

미분 데이터로부터 곡면 형성 (The construction of a surface from derivative data)

김 회 섭
(Hoi Sub Kim)

요 약

점 데이터로부터 곡선이나 곡면을 형성하는 방법은 널리 알려져 있다. 하지만 미분데이터가 주어지는 경우는 공학적으로 많지 않기 때문에 미분 데이터로부터 곡면을 형성하는 방법은 잘 사용되고 있지 않다. 여기서는 점 데이터, 1차 미분 데이터, 2차 미분 데이터 등 세 개중에 한 개 이상이 주어지면 곡면을 형성 할 수 있다. 1차 미분 데이터만 주어진 경우는 한 점에서 함수 값을 더한다. 2차 미분 데이터가 주어진 경우는 1차 함수를 추가하면 된다.

Abstract

The method to construct a surface from point data are widely known. But the way to make a surface from derivative data is not usually used since derivative data in engineering appears very often. In this paper, if more than one types of data among three possible data such as point data, first derivative data, second derivative data are given, we can construct a surface. If only first derivative data are given, we add a function value at the one point. If only second derivative data are given, we add a linear function.

1. 서 론

휴대폰, 자동차, 선박, 컴퓨터 등등 거의 모든 공학 제품을 설계하기 위해서는 곡면을 구성하고 가공하여 사출 성형이나 프레스 금형 또는 렌즈 가공 등으로 부품을 만든다. 곡면을 형성하는 기술을 요즈음 보통 CAD(Computer Aided Design), 곡면을 가공하는 기술을 CAM(Computer Aided Manufacturing)이라고 한다. 여기서는 CAGD(Computer Aided Geometric Design)에 필요한 곡면 형성 기술을 연구한다.

* 이 연구는 2005년도 경원대학교 지원에 의한 결과임.

Key words : Surface Construction, Derivative Data

© THE KOREAN SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS, 2006

1차 미분 데이터만 주어지는 경우는 빛이 Glass를 통과할 때 Snell's law에 의하여 법선벡터와 접평면에 의해 결정되기 때문에 빛의 방향을 결정하는 것은 결국 1차 미분 데이터($x_i, y_i, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$)이다. 2차 미분 데이터가 주어지는 경우는 Curvature 데이터로 곡면을 조절하기 힘들기 때문에 Curvature 데이터 대신 사용하여 곡면의 일부분을 오목 또는 볼록하게 조절하고자 함이다. TV나 Monitor 브라운관 속에 있는 Shadow Mask 부품의 경우는 점점 Flat해짐에 따라서 이동 중의 충격이나 Speaker에 의한 진동으로 곡면의 떨림 현상이 존재한다. 이럴 경우 Crown하게 설계하면 충격이나 진동에 강해지는데 다항식으로 설계된 곡면 같은 경우 계수를 조절하여서는 곡면의 형상을 예측하기 힘들고 원하는 곡면을 얻기가 힘들다. 이때 기존 곡면으로부터 미분 데이터를 추출하여 미분 데이터 값을 변경함으로써 국부적으로 곡면을 오목 또는 볼록하게 할 수 있다.

2. 본 론

이산 데이터로부터 곡면을 구성하는 설계 방법이 중요한데 매개변수에 의한 자유 곡면 설계 방법이 있고 비 매개변수에 의한 $z=f(x,y)$ 꼴의 설계가 있다. 곡면 형성 기술에는 여러 가지 경우가 있다. 기존에는 아래의 2.1.1절을 이용하여 최소 자승법으로 곡면을 구하였고 Basis Function으로는 주로 Polynomial과 B-spline을 사용하였다. 여기서는 이 개념을 확장하여 미분 데이터가 주어진 경우 곡면을 찾는 방법을 모델링 하였다.

2.1 최소자승법

2.1.1. 높이 data만 fitting

$$E = \sum_{k=1}^{ndata} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j(y_k) - z_k \right)^2$$

여기서, $ndata$ 는 데이터의 개수이고, m 은 x 방향의 기저 개수, n 은 y 방향의 기저 개수이다. 함수 값과 측정값의 오차의 합 E 를 최소로 하는 계수를 구하면 된다. 즉 정규방정식 $\frac{\partial E}{\partial a_{pq}} = 0$, $p=0 \dots m$, $q=0 \dots, n$ 을 풀면 계수가 얻어지는데 그 계수 값을 이용하여 곡면

$S(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x) B_j(y)$ 을 유도하여, z 값을 임의의 점 x, y 에서 구할 수 있다.

2.1.2. 미분 data만 fitting

$$E = \sum_{k=1}^{ndata} \left\{ \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

2.1.3. 1차 미분 data와 높이 모두 fitting

$$E = \sum_{k=1}^{ndata} \left\{ \omega x(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \omega y(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \right)^2 + \omega h(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j(y_k) - f(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

여기서 $\omega x(k)$, $\omega y(k)$, $\omega h(k)$ 는 가중치이다.

