

비선형 슬라이딩 평면의 설계를 위한 LMI 접근법

An LMI Approach to Nonlinear Sliding Surface Design

최 한 호*
(Han Ho Choi¹)

¹Dongguk Univ. - Seoul

Abstract: The problem of designing a nonlinear sliding surface for an uncertain system is considered. The proposed sliding surface comprises a linear time invariant term and an additional time varying nonlinear term. It is assumed that a linear sliding surface parameter matrix guaranteeing the asymptotic stability of the sliding mode dynamics is given. The linear sliding surface parameter matrix is used for the linear term of the proposed sliding surface. The additional nonlinear term is designed so that a Lyapunov function decreases more rapidly. By including the additional nonlinear term to the linear sliding surface parameter matrix we obtain a nonlinear sliding surface such that the speed of responses is improved. We also give a switching feedback control law inducing a stable sliding motion in finite time. Finally, we give an LMI-based design algorithm, together with a design example.

Keywords: LMI, sliding mode control, sliding surface, uncertain systems

I. 서론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성을 갖는 시스템을 위한 강인한 제어기 설계에 유용하게 사용되어 왔다. 슬라이딩 모드 시스템은 빠른 응답, 좋은 과도 응답특성 등 장점을 갖고 있는데 특히 정합조건을 만족시키는 불확실성에 대하여 강인성을 보인다. 슬라이딩 모드 시스템에서는 스위칭 제환 입력을 사용하여 미리 설정한 슬라이딩 평면으로 시스템 궤적에 도달하도록 하며 도달한 이후에는 궤적이 슬라이딩 평면에 계속 머무르도록 하여 원하는 성능을 얻도록 한다. 결국 슬라이딩 평면의 설계는 매우 중요한 것으로 [1-12]와 같은 논문들에서 다양한 슬라이딩 평면 설계 방법이 제안되어 왔다. 기존 논문들에 소개된 대부분의 슬라이딩 평면은 상태에 선형인데 반해 본 논문에서 제안하는 슬라이딩 평면은 선형시불변항과 비선형항을 포함한다. 비선형 슬라이딩 평면을 사용하면 시스템의 성능 특성을 개선할 수 있어 [4] 등에서도 선형시불변항과 비선형항을 포함하는 비선형 슬라이딩 평면의 설계에 대하여 다루었지만 이들 설계방법들은 비체계적이었다. 본 논문에서는 슬라이딩 모드 동역학의 안정성을 보장하는 선형의 슬라이딩 평면 행렬이 주어졌다는 가정을 사용한다. 주어진 선형 슬라이딩 평면 행렬은 제안된 슬라이딩 평면의 선형시불변항으로 사용된다. 비선형항은 선형 슬라이딩 평면만을 사용했을 때에 비교해서 리아푸노프 함수가 빨리 감소되도록 설계된다. 그러므로 더 좋은 과도 응답 특성을 얻을 수 있으며 기존의 선형 슬라이딩 평면을 설계하기 위한 체계적인 다양한 방법을 이용할 수 있다. 비선형항을 계산하는데 사용할 수 있는 LMI 조건식을 유도하고 유한한 시간내에 슬라이

딩 동작을 유발하는 스위칭 제환 입력 설계법을 제시한다. 마지막으로 LMI에 기반한 설계 알고리즘과 설계 예제를 제시한다.

II. 대상 시스템과 예비 결과들

우리는 다음과 같은 모델로 표현 가능한 동역학 방정식을 고려한다 [1].

$$\dot{x} = Ax + B[u + \eta(x, u, t)] \quad (1)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며 $\eta \in R^m$ 는 외란 입력을 나타낸다. 시스템 (1)은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: (A, B) 는 안정가능하다.

A2: $rank(B) = m$ 을 만족시킨다.

A3: $\|\eta(x, u, t)\| \leq \psi \|u\| + \rho(t)$ 를 만족시키는 상수 ψ 과 함수 $\rho(t)$ 가 알려져 있다.

선형 슬라이딩 평면을 $s(x) = Sx = 0$ 로 정의하자. 여기에서 S 는 $m \times n$ 행렬이다. 이전의 결과 [1-12]를 참조하면 S 는 다음 성질을 만족시키는 것을 찾아야 함을 알 수 있다.

P1: SB 는 역행렬이 존재한다. 간단함을 위해 $SB = I$ 로 가정하자.

P2: 슬라이딩 평면 $Sx = 0$ 에 제한된 $(n-m)$ 차의 슬라이딩 모드 동역학은 점근적으로 안정하다.

