 '이산량' 그림으로 표현한 '미지의 변량 구하기' 문제 유형은 29명(96.7%), 표본의 무게를 '연속량' 그림으로 표현한 '미지의 변량 구하기' 문제 유형은 27명(90%), '문자(a,b,c,$\overline{x}$)와 수'의 상징적 기호로 제시한 '미지의 변량 구하기' 문제 유형은 29명(96.7%), 가격을 상징적 기호 '수'로 제시한 '미지의 변량 구하기' 문제 유형은 26명(86.7%)이 정답을 맞혔다. '산술 평균 구하기'와 '미지의 변량 구하기'의 각각의 문제 유형에서 '이산량'과 '연속량'의 표현 방법에 대한 정답률을 비교할 때 큰 차이가 없는 것으로 나타났다. 그 이유는 예비교사들이 연속량으로 표현된 건물의 높이를 "일부 떼어내 옮길 수 있다고 가정"(K), "그래프를 5m단위로 잘라"(M) 등과 같이 단위길이를 가정하여 이산량으로 간주하였기 때문이다. 이는 초·중등학생 대상의 Strauss와 Bichler (1988)의 연구 결과와 유사하다. 그것은 연속량의 경우 단위로 분할하여 접근할 수 있고 학생의 판단에서 연속량과 비연속량은 중요한 요인이 아니기 때문이다(Murray & Holm, 1982). 또한 '이산량'과 '연속량', '문자'와 '수' 각각의 문제 유형에서 '산술 평균 구하기'와 '미지의 변량 구하기'의 평가 내용 요소에 대한 정답률을 비교할 때도 큰 차이가 없었다. 그 이유는 '산술 평균 구하기'의 경우 표현 방법과는 무관하게 대부분의 예비교사들이 수학적 절차 지식(이산량 26명, 연속량 27명)으로 접근하고 있으며 '미지의 변량 구하기'의 경우 산술적 이해와 대수적 이해를 바탕으로 하는 수학적 개념 지식(이산량 26명, 연속량 21명, 문자·수 28명)으로 문제를 접근하고 있기 때문이다.

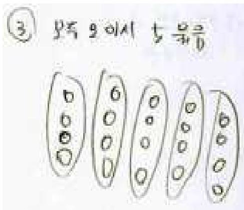
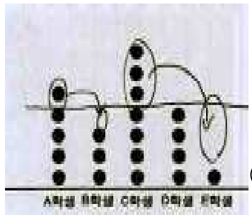
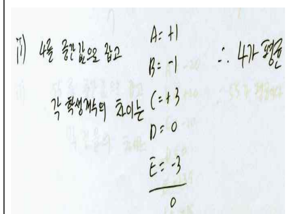
'산술 평균 구하기'의 문항에서 틀린 예비교사 7명(산포도 5명 포함)의 경우 1명(A)은 문제를 풀지 않았고, 나머지 6명(다, H, K, U, 나)은 수학적 절차 지식을 이용하여 풀이를 시도했으나 그림에 표현된 변량을 누락시켜 평균을 구하였거나 변량의 총 개수를 틀리게 공식에 적용하였다. '미지의 변량 구하기' 문항에서도 틀린 예비교사 7명의 경우 1명(다)은 한 개의 변량을 잘못 구해 공식에 적용하여 계산하였고, 6명(A, C, G, I, S, T)은 이유 없이 풀지 않았다. 오답을 작성한 7명 예비교사들

<표 2> 산술평균에 대한 예비교사들의 문제 해결 결과

표상 / 내용 요소	그림 표현			상징 표현	
	이산량	연속량		문자·수	수
		막대그래프	산포도		
산술 평균 구하기	30명(0명)	28명(2명)	25명(5명)	·	
미지의 변량 구하기	29명(1명)	27명(3명)		30명(0명)	27명(3명)

※ 정답 인원(오답 인원)

<표 3> 유추적 지식을 이용한 이산량의 산술 평균 구하기

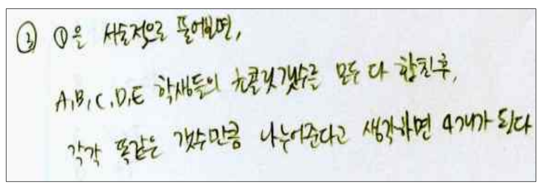
유추적 지식	균등 분배 개념		균형점 개념
	균등 재분배	균등화 전략	
예비교사의 수 (중복인원포함)	10명	19명	3명
답안의 예시	 (M)	 (Z)	 (G)

(답과 이유를 적지 않은 7명을 제외하고)은 그림으로 표현된 문제 유형에서 산술 평균의 수학적 지식을 통해 산술 평균을 구했거나 미지의 변량을 구한 것으로 나타났다. 특히, 예비교사 다의 경우 7개 모든 평가 문항을 수학적 지식(절차적 또는 개념적)으로 접근하였으며 그 중 그림으로 표현된 3개 문항에서 오답을 작성하였다. 분석 결과 다는 수학적 지식으로만 산술 평균을 개념화하고 있었다.