2.1.4. 높이, 1차 미분, 2차 미분 data 모두 fitting

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n1} \left\{ \omega h(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j(y_k) - f(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^{n2} \left\{ \omega dx(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \omega dy(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

$$E_3 = \sum_{k=1}^{n3} \left\{ \omega d2x(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i''(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) \right)^2 + \omega d2y(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j''(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) \right)^2 + \omega d2xy(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

$$E_4 = \sum_{k=1}^{n4} \left\{ \omega d\theta(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} [B_i'(x_k) B_j(y_k) \cos(\theta) + B_i(x_k) B_j'(y_k) \sin(\theta)] - D_\theta f(x_k, y_k) \right)^2 \right\}$$

$$E_5 = \sum_{k=1}^{n_5} \left\{ \omega d\theta 2(k) \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} [B_i''(x_k) B_j(y_k) \cos^2(\theta) \right. \right. \\ \left. \left. + 2B_i'(x_k) B_j'(y_k) \cos(\theta) \sin(\theta) + B_i(x_k) B_j''(y_k) \sin^2(\theta) \right] \right. \\ \left. - D_{uv} f(x_k, y_k) \right\}^2$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$$

여기서, E_4, E_5 는 U 방향의 1차와 2차 방향도함수이다.

2.1.2절, 2.1.3절, 2.1.4절도 2.1.1절처럼 E 를 최소로 하는 정규방정식을 구하여 계수를 구하면 된다.

$$\frac{\partial E}{\partial a_{pg}} = \frac{\partial E_1}{\partial a_{pg}} + \frac{\partial E_2}{\partial a_{pg}} + \frac{\partial E_3}{\partial a_{pg}} + \frac{\partial E_4}{\partial a_{pg}} + \frac{\partial E_5}{\partial a_{pg}} \\ = 0$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial a_{pg}} = \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ \omega h(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j(y_k) - f(x_k, y_k) \right) B_p(x_k) B_q(y_k) \right\}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_{pg}} = \sum_{k=1}^{n_2} \left\{ \omega dx(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right) B_p'(x_k) B_q(y_k) \right. \\ \left. + \omega dy(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \right) B_p(x_k) B_q'(y_k) \right\}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial a_{pg}} = \sum_{k=1}^{n_3} \left\{ \omega d^2x(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i''(x_k) B_j(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) \right) B_p''(x_k) B_q(y_k) \right. \\ \left. + \omega d^2y(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j''(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) \right) B_p(x_k) B_q''(y_k) \right. \\ \left. + \omega d^2xy(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i'(x_k) B_j'(y_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) \right) B_p'(x_k) B_q'(y_k) \right\}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial a_{pg}} = \sum_{k=1}^{n_4} \left\{ \omega d\theta(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} [B_i'(x_k) B_j(y_k) \cos(\theta) + B_i(x_k) B_j'(y_k) \sin(\theta)] \right. \right. \\ \left. \left. - D_u f(x_k, y_k) \right) [B_p'(x_k) B_q(y_k) \cos(\theta) + B_p(x_k) B_q'(y_k) \sin(\theta)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_5}{\partial a_{pg}} &= \sum_{k=1}^{n_5} \left\{ \omega d\Theta 2(k) 2 \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} [B_i''(x_k) B_j(y_k) \cos^2(\Theta) \right. \right. \\
&\quad + 2B_i'(x_k) B_j'(y_k) \cos(\Theta) \sin(\Theta) + B_i(x_k) B_j''(y_k) \sin^2(\Theta)] \\
&\quad - D_{uu} f(x_k, y_k) [B_p''(x_k) B_q(y_k) \cos^2(\Theta) \\
&\quad \left. \left. + 2B_p'(x_k) B_q'(y_k) \cos(\Theta) \sin(\Theta) + B_p(x_k) B_q''(y_k) \sin^2(\Theta) \right] \right\}
\end{aligned}$$