다음의 보조정리는 제안된 방법을 유도하기 위해 논술하는 것이다.

보조정리 1: 성질 P1-2를 만족시키는 임의의 행렬 $S \in R^{m \times n}$ 에 대하여 다음 LMI를 만족시키는 행렬 $W \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ 가 존재한다.

$$W > 0, \quad \Phi^T A \Psi W + * < 0 \quad (2)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2010. 6. 1., 수정: 2010. 10. 15., 채택확정: 2010. 10. 18.

최한호: 동국대학교 서울 전자전기공학부(hhchoi@dongguk.edu)

여기에서 $\Psi = (I - BS)\Phi$ 이고 $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 는 $B^T\Phi = 0$, $\Phi^T\Phi = I$ 를 만족시키는 임의의 행렬이다. 그리고 $*$ 는 대칭행렬의 대칭성으로부터 유추할 수 있는 행렬블록을 의미한다.

증명: [12]에 주어진 결과에 의해 주어진 S 에 대하여 다음을 만족시키는 해(ϵ, Y)가 존재한다.

$$Y = Y^T, \quad X = \Psi Y \Psi^T + \epsilon B B^T > 0, \quad \Phi^T A \Psi Y \Psi^T \Phi + * < 0 \quad (3)$$

정의에 의해 $\Phi^T \Psi = \Phi^T (I - BS)\Phi = \Phi^T \Phi = I$ 가 성립하고 이 등식과 (3)식을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\Phi^T X \Phi = \Phi^T \Psi Y \Psi^T \Phi + \epsilon \Phi^T B B^T \Phi = Y > 0$$

$$\Phi^T A \Phi Y + * < 0$$

결국 위식은 $W = Y$ 로 (2)식이 만족됨을 의미한다. QED

III. 선형 슬라이딩 평면

선형 슬라이딩 평면 S 가 성질 PI-2를 만족시키기 때문에 (2)를 만족시키는 W 가 존재하며 다음과 같은 변환행렬 M 과 벡터 v 를 다음처럼 정의할 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} W^{-1}\Phi^T \\ S \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Mx = \begin{bmatrix} W^{-1}\Phi^T x \\ Sx \end{bmatrix} \quad (4)$$

위 식으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$v_2 = s, \quad M^{-1} = [\Psi W, B]$$

변환행렬을 이용하여 (1)을 다음의 regular form을 얻을 수 있다.

$$\dot{v}_1 = W^{-1}\Phi^T A \Psi W v_1 + W^{-1}\Phi^T A B s$$

$$\dot{s} = S A \Psi W v_1 + S A B s + u + \eta(x, u, t) \quad (5)$$

위의 식으로부터 만약 $\dot{s} = s = 0$ 일 때 다음의 $(n-m)$ 차 축소차수 동역학으로 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = W^{-1}\Phi^T A \Psi W v_1, \quad v_1 = W^{-1}\Phi^T x \quad (6)$$

결국 선형 슬라이딩 평면 $s = Sx = 0$ 에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 (6)처럼 주어짐을 알 수 있다. (6)이 안정할 필요충분조건을 다음의 리아푸노프 부등식을 만족시키는 양한정 리아푸노프 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P W^{-1}\Phi^T A \Psi W + * < 0 \quad (7)$$

보조정리 1은 (2)를 만족시키는 행렬 W 를 $P = W$ 로 한 경우 위의 행렬식 (7)이 만족됨을 알 수 있다.

IV. 비선형 슬라이딩 평면의 설계

다음의 비선형 슬라이딩 평면을 고려하자.

$$\sigma = s - \delta(t) B^T A^T \Phi v_1$$

$$= [S - \delta(t) B^T A^T \Phi W^{-1}\Phi^T] x = 0 \quad (8)$$

여기에서 W 는 (2)를 만족시키는 해 행렬이고 $\delta(t)$ 는 다음을 만족시키는 임의의 함수이다.

$$\delta(t) \in L^\infty, \quad \dot{\delta}(t) \in L^\infty, \quad \delta(t) \leq 0 \quad (9)$$

위의 식들을 이용하여 $\dot{\sigma}$ 가 다음처럼 주어짐을 보일 수 있다.

$$\dot{\sigma} = [s - \delta B^T A^T \Phi W^{-1}\Phi^T] \dot{x} - \dot{\delta} B^T A^T \Phi W^{-1}\Phi^T x$$

$$= \varphi(t)x + u + \eta(x, u, t) \quad (10)$$

여기서, $\varphi(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\varphi(t) = SA - \delta B^T A^T \Phi W^{-1}\Phi^T A - \dot{\delta} B^T A^T \Phi W^{-1}\Phi^T$$