(1) 이산량의 산술 평균 구하기

이산량을 그림으로 표현한 산술 평균 구하기 문제에서 30명의 예비교사들은 수학적 절차적 지식, 유추적 지식(균등분배, 균형점)을 통해 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 대부분의 예비교사들이 산술 평균의 절차적 지식을 이용하여 "평균은 $\frac{5+3+7+4+1}{5}$은 4이다", "초콜릿의 개수를 다 더해서 학생 수인 5로 나눈다" 등으로 문제를 해결하였다. 그 중 예비교사 A는 "평균을 $\bar{x}$라 하면 $\bar{x}=\frac{5+3+7+4+1}{5}=4$"로 산술 평균의 상징적 표상을 알고 문제를 해결하였다. 유추적 지식을 통해 문제를 해결한 경우는 초콜릿을 모두 거둬들이고 다시 나누어주는 균등 재분배(Redistribution)와 '신호/잡음' 관점으로 자료의 분포를 이해하고 균등화(Leveling off) 전략을 이용하는 균등분배로 나누어 나타났고, 또한 '신호/잡음' 관점에 의해 산술 평균을 기준으로 편차가 '0'이 되도록 문제를 접근하는 균형점 개념이 확인되었다. <표 3>은 유추적 지식의 개념화를 통해 문제를 해결한 예비교사의 수와 예비교사들이 제시한 답안의 예시를 나타낸 것이다.

문제 해결에서 나타난 예비교사들의 개념화를 사례 중심으로 좀 더 자세히 살펴보면, 예비교사 V의 경우 균등 재분배 개념을 이용하여 문제를 해결하였는데 <그림 8>과 같이 산술 평균의 계산 알고리즘을 '서술적으로 풀어보면' 균등 재분배 개념이 된다고 설명하였다.

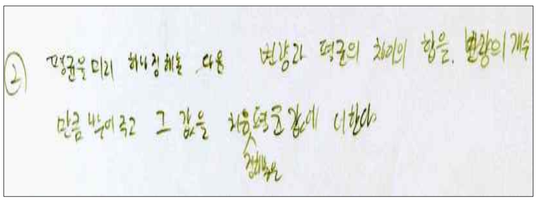


<그림 8> V의 균등 분배 개념과 산술 평균 공식과의 관련성

이것은 예비교사들이 균등 분배 개념에 의해 산술 평균을 개념화할 경우 산술 평균 계산 공식을 쉽게 이해할 수 있음을 나타낸다(Russel & Morkos, 1996). 또한 예비교사 F, L, N은 문제 해결 방법 중 '가평균'을 이용하여 산술 평균을 구하였는데 개별면담결과 3명 모두 유추적 지식을 통해 가평균을 이용하는 공식을 이해하고 있었다. F와 L은 균등분배 개념을 통해서 가평균을 이용하는 공식을 이해하고 있었고, N의 경우는 균형점 개념을 통해서 가평균 공식과 산술 평균 알고리즘이 동일하다는

것을 이해하고 있었다.

20 F : 미리 평균을 정해가지고....아까 (산술 평균 의미 질문에서) 양을 같게 해준다고 했잖아요.
(중략)
21 F : 만약에 평균보다 많은 양을 나누어주면 비는 게 있을 것이고 평균보다 작은 양을 나누어 주면 남는 게 있잖아요. 그니깐 예를 들어서 임의로 잡아놓은 평균이 원래 평균보다 더 작다면 남는 게 있을 거죠?
22 R : 그렇죠.
23 F : 남는 부분을 또 변량의 개수인 5명의 학생에게 똑같이 나누어 주어서 갖게 하는 거예요.
24 R : 그러면 이때 평균은 어떤 의미를 가지고 있나요?
25 F : 아까 전처럼 (모든 학생이) 동일한 양을 가지고 있다는 거죠.

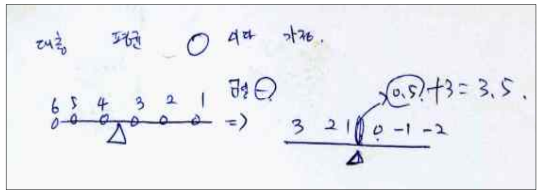


<그림 9> F의 가평균을 이용한 풀이

면담 결과 예비교사 F, L은 가평균을 이용하여 산술 평균을 구하는 방법을 배운 적이 없었다. 그러나 균등 분배의 개념을 통해 그 방법을 자연스럽게 적용하고 있었고 원래의 산술 평균 공식을 사용하는 것보다 계산이 빠르고 편리하다고 말했다.

예비교사 N의 경우는 가평균을 이용하여 산술 평균 구하는 방법을 배운 적이 있었지만 균형점 개념을 통하여 산술 평균을 개념화함으로써 그 공식을 자연스럽게 이해하고 적용하고 있었다(프로토콜 27). 다음은 N과의 면담 내용이다.

26 R : 그러면 산술 평균 공식과 앞서 말한 '균형'이라고 말한 의미와 연관하여 이야기해 줄 수 있어요?
27 N : 예. 만약에 이렇게 있다고 하면요(저울 모양의 그림을 그린다)... 대충 가평균을 3이라고 잡았아요. 균일하다면 3만큼 다 빼도 이렇게 되잖아요(저울이 균형을 이룸). 이렇게 되면 균형점을 '0'이라 봤으면 이쪽(오른쪽)으로 기우니깐 안 되고 이러면 이쪽으로 기우니깐 안 되고. 그래서 대략 '0.5'가 나왔어요. 그러면 아까 전부 3을 다 빼줬으니깐 다시 더해주면 평균은 3.5가 되겠죠(다시 균형을 이룸).