즉 행렬식으로 고치면

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^{n_1} \omega h(k) B_i(x_k) B_j(y_k) B_p(x_k) B_q(y_k) \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{n_2} (\omega dx(k) B_i'(x_k) B_j(y_k) B_p'(x_k) B_q(y_k) \\
&+ \omega dy(k) B_i(x_k) B_j'(y_k) B_p(x_k) B_q'(y_k)) \\
&+ \sum_{k=1}^{n_3} (\omega d^2x(k) B_i''(x_k) B_j(y_k) B_p''(x_k) B_q(y_k) \\
&+ \omega d^2y(k) B_i(x_k) B_j''(y_k) B_p(x_k) B_q''(y_k) \\
&\left. + \omega d^2xy(k) B_i'(x_k) B_j'(y_k) B_p'(x_k) B_q'(y_k)) \right\} \\
&+ \sum_{k=1}^{n_4} (\omega d\Theta(k) [B_i'(x_k) B_j(y_k) \cos(\Theta) + B_i(x_k) B_j'(y_k) \sin(\Theta)] \\
&[B_p'(x_k) B_q(y_k) \cos(\Theta) + B_p(x_k) B_q'(y_k) \sin(\Theta)] \\
&+ \sum_{k=1}^{n_5} (\omega d\Theta 2(k) [B_i''(x_k) B_j(y_k) \cos^2(\Theta) \\
&+ 2B_i'(x_k) B_j'(y_k) \cos(\Theta) \sin(\Theta) + B_i(x_k) B_j''(y_k) \sin^2(\Theta)] \\
&[B_p''(x_k) B_q(y_k) \cos^2(\Theta) + 2B_p'(x_k) B_q'(y_k) \cos(\Theta) \sin(\Theta) + B_p(x_k) B_q''(y_k) \sin^2(\Theta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n1} \{ \omega h(k) f(x_k, y_k) B_p(x_k) B_q(y_k) \} \\
&+ \sum_{k=1}^{n2} \left\{ \omega dx(k) \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) B_p'(x_k) B_q(y_k) \right. \\
&+ \left. \omega dy(k) \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) B_p(x_k) B_q'(y_k) \right\} \\
&+ \sum_{k=1}^{n3} \left\{ \omega d2x(k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) B_p''(x_k) B_q(y_k) \right. \\
&+ \left. \omega d2y(k) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) B_p(x_k) B_q''(y_k) \right. \\
&+ \left. \omega d2xy(k) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) B_p'(x_k) B_q'(y_k) \right\} \\
&+ \sum_{k=1}^{n4} \left(\omega d\theta(k) D_{\omega} f [B_p'(x_k) B_q(y_k) \cos(\theta) + B_p(x_k) B_q'(y_k) \sin(\theta)] \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{n5} \left(\omega d\theta^2(k) D_{\omega\omega} f [B_p''(x_k) B_q(y_k) \cos^2(\theta) \right. \\
&+ \left. 2B_p'(x_k) B_q'(y_k) \cos(\theta) \sin(\theta) + B_p(x_k) B_q''(y_k) \sin^2(\theta)] \right)
\end{aligned}$$

$$p=0, \dots, m$$

$$q=0, \dots, n$$

따라서 $AX=B$ 형태로 쓸 때

A는 $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ 크기의 행렬이고,

X는 $(m+1)(n+1)$ 크기의 행렬로서 구하고자하는 계수이다.

B는 $(m+1)(n+1)$ 크기의 행렬이다.

3. 수치 결과

다음 표1은 1차, 2차 미분 데이터가 주어진 경우이다. 여기서 가중치는 모두 1로 두었다.