식 (5)와 (6)을 사용하여 다음의 regular form을 얻을 수 있다.

$$\dot{v}_1 = \phi(t)v_1 + W^{-1}\Phi^T A B \sigma$$

$$\dot{\sigma} = \varphi(t)x + u + \eta(x, u, t) \quad (11)$$

여기서 $\phi(t) = W^{-1}\Phi^T A \Psi W + \delta B^T A^T \Phi$. 결국 $\sigma = 0$ 에 구속된 $(n-m)$ 차 슬라이딩모드 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{v}_1 = \phi(t)v_1, \quad v_1 = W^{-1}\Phi^T x \quad (12)$$

리아푸노프함수를 $V_1(v_1) = v_1^T W v_1$ 로 정의하자. 그러면 이의 도함수가 다음처럼 주어진다.

$$\dot{V}_1 = 2v_1^T \Phi^T A \Psi W v_1 + 2\delta v_1^T \Phi^T A B B^T A^T \Phi v_1$$

LMI (2)는 위식이 다음처럼 표현될 수 있음을 의미한다.

$$\dot{V}_1 \leq -\lambda_Q \|v_1\|^2 + 2\delta v_1^T \Phi^T A B B^T A^T \Phi v_1 \quad (13)$$

여기서 $\lambda_Q = \lambda_{\min}(Q) > 0, -Q = \Phi^T A \Psi W + * < 0$. 항상 $\delta(t) \leq 0, \Phi^T A B B^T \Phi \geq 0$ 이 성립하므로 위 식 (13)의 우변 2번째 항은 항상 0보다 작거나 같다. 그리고 $\delta(t) = 0$ 인 경우 즉 선형슬라이딩평면 $\sigma = s = Sx = 0$ 인 경우 (13)은 다음처럼 단순화된다.

$$\dot{V}_1 \leq -\lambda_Q \|v_1\|^2$$

결국 (8)의 비선형 슬라이딩 평면은 선형슬라이딩평면 $\sigma = s = Sx = 0$ 을 사용할 때보다 리아푸노프함수가 더 빨리 감소한다. 결국 응답특성을 개선할 수 있다.

V. 제어기 설계 알고리즘

정리 1: PI-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 행렬 S 가 주어졌다고 가정하자. 슬라이딩 제어기가 다음처럼 주어진다 고 가정하자.

$$u = -\mu(t) - \varrho(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (14)$$

여기서 σ 는 (8)식에 따라 주어지고,

$$\varrho(t) = \frac{1}{1-\psi} [\psi \|\mu(t)\| + \rho(t) + \epsilon] \quad (15)$$

$$\mu(t) = \varphi(t)x + \gamma\sigma \quad (16)$$

$\epsilon > 0, \gamma > 0$. 그러면 유한한 시간내에 안정한 슬라이딩 동작이 일어난다.

증명: 부등식 (13)은 슬라이딩모드 동역학이 안정함을

의미하므로 도달조건 $\sigma^T \sigma < 0$ 이 만족된다는 것을 보이기만 하면 충분하다. (10)을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &\leq -\gamma \sigma^T \sigma + \sigma^T \eta - \alpha \|\sigma\| \\ &\leq -\|\sigma\| [\gamma \|\sigma\| + \epsilon] \end{aligned} \quad (17)$$

결국 제어 입력 (14)는 슬라이딩 모드가 유한한 시간에 발생하도록 하고 x 가 0으로 수렴하도록 보장한다.

주 1: 아래 (18) 혹은 (19)에 주어진 뱀벡 형태의 크기가 제한된 제어기들은 적어도 국부적인 안정성을 보장할 수 있다. 이들의 안정도 범위는 [8]을 이용하여 구할 수 있다.

$$u_j = -\rho_j \frac{\sigma_j}{\|\sigma\|} \quad (18)$$

$$u_j = -\rho_j \text{sign}(\sigma_j) \quad (19)$$

여기에서 $j=1, \dots, m$ 이고 u_j 는 j 번째 채널의 입력이며 $\rho_j > 0$ 는 설계변수로 그 값이 클수록 국부적인 안정도의 범위는 넓어진다[8].