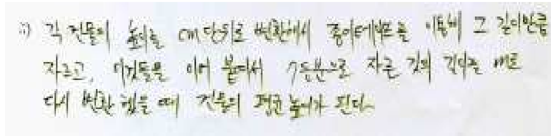
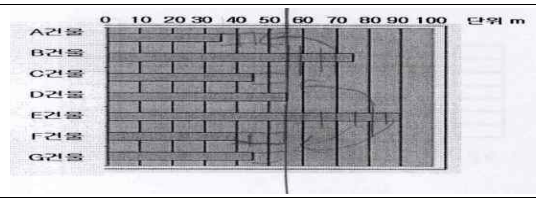
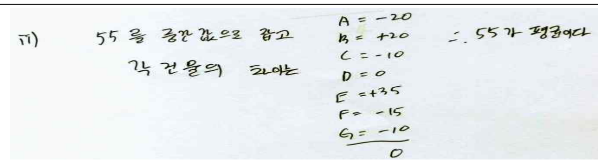
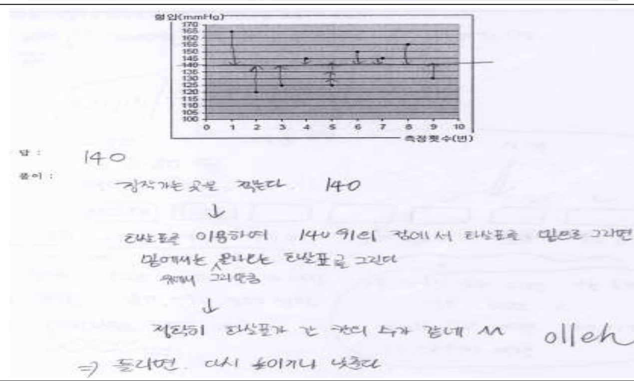
<그림 10> N의 균형점을 이용한 풀이

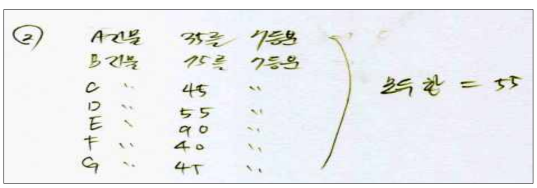
많은 연구자들이 산술 평균의 균등 분배와 균형점 개념을 강조하고 있는데(Mokros & Russell, 1995; Pollatsek, Lima, & Well, 1981), 그 이유는 균등 분배와 균형점의 유추적 지식이 본래의 산술 평균 공식을 개념적으로 이해하는데 유용할 뿐 아니라 이를 응용하고 확장시키는데 도움을 줄 수 있기 때문이다. 따라서 산술 평균의 수학적 알고리즘을 가르치기 이전에 학생들이 균등 분배와 균형점 개념의 유추적 지식을 이용하여 산술 평균을 개념화할 수 있도록 해야 할 것이다.

(2) 연속량의 산술 평균 구하기

연속량을 그림으로 표현한 산술 평균 구하기 문제는 막대그래프로 표현한 문제와 산포도로 표현한 문제가 제시되었다. 막대그래프 문제의 경우 예비교사들은 산술 평균의 수학적 지식(절차적, 개념적), 유추적 지식(균등 분배, 균형점)을 이용하여 문제를 해결한 것으로 나타났다. 대부분의 예비교사들은 산술 평균의 공식인 절차적 지식을 사용하여 "$\frac{35+75+45+55+90+40+45}{7}$", "$35+75+45+55+90+40+45=385,\quad \frac{385}{7}=55$" 등으로 문제를 해결하였다. 예비교사 I의 경우 수학적 개념 지식을 바탕으로 문제를 해결하였는데, 각각의 변량을 7등분을 하고 이 값을 모두 다시 더한 값과 산술 평균 알고리즘에 의한 값과 같음을 대수적으로 이해하고 이를 적용하여 <그림 11>과 같이 문제를 해결하였다.

<표 4> 유추적 지식을 이용한 연속량의 산술 평균 구하기

풀이 전략	그래프 유형	예비교사 수	답안의 예시
균등재분배	막대그래프	1명	 (P)
	산포도	0명	·
균등화 전략	막대그래프	10명	 (M)
	산포도	0명	·
균형점	막대그래프	4명	 (G)
	산포도	9명	 (Z)



<그림 11> I의 대수적 이해를 바탕으로 한 수학적 개념 지식

유추적 지식의 균등분배 개념을 통해 문제를 해결한 예비교사들은 연속량의 그림 표현을 단위 길이로 분할하여 이해하고 있었으며 모든 건물의 길이를 다 이어 붙여서 등분하는 재분배와 산술평균을 선으로 표시하고 높이를 똑같이 맞추는 균등화 전략으로 나누어 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 균형점 개념을 통해 문제를 해결하는 예비교사들은 기준 값을 미리 예상하고 각 변량과 그 값과의 편차를 생각하는 방법으로 접근하여 문제를 해결하였다. <표 4>는 산술 평균의 유추적 지식을 이용해 문제를 해결한 예비교사의 수와 예비교사가 작성한 답안의 예시이다.

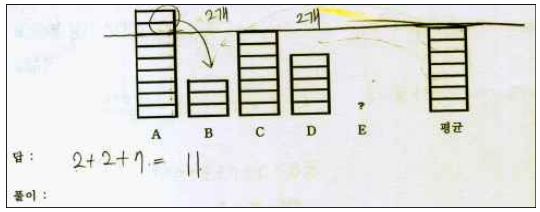
산포도로 제시한 문제의 경우 예비교사들은 산술 평균의 수학적 절차 지식, 유추적 지식(균형점)을 통해서 문제를 해결하였는데, 균등 분배 개념을 이용하는 균등화 전략이 예비교사들의 문제 해결 과정에서 나타나지 않았다. 예비교사 나는 수학적 절차 지식(산술 평균 공식)을 이용하는 이유에 대해서 “대략 추정하여 확인하고 싶었으나 값의 차이가 커서 추정하기 힘들었다. 그래서 모두 더하여 개수로 나눔”이라고 썼고, 변량의 수가 많거나 분포가 복잡할 때 산술 평균 공식을 이용하여 구하는 것이 쉽고 더 빠르게 구할 수 있다고 생각하고 있었다. 또한 K의 경우 막대그래프 문제를 균등분배 개념을 이용하여 해결했으나 산포도로 제시한 문제에서는 그 방법을 이용하지 않는 이유를 개별면담 중에 다음과 같이 말하였다.