〈Table 1〉 Discrete derivative data

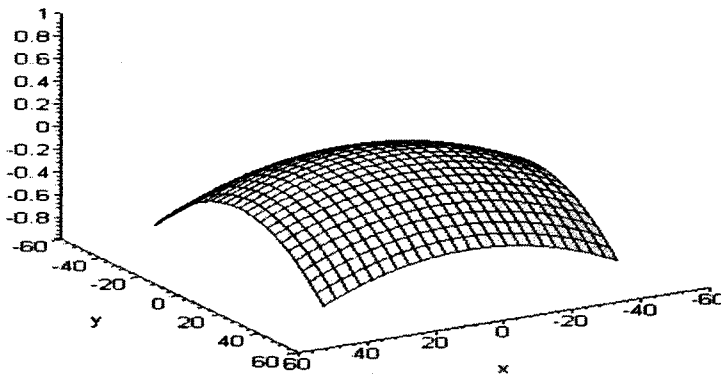
No	x	y	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
1	-40	-40	-.334613e-3	.224312e-1	-.334613e-3	-.708757e-5	-.548227e-3
2	-40	-20	-.3324271e-3	.113097e-1	-.332427e-3	-.364234e-5	-.562349e-3
3	-40	0	-.331688e-3	0.	-.331688e-3	0.	-.567057e-3
4	-40	20	-.332427e-3	-.113097e-1	-.332427e-3	.364234e-5	-.562349e-3
5	-40	40	-.334613e-3	-.224312e-1	-.334613e-3	.708757e-5	-.548227e-3
6	-20	-40	-.330250e-3	.223212e-1	-.330250e-3	-.379021e-5	-.545689e-3
7	-20	-20	-.327492e-3	.112531e-1	-.327492e-3	-.195228e-5	-.559573e-3
8	-20	0	-.326555e-3	0.	-.326555e-3	0.	-.564200e-3
9	-20	20	-.327492e-3	-.112531e-1	-.327492e-3	.195228e-5	-.559573e-3
10	-20	40	-.330250e-3	-.223212e-1	-.330250e-3	.379021e-5	-.545689e-3
11	0	-40	-.3287961e-3	0.	-.3287961e-3	0.	-.544809e-3
12	0	-20	-.3258464e-3	0.	-.325846e-3	0.	-.558605e-3
13	0	0	-.324844e-3	0.	-.324844e-3	0.	-.563204e-3
14	0	20	-.325846e-3	0.	-.325846e-3	0.	-.558605e-3
15	0	40	-.328796e-3	0.	-.328796e-3	0.	-.544809e-3
16	20	-40	-.330250e-3	.223212e-1	-.330250e-3	.379021e-5	-.545689e-3
17	20	-20	-.327492e-3	.112531e-1	-.327492e-3	.195228e-5	-.559573e-3
18	20	0	-.326555e-3	0.	-.326555e-3	0.	-.564200e-3
19	20	20	-.327492e-3	-.112531e-1	-.327492e-3	-.195228e-5	-.559573e-3
20	20	40	-.330250e-3	-.223212e-1	-.330250e-3	-.379021e-5	-.545689e-3
21	40	-40	-.334613e-3	.224312e-1	-.334613e-3	.708750e-5	-.548227e-3
22	40	-20	-.3324271e-3	.113097e-1	-.332427e-3	.364234e-5	-.562349e-3
23	40	0	-.331688e-3	0.	-.331688e-3	0.	-.567057e-3
24	40	20	-.332427e-3	-.113097e-1	-.332427e-3	-.364234e-5	-.562349e-3
25	40	40	-.334613e-3	-.224312e-1	-.334613e-3	-.708757e-5	-.548227e-3

위의 표1로 부터 구한 곡면식과 그래프(Figure 1)이다. 원점에서 z값은 0으로 두었다.

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j$$

〈Table 2〉 Coefficients of the above polynomial function

No.	i	j	a_{ij}
1	0	0	0.00000E+00
2	0	2	-2.81602E-04
3	0	4	9.58025E-10
4	2	0	-1.62422E-04
5	2	2	-1.25995E-09
6	2	4	1.55738E-14
7	4	0	-3.56509E-10
8	4	2	3.48281E-14
9	4	4	-8.56343E-19



(Figure 1) Graph of the polynomial function

4. 결 론

현재까지 점 데이터(x_i, y_i, z_i)에만 의존하여 곡면을 형성하는 방법이 대부분이었다. 그리고 1차 미분 데이터($x_i, y_i, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$)로부터 곡면을 형성하는 방법도 소개되었다(3).

이번 연구에서는 이 개념을 확장 적용하여 점 데이터, 1차 미분 데이터, 2차 미분 데이터 중 하나 또는 두 개 이상의 데이터가 주어진 경우도 곡면을 형성할 수 있는 방법을 제시하였다.

Display 제품의 평면화가 진행됨에 따라 브라운관도 경쟁력을 갖추기 위해 점점 FLAT해지고 있다. 부품 중에서 Shadow mask나 노광렌즈 곡면을 설계할 때 이런 기법이 적용될 수 있다. 요즘 Super Slim Braun관이 평면 디스플레이인 LCD, PDP에 대응하기 위해 점점 얇아지고 있다. 이런 제품의 부품설계에 적용하거나 곡면을 조절할 필요가 있을 때 사용 하면 된다.

참고 문헌

1. 유해영, 이강섭, 공학도를 위한 수치해석, 희중당, 1995.
2. 이규봉, C와 Numerica로 배우는 알기쉬운 수치해석학, 경문사, 2001.
3. H. S. Kim, "On the construction of a surface from discrete derivative data and its extended surface using the least squares method", Korean Journal of computational and applied mathematics, Vol. 4, No. 2, 1997.
4. H. S. Kim, K. P. Ko, G. J. Yoon, "A C^2 surface extension method using several functions", The Korea Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 7 No. 2, 2003.
5. H. S. Kim, S. T. Oh, J. W. Yim, "Smooth surface extension with curvature bound", Computer Aided Geometric Design, Vol. 22, August, 2005.



김 회 섭(Hoi Sub Kim)

- e-mail : hskimm@kyungwon.ac.kr
- 1982년 서울대학교 수학과 졸업(학사)
- 1987년 KAIST 응용수학과 졸업(석사)
- 1992년 KAIST 수학과 졸업(박사)
- 1984년~1997년 삼성 SDI 종합연구소, 생산기술센터 선임연구원
- 1997년~현재 경원대학교 수학과 부교수
- 관심분야 : 곡선과 곡면, 수치해석