주 2: $\delta(t)$ 를 다음처럼 주어진다 고 하자.

$$\delta(t) = -\int_0^t \frac{v_1^T Q_1 v_1}{q_1 + v_1^T Q_2 v_1} d\tau \quad (20)$$

여기서 $q_1 > 0, Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$. 리아푸노프함수를 다음처럼 놓자.

$$V = v_1^T W v_1 + \zeta \sigma^T \sigma$$

여기에서 ζ 는 다음을 만족시키는 매우 큰 양수이다.

$$\zeta > \frac{\|\Phi^T A B\|^2}{2\lambda_Q} \quad (21)$$

식 (13)과 (17)를 참조하여 \dot{V} 가 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{V} \leq -\bar{v}^T \bar{Q} \bar{v} \quad (22)$$

여기서

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \|v_1\| \\ \|\sigma\| \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_Q & -\|\Phi^T A B\| \\ * & 2\zeta\gamma \end{bmatrix}$$

만약 ζ 가 (21)을 만족시키면 $\bar{Q} > 0$ 이며 (22)는 (23)처럼 단순화될 수 있다.

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\bar{Q})(\|v_1\|^2 + \|\sigma\|^2) \quad (23)$$

위의 수식은 $v_1 \in L^2 \cap L^\infty, \sigma \in L^2 \cap L^\infty$ 임을 의미한다. 결국 (20)에 주어진 $\delta(t)$ 는 (9)의 조건을 만족시킨다.

주 3: 본 논문의 결과는 다음의 LMI기반 설계알고리즘 형태로 정리될 수 있다.

- 1단계: 주어진 시스템을 (1)형태로 표현한다.
- 2단계: 선형 슬라이딩 평면을 기존의 방법을 사용하여 설계한다.
- 3단계: LMI (2)를 만족시키는 행렬 W 를 구한다.
- 4단계: (8)과 (14)에 주어진 공식을 사용해 제어기를 구한다.

VI. 수치적 예

[11]에 주어진 다음과 같은 행렬을 갖는 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

[11]에서는 다음의 선형슬라이딩평면이 사용되었다.

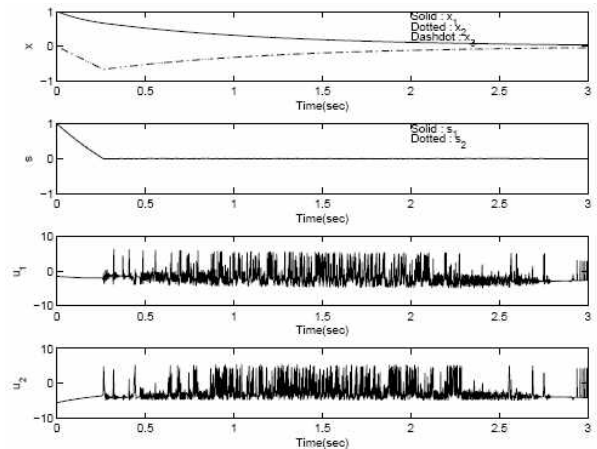
$$s = Sx = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \quad (25)$$

$x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = 0, \eta_i = \sin t$ 로 가정하자. 다음의 슬라이딩모드제어기가 안정을 보장함을 알 수 있다.

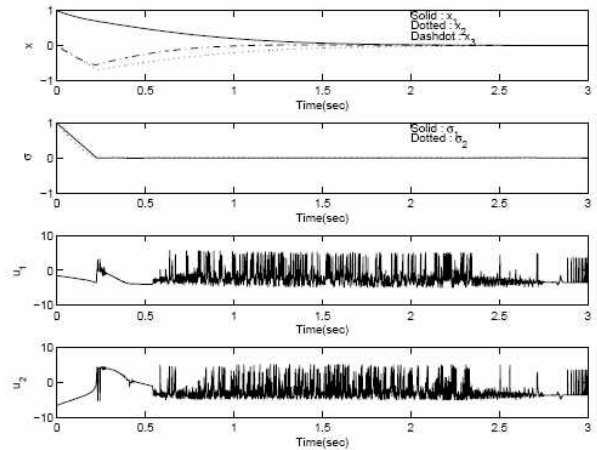
$$u = -SAx - s - 5 \frac{s}{\|s\|} \quad (26)$$

그림 1(a)는 (24)와 (25)의 폐회로 응답을 보여준다. 한편 주 3에 주어진 설계알고리즘을 고려하여 다음을 얻을 수 있다.

$$W = 1, \quad B^T A^T \Phi W^{-1} \Phi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



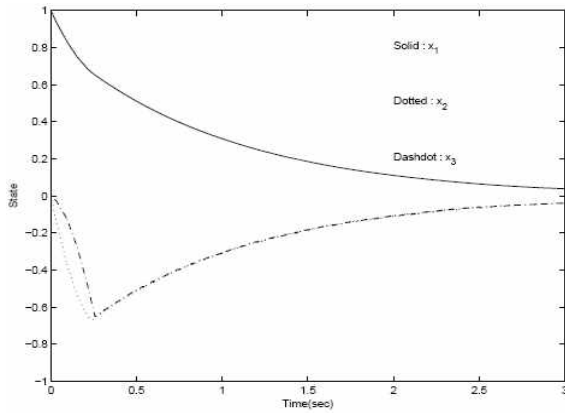
(a) With the linear sliding surface.