28 R : 왜 이 문제는 다른 문제와 달리 산술 평균 공식으로만 풀었나요?
29 K : 딱 문제를 보니깐 점이 찍혀 있고요. 변량 사이의 수치 간격이 크고...음 앞에 문제처럼 (그래프에 표시를 하며) 옮기고, 옮기고 하기가 복잡해서요.

학생 K의 면담 결과 문제의 표현 방법이 산술 평균의 문제 해결 방법에 영향을 준다는 것을 알 수 있었으며 균등 분배의 유추적 지식의 경우 복잡한 문제 상황보다는 변량의 개수가 작거나 변량 간의 차가 작은 비교적 간단한 상황에서 이용될 수 있음을 알 수 있었다.

(3) 이산량의 미지의 변량 구하기

이산량을 그림으로 표현한 미지의 변량 구하기 문제에서 예비교사들은 수학적 개념 지식, 유추적 지식(균등분배)을 이용해 문제를 해결하였다. 특히, “$\frac{9+3+7+5+x}{5}=7$ 이므로 $x=11$”으로 미지의 변량을 ‘x’로 두고 산술 평균의 알고리즘에 대한 대수적 접근을 통해 문제를 해결했으며, 예비교사 C의 경우 ‘평균 7’을 이용하여 총합이 “$7\times5=35$”임을 이해하고 문제에 제시되어진 6명의 블록 개수를 세어 총합에 그 값을 빼어 문제를 해결하였다. C는 산술 평균 알고리즘을 산술적 이해 바탕으로 개념화한 경우로 산술 평균의 공식에서 덧셈과 곱셈사이의 연결성을 이해하고 있었으며, N의 경우는 미지의 변량을 구하기 위해 ‘예상과 확인’의 문제 해결 전략을 사용하고 산술 평균 공식을 이용하여 문제를 해결하기도 하였다. 문제 해결 과정에서 균등 분배 개념의 균등화 전략을 사용하는 예비교사들은 동일하게 7개의 블록을 쌓아야 한다고 이해하고 있었으며 모자란 부분이 11개이므로 답이 11된다고 작성하였다. <그림 12>는 예비교사 나가 쓴 답안으로 균등화 전략을 사용하여 문제를 해결한 사례이다.



<그림 12> 예비교사 나의 균등화 전략

예비교사 U의 경우 유추적 지식의 균등재분배의 개념을 이용하여 문제를 해결하였는데 풀이 방법에 “블록을 전부 모아서 순서대로 하나씩 나눠주고 (모자란 부분을) 다시 쌓아본다.”라고 적었다. 이산량의 미지의 변량 구하기 문제에서는 유추적 지식의 균형점 개념을 통해 문제를 해결한 예비교사는 없었다.

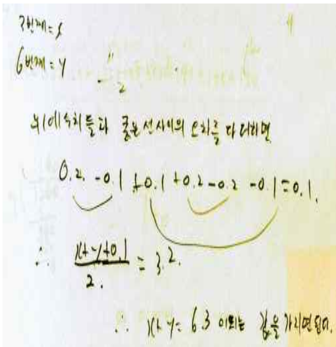
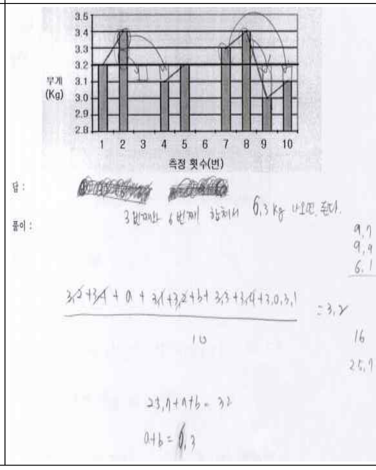
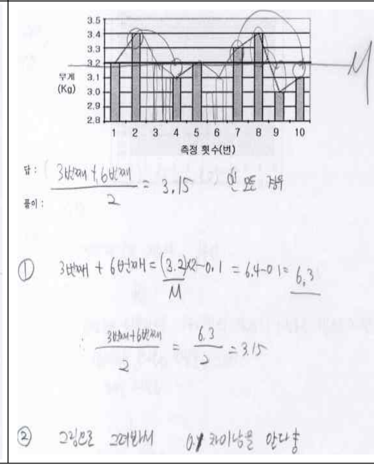
(4) 연속량의 미지의 변량 구하기

