

朝鮮朝代 弧矢田積의 虛實과 三角函數表

군산대학교 수리정보통계학부 柳寅永

Abstract

The area between the arc and chord of a circle is called Hosichun whose figure looks like a bow and an arrow, and had been evaluated by the two formulas $H_{n1}=a(a+y)/2$ and $H_{n2}=3ay/4$, where a is the length of the arrow and y the chord of the circle.

By the inspection of the area of the Hosichun, some errors of the numeration table in Thurmans S. Peterson's CALCULUS were found easily, that is, the area of the Hosichun is smaller than its subarea in the same Hosichun and perhaps has been to be the worldwide and centurial invalid standard. From now on, the chain proofreadings of the errors will be necessary in our mathematical world.

This paper is intended to introduce some such problems related to a circle and another Pythagorean Theorem which is the ratio of the side and diagonal of five and seven in a square.

0. 案内

朝鮮 王朝時代에서 弧矢田 문제를 취급한 문헌은 九一集, 東算抄, 理數新編, 籌解需用, 籌學實用이며 원과 정사각형 및 직사각형의 관계를 다루었다. 호시전의 문제를 오늘날의 손쉬운 방법으로 접근해 본다.

본 논문은 요약과 안내의 순서로 하고 안내의 내용은 다음과 같다.

1. 시 현 중경과 公式 H_{n1} 에 관한 문제
2. 정사각형 직사각형과 원에 관한 문제
3. 시 현과 公式 H_{n2} 에 관련된 문제
4. 각의 크기에 따른 호시전적의 비교

5. 결론

참고 문헌

1. 矢 弦 中徑(지름)과 공식 H_{n1} 에 관한 문제

(九一은 洪正夏의 九一集, 東算은 著者 未詳의 東算抄, 理藪는 黃胤錫의 理藪新編, 籌解는 洪大容의 籌解需用, 籌學은 邊彦廷의 籌學實用)

(1) 今有弧矢田積一百七十六步只云矢不及弦二十八步問弦矢各若干(九一 p. 489; 東算 p. 274)

答曰 弦三十六步, 矢闊八步

* 시와 현을 각각 x 와 y 라 하면, 다음 관계를 얻는다. $y=x+28\cdots(1)$, $H_{n1}=176=(x+y)x/2\cdots(2)$; (1) \rightarrow (2) $H(x)=x^2+14x-176=0$; $176=2^4 \cdot 11$; $H(8)=0$; $x=8$, $y=x+28=36$

(2) 今有圓田一段內有方池容邊而占之爲池只云餘四弧矢各闊九步問田徑池方各幾何(목사 p.111)

答曰 徑六十三步; 池方四十五步

* 원경과 내용 지방면을 각각 $2r$ 과 a 라 하면, 방사법에 의하여 $2r:a=7:5$ 에서 $a=10r/7\cdots(1)$ 이다. 또, 원전의 중심 O 에서 현에 수선을 내려 발을 Q , 원주와의 교점을 P 라 하면, QP 는 시(矢)이고 $OP=r=OQ+QP=x+9$ ($x=OQ$) $\cdots(2)$ 이다. 따라서 $x=a/2=r-9$ 이고 $a=2(r-9)\cdots(3)=(1)$, $r=31.5$, $2r=63$, $a=45$

(3) 今有圓田中徑十三步從邊截賣其弦十二步問矢若干

答曰 矢四步

* 반경을 6.5보, 반현을 6보, 시를 x 라 하면 원의 중심에서 현까지의 거리는 $6.5-x$ 이다. 피타고라스의 정리에 의하여 $6.5^2=6^2+(6.5-x)^2$; $H(x)=x^2-13x+36=0$; $36=2^2 \cdot 3^2$; $x=9$ (불합리) 또는 $x=4$

(4) 今有圓田中徑一十三步今從邊截積三十二步問所截弦矢各若干(九一 p. 490; 東算 p. 275)