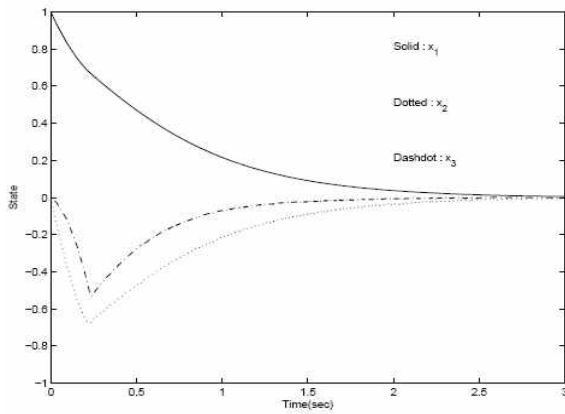
(b) With the nonlinear sliding surface.

그림 1. (26)에 의한 폐회로 응답.

Fig. 1. Closed-loop responses of (26).



(a) With the linear sliding surface.



(b) With the nonlinear sliding surface (28).

그림 2. $u = -5s/\|s\|$ 에 의한 폐회로 응답.

Fig. 2. Closed-loop responses of $u = -5s/\|s\|$.

결국 $\delta(t) = -\int_0^t x_1^2 / (0.01 + x_1^2) d\tau$ 로 정하여 다음과 같은 비선형 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 - \delta(t)x_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

그림 1(b)는 (24)와 다음의 슬라이딩 모드 제어기의 폐회로 응답을 보여준다.

$$u = -\psi(t)x - \sigma - 5\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (28)$$

크기가 제한된 슬라이딩 모드 제어기를 사용하여서도 시뮬레이션을 행하였다. 그림 2(a)는 선형 슬라이딩평면 (25)를 이용한 제어기 $u = -5s/\|s\|$ 를 사용한 경우의 응답을 보여준다. 그림 2(b)는 비선형 슬라이딩평면 (27)를 이용한 제어기 $u = -5\sigma/\|\sigma\|$ 를 사용한 경우의 응답을 보여준다. 주어진 그림들에서 비선형 슬라이딩 평면을 사용하면 응답이 개선될 수 있음을 확인할 수 있다.

VII. 결론

본 논문에서는 비선형 슬라이딩평면을 설계하는 방법에 대하여 논하였다. 제안된 슬라이딩평면을 선형시불변항과 비선형항으로 구성되었다. 선형시불변항은 기존의 방법을 통하여 설계된다고 가정하였다. 비선형항은 선형 슬라이딩

평면만을 사용했을 때에 비교해서 리아푸노프 함수가 빨리 감소되도록 설계되었다. 예제를 통하여 제안된 방법의 효용성을 보였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, Apr. 1977.
- [2] O. M. E. El-Ghezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *International Journal of Control*, vol. 38, no. 3, pp. 657-671, Sep. 1983.
- [3] C. M. Dorling and A. S. I. Zinober, "Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure control systems," *International Journal of Control*, vol. 44, no. 1, pp. 65-82, July 1986.
- [4] R. A. DeCarlo, S. A. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proc. of the IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, Mar. 1988.
- [5] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [6] M. Zohdy, M. S. Fadali, and J. Liu, "Variable structure control using system decomposition," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 10, pp. 1514-1517, Oct. 1992.
- [7] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, Feb. 1993.
- [8] S. H. Zak and S. Hui, "On variable structure output feedback controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, pp. 1509-1512, 1993.
- [9] W.-C. Su, S. V. Drakunov, and U. Ozguner, "Constructing discontinuity surfaces for variable structure systems: A Lyapunov approach," *Automatica*, vol. 32, no. 6, pp. 925-928, Jun. 1996.
- [10] J. Ackermann and V. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann's formula," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 234-237, Feb. 1998.
- [11] H. H. Choi, "An analysis and design method for uncertain variable structure systems with bounded controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, no. 4, pp. 602-607, Apr. 2004.
- [12] H. H. Choi, "On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," *Automatica*, vol. 35, no. 10, pp. 1707-1715, Oct. 1999.

최한호

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제16권 제1호 참조.