연속량을 그림으로 표현한 미지의 변량 구하기 문제의 경우 예비교사들은 수학적 개념 지식, 유추적 지식(균등분배, 균형점)을 통해 문제를 해결하였다. 두 개의 미지의 변량을 구해야 하는 문제에서 많은 예비교사들이 대수적 이해를 바탕으로 하는 수학적 지식을 사용하여 미지의 변량을 “x, y” 또는 “3번째, 4번째”로 두고, “

$$\frac{3.2+3.4+x+3.1+3.2+y+3.3+3.4+3+3.1}{10}=3.2$$

이므로 $x+y=6.3$ 따라서 x, y의 합이 6.3이면 된다.”고 풀이를 제시하였다. 특히 예비교사 C의 경우는 이산량의 미지의 변량구하기 문제에서 적용했던 풀이 방법과 유사하게 수학적 지식의 산술적 이해를 바탕으로 문제에 접근하였으며 ‘평균 3.2’를 이용하여 총합 “$3.2\times10=32$”임을 이해하였고, 문제에서 제시된 변량

<표 5> 예비교사 E, O, Z의 연속량의 미지 변량 구하기

대수적 이해와 균형점 개념(E)	대수적 이해와 균등화 전략 (O)	산술적 이해와 균등화 전략 (Z)
		

의 합을 총합에서 빼 미지의 변량을 구하였다. 균등 재분배 개념으로 푼 예비교사는 없었으나 균등화 전략을 이용하는 균등분배 개념 적용한 예비교사들(H, O, P, Z)과 균형점 개념을 이용하여 문제를 해결한 예비교사들(J, Q, 나, E, V)은 있었다. 특히, E와 V의 경우 대수적 이해를 바탕으로 하는 수학적 개념 지식과 균형점 개념, O와 P에게서는 수학적 개념 지식과 균등분배 개념, Z에게서는 산술적 이해를 바탕으로 하는 수학적 개념 지식과 균등분배 개념이 문제 풀이 과정 중 동시에 발견되었다. <표 5>는 연속량의 미지 변량 구하기 문제에서 예비교사 E, O, Z가 제시한 풀이 답안이다.

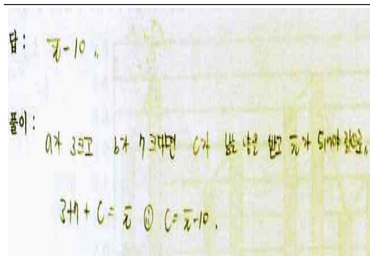
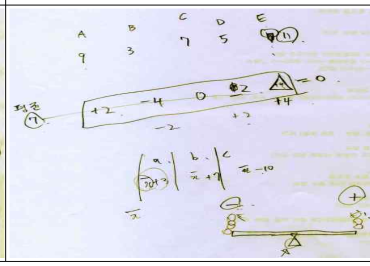
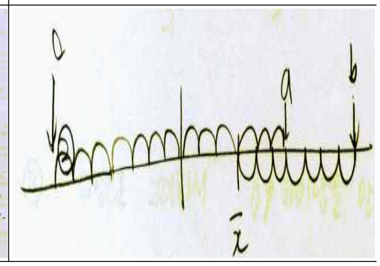
Z의 풀이에서와 같이 그래프에 산술 평균값을 굵은 실선으로 표시하게 되면 각 변량과의 편차를 직관적으로 이해하기가 쉬웠다. 이산량을 그림으로 표현된 미지의 변량 구하기 문제에서는 균형점 개념을 바탕으로 문제를 해결한 예비교사가 없었으나 '연속량'으로 표현된 미지의 변량 구하기 문제에서 균형점 개념이 나온 이유는 문제의 표상에서 평균 3.2Kg에 굵은 실선으로 표시한 것이 문제 해결에 영향을 미쳤기 때문이다.

(5) 문자·수의 미지의 변량 구하기

상징적 표현으로 제시한 미지의 변량 구하기 문제에서 문자·수로 제시된 문제(문제 9)는 가장 많은 28명의 예비교사들이 산술 평균 공식에 의한 대수적 접근을 통해서 문제를 해결하였고, 3명의 예비교사(H, J, Z)만이 유추적 지식(균등분배(H), 균형점(J, Z))을 통해 문제를 해결하였다. <표 6>은 문자·수의 미지의 변량 구하기 문제에서 예비교사 H, J, Z가 제시한 풀이이다.

문제가 수로 제시되었지만 미지 변량이 7개인 문제(문제 12번)의 경우 산술 평균의 공식에 의한 대수적 이해를 바탕으로 해결하는 경우(미지 변량을 '$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$'로 두거나 6개의 변량을 어림하여 정하고 나머지 1개의 변량을 x로 두고 대수식을 이용하는 방법)가 9명, 평균이 '1380원'이므로 9개의 총합 '1380×9' 구하고 이를 9개로 쪼개어 문제를 해결하거나 '예상과 확인' 전략을 사용하여 7개의 미지 변량을 예상하고 산술 평균을 구했을 때 1380원을 만들어 해결하는 등의 산술적 이해를 바탕으로 하는 경우가 4명(M, R, S, G)으로 나타났다. 특히, 미지 변량이 1개인 상징 표현 문제를 유추적 지식의 균형점 개념으로 푼 경우가 2명인데 비해 미지의 변량이 7개인 문제의 경우 균형점 개념을 이용하여 푼 예비교사가 14명으로 나타났다. 그 이유는 예비교사들이 미지수가 1개일 때 1원 1차 방정식 풀이에 익숙해져 있으며, 다수의 미지 변량을 묻는 문제의 유형이 예비교사들의

<표 6> 예비교사 H, J, Z의 문자 · 수의 미지의 변량 구하기

균등 분배 개념(H)	균형점 개념(J)	균형점 개념(Z)
		

문제 해결에 영향을 미쳤기 때문이다.

V. 요약 및 제언

본 연구에서는 30명의 예비교사들을 대상으로 산술 평균을 어떻게 개념화하고 있는지 알아보고, 산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화가 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지고 있는지 알아보았다. 예비교사들이 산술 평균을 어떻게 개념화하고 있는지 분석한 결과 예비교사들은 '수학적 지식', '유추적 지식', '통계적 지식'을 이용하여 산술 평균을 개념화하는 것으로 범주화되었다. 특히, 수학적 지식의 경우 Cai (1998), Leavy와 O'loghlin (2006)가 산술 평균 공식에 대해 절차적 이해와 개념적 이해를 구별한 것과 동일하게 '수학적 절차 지식'과 '수학적 개념 지식'으로 구별되었고, 유추적 지식의 경우 Russell과 Mokros (1996)가 개념 모델로서 제시했던 '균등 분배'와 '균형점' 개념으로 구분되어 나타났다. 이는 Pollatsek et al. (1981)이 제시했던 산술 평균의 계산적 지식, 기능적 지식, 유추적 지식과 일치하는 결과이다.

본 연구에서는 산술 평균의 의미를 수학적 지식을 이용하여 개념화 한 경우(90%)가 가장 많았으며, 유추적 지식(균등 분배(3.3%), 균형점(6.7%)), 통계적 지식(10%)을 이용하여 개념화하고 있는 경우는 상대적으로 매우 적었다. 대부분의 예비교사들이 산술 평균을 공식에 의해 도입 했을 뿐 아니라 산술 평균을 계산에 기초한 수학적 알고리즘 위주로 학습하였기 때문인 것으로 분석되었다. 또한 유추적 지식의 균형점 개념의 경우 직접적인 교수 없이는 발달이 어려운 것도 하나의 원인이 될 수 있다. 그리고 자료의 대표성을 묻는 문제에서 산술 평균을 수학적 절차 지식으로만 개념화하고 있는 경우에 통계적 요약 개념 형성에 어려움이 있는 것으로 나타났다.

본 연구에서는 산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화가 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지고 있는지 알아보기 위해 2차 평가를 실시하였다. 산술 평균의 문제 유형과 예비교사들의 개념화 과정은 어떤 관련성이 있으며, 각 문제 유형별로 예비교사들은 어떤 지식을 이용하여 산술 평균의 문제를 해결하는지 분석하였다. 연구 결과 산술 평균에 관한 문제의 표현 방법과 평가의 내용요소가 예비교사들의 문제 해결 방법에 영향을 준다는 것이 관찰되었다. 문제가 그림으로 표현된 경우가 문자 · 수로 표현된 경우보다 수학적 절차 지식 이외에 유추적 지식을 더 많이 이용하여 문제를 해결하는 것으로 나타났으며, 산술 평균을 구하는 문제보다는 미지의 변량을 구하는 문제에서 수학적 개념 지식을 더 많이 사용하여 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 특히 미지의 변량 구하기 문제는 한 개의 미지의 변량을 묻기 보다는 여러 개의 미지의 변량을 물을 때 균형점 개념을 이용하여 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 이는 문제의 표현 방법과 평가의 내용 요소가 산술 평균의 개념화에 영향을 미치며 다양한 지식을 사용하여 개념화하기 위해서는 적절한 표현 방법과 내용 요소를 알맞게 구성해야 함을 의미하는 것이다.

이산량과 연속량 문제에 대한 예비교사들의 정답률을 비교 분석한 결과 정답률에는 큰 차이가 없었으며, 산술 평균 구하기와 미지의 변량 구하기 문제에서도 정답률에는 큰 차이는 발견되지 않았다. 그 이유는 연속량 문제의 경우 예비교사들이 단위로 분할하여 이산량으로 문제를 접근할 수 있었기 때문이며 산술 평균 구하기 문제의

경우 표현 방법과 무관하게 대부분의 예비교사들이 수학적 절차 지식으로 문제를 해결하였고, 미지의 변량 구하기 문제의 경우 수학적 개념 지식으로 문제를 해결했기 때문이다.

예비교사들이 어떤 지식을 이용하여 산술 평균의 문제를 해결하는지 분석한 결과 대부분의 예비교사들이 수학적 지식(절차적, 개념적)과 유추적 지식(균등분배, 균형점)을 이용하여 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 특히 균등 분배 개념의 경우 총합을 먼저 구하고 이를 재분배하는 방법과 균등화 전략을 이용하는 방법으로 나누어져 나타났으며 균형점 개념의 경우 편차가 '0'이 되는 접근법을 사용하는 것으로 나타났다.

평가 문항에서 오답을 작성한 예비교사들을 분석한 결과 모든 예비교사들이 틀린 문제에 대해서 수학적 지식으로 접근하고 있었으며 변량을 누락하거나 변량의 총 개수를 틀리게 계산하는 등 산술 평균의 공식을 잘못 적용하고 있었다. 특히 산술 평균의 의미를 그림으로 표현하는 문제에서 서술형 문제의 결과와 다르게 유추적 지식(63.3%)이 가장 많이 나타났다. 이는 질문의 표현 방법이 산술 평균의 개념화에 영향을 미쳤기 때문이며 구두 표현보다는 그림 표현이 좀 더 쉽게 개념적 이해를 이끌어 내는 것으로 분석되었다. 산술 평균의 유추적 지식은 산술 평균의 개념 이해에 유용할 뿐 아니라 다른 개념 지식과 관련하여 개념적 이해를 이끌어냈다. 유추적 지식은 산술 평균의 대표성의 개념을 효과적으로 설명할 수 있으며 산술 평균의 수학적 알고리즘을 이해하는데도 도움을 주었다. 따라서 산술 평균의 수학적 알고리즘을 가르치기 이전에 균등 분배와 균형점 개념의 유추적 지식을 이용하여 산술 평균을 개념화하고 자료의 대표성으로서 산술 평균의 통계적 개념을 충분히 이해시킬 필요가 있다. 또한 이를 위해서는 수로 제시된 상징적 표현 방법의 문제 유형보다는 그림 표현의 다양한 문제 유형을 제시하여 학생들이 산술 평균을 더 심도 있게 개념화할 수 있도록 유도해야 할 것이다.

본 연구는 산술 평균의 기초 연구로 산술 평균의 개념화를 관련된 지식으로 범주화하고, 산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화가 문제 해결 과정에서 어떻게 이루어지는지 알아보았다. 향후 산술 평균의 개념화와 관련된 지식들이 서로 어떤 관련성이 있으며, 수학적 지식, 유추적 지식, 통계적 지식을 이용한 산술 평균의 개념화에 대한 좀 더 심층적인 연구가 필요할 것이다. 또한 산술 평균의 개념화에 관한 연구 결과들을 토대로 산술 평균 개념의 도입 시기와 도입 방법, 구체적인 내용 체계 및 조직 등 산술 평균의 효과적인 교수·학습에 관한 연구도 시도되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김우철 외. (1991). 현대통계학, 영지문화사.

이영하·남주현 (2005). 통계적 개념 발달에 관한 인식론적 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **44(3)**, pp.457-475.

Aufmann, R. N., Lockwood, J. S., Nation, R. D., & Clegg, D. K. (2007). *Mathematical excursions*. Boston, MA: Houghton Mifflin Company.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education : on symbolizing and computer tools*. Unpublished Doctoral dissertation.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, **62**, pp.149-168.

Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics*. NY: John Wiley and Sons, Inc.

Cai, J. (1998). Exploring students' conceptual understanding of the averaging algorithm. *School Science and Mathematics,* **98(2)**, pp.93-98.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston. VA.

Cortina, J., Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1999). Multiplicative conceptions of arithmetic mean. In F. Hitt (Ed.). *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cuernavaca, Mexico:Centro de Investigación y de Estudios

Avanzados.

Cortina, J. L. (2002). Developing instructional conjectures about how to support student understanding of the arithmetic mean as a ratio. *International Conference on Teaching Statistics 6*. Retrieved September 10, 2009 from http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2a2_cort.pdf

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education,* 16, pp. -17.

Goodchild, S. (1988). School pupils' understanding of average. *Teaching Statistics*. 10, pp. 7-81.

Groth, R. E. (2005). An investigation of statistical thinking in two different contexts: Detecting a signal in a noisy process and determining a typical value. *Journal of Mathematical Behavior,* 24, pp.109-124.

Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning,* 8, pp. 7-63.

Hardiman, P., Well, A., & Pollatsek, A. (1984). Usefulness of a balance model in understanding the mean. *Journal of Educational Psychology*, 76, pp.792-801.

Hardiman, P., Pollatsek, A., & Well, A. (1986). Learning to understand the balance beam. *Cognition and Instruction*, 3, pp.63-86.

Heath, T. H. (1981). *A history of greek mathematics*. Dover, NY.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hunting, R. P., & Sharpley, C. F. (1988). Preschoolers' cognitions of fraction units. *British Journal of Educational Psychology*, 58, pp.172-183.

Jackson, S. (1965). The growth of logical thinking in normal and subnormal children. *British Journal of Educational Psychology*, 35, pp.255-258.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.162-181). Reston, VA: Erlbaum.

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33, pp.259-289.

Leavy, A. M., & O'Loughlin, N. (2006). Moving beyond the arithmetic average: Preservice teachers understanding of the mean. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), pp.53-90.

Leon, M., & Zawojewski, J. (1990). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties Issues and preliminary results. *Paper presented at The Third International Conference on Teaching Statistics (ICOTS III)*. Dunedin, New Zealand.

Lovell, K. (1961). A follow-up study of Inhelder and Piaget's 'The growth of logical thinking.'. *British Journal of Psychology*, 52, pp.143-153.

MacCullough, D. (2007). *A study of expert's understanding of the arithmetic mean*. Unpublished Doctoral dissertation, Pennsylvania State University.

Marnich, M. (2008). *A knowledge structure for the arithmetic mean: relationships between statistical conceptualizations and mathematical concepts.* Unpublished Doctoral dissertation, University of Pittsburgh.

McGatha, M., Cobb, P., & McClain, K. (2002). An analysis of students' initial statistical understandings: Developing a conjectured learning trajectory. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, pp.339-355.

Mevarech, A. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational*

Studies in Mathematics, 14, pp.415-429.

Miller, K. (1984). Child as measurer of all things: Measurement procedures and the development of quantitative concepts. In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills Hillsdale*, NJ : Lawrence Earlbaum Associates.

Mokros, J., & Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), pp.20-39.

Murray, F. B., & Holm, J. (1982). The absence of lag in conservation of discontinuous and continuous materials, *Journal of Genetic Psychology*, 141, pp.213-217.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Plackett, R. L. (1970). The principle of the arithmetic mean, In E. Pearson & M. G. Kendall (Eds.), *Studies in the history of statistics and probability*, 1, Griffin, London.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981), Concept or Computation: Students' Misconceptions of the Mean, *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp.191-204.

Porter, T. M. (1986). *The Rise of Statistical Thinking*, 1820-1900. Princeton University Press, Princeton.

Russell, S., & Mokros, J. (1996). Research into practice: What do children understand about average? *Teaching Children Mathematics,* 2(6), pp.360-364.

Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics: An etymological dictionary of math terms used in English*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Siegler, R. S. (1976). Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology*, 8, pp.481-520.

Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics*. The Measurement of Uncertainty Before 1900, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concept of arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, pp.64-80.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Van deWalle, J. A., & Lovin, L. H., (2006). *Teaching student centered mathematics*. Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning,* 2, pp.11-50.

Zawojewski, J. S. (1986) *The Teaching* and *Learning Processes of Junior High Studeas Under Different Modes of Instruction in Measures of Central Tendency*. Unpublished doctoral dissertation, Northwestern University. Evanston, Illinois.

Pre-service Teachers' Conceptualization of Arithmetic Mean

Joo, Hongyun
Dept. of Curriculum and Instruction, Graduate School of Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : almighter@korea.ac.kr

Kim, Kyungmi†
Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : kyungmi@korea.ac.kr

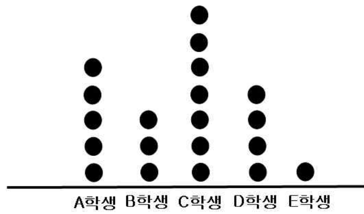
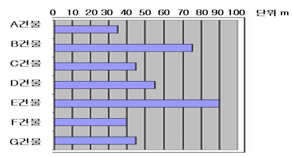
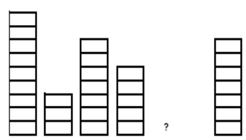
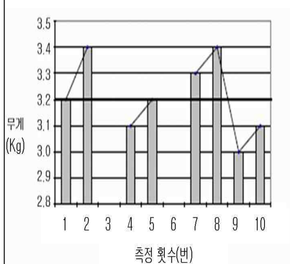
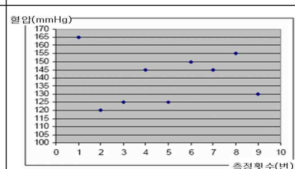
Whang, Woo Hyung
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study were to investigate how secondary pre-service teachers conceptualize arithmetic mean and how their conceptualization was formed for solving the problems involving arithmetic mean.

As a result, pre-service teachers' conceptualization of arithmetic mean was categorized into conceptualization by “mathematical knowledge(mathematical procedural knowledge, mathematical conceptual knowledge)”, “analog knowledge(fair-share, center-of-balance)”, and “statistical knowledge”. Most pre-service teachers conceptualized the arithmetic mean using mathematical procedural knowledge which involves the rules, algorithm, and procedures of calculating the mean. There were a few pre-service teachers who used analog or statistical knowledge to conceptualize the arithmetic mean, respectively. Finally, we identified the relationship between problem types and conceptualization of arithmetic mean.

* ZDM Classification : B53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key words : Arithmetic Mean, Conceptualization
† Corresponding Author

<부록> 평가지의 문항 구성 및 내용

문항	표현 방법	내용 요소	문항
6	그림 표현 (이산량)	산술평균 구하기	 5명의 A, B, C, D, E 학생들은 초콜릿 한 봉지에 초콜릿이 몇 개 들어있는지 조사하였다. 다음은 학생들이 조사한 초콜릿의 개수이다. 학생들이 조사한 초콜릿 개수 의 평균을 최대한 다양한 방법으로 구하시오.
7	그림 표현 (연속량)	산술평균 구하기	 다음은 7개 건물의 높이를 나타낸 것이다. A, B, C, D, E, F, G 건물의 평균 높이를 최대한 다양한 방법으로 구하시오.
8	그림 표현 (이산량)	미지의 변량 구하기 (미지 변량 1개)	 5명의 학생이 아래와 같이 블록 쌓기 놀이를 하고 있다. A, B, C, D E 학생들이 쌓은 블록 개수의 평균이 7개라면, E 학생은 몇 개의 블록을 쌓았는지 구하시오.
9	상징 표현 (문자, 수)	미지의 변량 구하기 (미지 변량 1개)	세 수 a, b, c의 평균은 $\overline{x}$이다. a는 $\overline{x}$보다 3이 크고, b는 $\overline{x}$보다 7이 클 때, c의 값을 $\overline{x}$에 관하여 나타내시오.
10	그림 표현 (연속량)	미지의 변량 구하기 (미지 변량 2개)	 아래 그림은 한 학생이 화학실험실에서 표본의 무게를 10번 측정한 결과이다. 학생은 측정한 표본의 평균 무게가 3.2kg으로 계산되어 그래프에 굵은 실선으로 나타내었는데, 실수로 3번째와 6번째 표본의 무게를 잊어버렸다. 3번째와 6번째 측정한 표본의 무게를 구하시오.
11	그림 표현 (산포도)	산술평균 구하기	 다음은 한 환자의 혈압을 9번 잰 결과이다. 이 환자의 평균 혈압을 구하시오. 평균을 구하기 위해서 어떻게 생각했는지 자세히 쓰시오.
12	상징 표현 (수)	미지의 변량 구하기 (미지 변량 7개)	어떤 식료품 가게에서 점원은 평균 가격이 1380원이 되도록 9개의 과자에 가격표를 붙여야 한다. 첫 번째 과자는 1300원, 두 번째 과자는 1350원의 가격표를 붙였다. 나머지 7개 과자의 가격표를 만들어보시오. (단, 어떤 과자에도 1380원의 가격표를 붙일 수 없다.)