答曰 弦一十二步, 矢四步

* 원의 중심에서 현까지 거리를 z 라 하면 $z=6.5-x$ (x 는 시)이고, 반현 y 는 $y^2=6.5^2-(6.5-x)^2=13x-x^2$, $y=\sqrt{13x-x^2}$, $2y=2\sqrt{13x-x^2}$, 호시전적 $H_{n1}=32=x(x+2y)/2$; $x(x+2\sqrt{13x-x^2})=64$; $2x\sqrt{13x-x^2}=64-x^2$; 제곱해서 정돈하면 $H(x)=5x^4-52x^3-128x^2+4096=0$; $4096=2^{12}$; $H(4)=0$; $x=4$; $y=\sqrt{13x-x^2}=\sqrt{36}=6$; $2y=12$

(5) 今有圓田中徑十三步從邊截賣其弦十二步問矢若干(九一 p. 490; 東算 p. 274)

答曰 矢四步

* 현 BB_1 , 시 AD , 중경(지름) ADC 는 BB_1 과 점 D 에서 직교하면 $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ 이다. $AD=x$; $BD=BB_1/2=6$; $CD=13-x$; 닮음비 $AD/BD=BD/CD$; $x/6=6/(13-x)$; $x(13-x)=36$; 정돈하면 $H(x)=x^2-13x+36=0$; $36=2^2 \cdot 3^2$; $H(4)=0$; $x=4$

(6) 今有圓田從邊截賣餘徑九步只云截積三十二步問所截弦矢若干(九一 p. 491; 東算 p. 276)

答曰 弦一十二步, 矢四步

* 원의 중심에서 현까지의 거리를 z 라 하면 시 x 는 $x+z=r$, $z=r-x=r-(2r-9)=9-r$, $x=2r-9$, 반현 y 는 $y^2=r^2-(9-r)^2=r^2-(81-18r+r^2)=18r-81$, $y=\sqrt{18r-81}$. 또, $H_{n1}=(2y+x)x/2=32$ 步에서 $2xy+x^2=64$, $2y=\{64-(2r-9)^2\}/x=(-4r^2+36r-17)/(2r-9)$; $4(18r-81)(2r-9)^2=(72r-324)(4r^2-36r+81)=(-4r^2+36r-17)^2$; 정돈하면 $H(r)=16r^4-576r^3+5320r^2-18720r+26533=0$, $H(6.5)=0$; $r=6.5$; $x=2r-9=4$; $y=\sqrt{18r-81}=6$, $2y=12$

(7) 今有弧矢田積一百七十六步只云弦三十六步問矢闊及圓中徑各若干(九一 p. 488; 東算 p.273)

答曰 矢闊八步, 圓中徑四十八步半

* 호시전적 $H_{n1}=176=x(x+36)/2$; 정돈하면 $H(x)=x^2+36x-352=0$; $352=2^5 \cdot 11$; $H(8)=0$; $x=8$; 호시 AD , 현 BB_1 , 중경 ADC 이라 하면 $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ 이다. 따라서 $AD/BD=BD/CD$; $BD=BB_1/2=18$; $AD=x=8$; $CD=40.5$; $2R=AC=AD+DC=8+40.5=48.5$

(8) 今有圓田內有方池容邊而占之外餘地八畝六十五步七分半只云四弧矢各闊十三步問圓徑池方若干(九一 p. 552; 理藪 p. 351; 東算 p. 347)

答曰 圓徑九十一步, 池方六十五步

* 본 문제는 4 호시 각 활 13보는 내접 정사각형이고 같은 시 13보에 대한 원경(지름)과 지방(정사각형 연못의 1변)을 구하는 문제로 8가지로 이의 해법을 생각할 수 있다.

*1) 외여적, 원전적, 방지적, 원전경, 방지면, 방사를 각각 S , S_1 , S_2 , $2r$, y , $c(=2r)$ 라 하면 다음 관계가 성립한다. $y:c=5:7$, $y=10r/7$ ($c=2r$)... (1); $S=8$ 畝 15보 7분 반=1985.75보 = S_1-S_2 ... (2) ← (1); $1985.75보=3r^2-y^2=3r^2-(10r/7)^2=47r^2/49$, $\therefore r^2=49 \times 42.25=45.5^2$, $r=45.5$; $2r=91$, $y=65$

*2) 내접 정4각형이므로 $13=a=r-y/2$... (1) 방5 사7 법에 의하여 $y=10r/7$... (2) → (1), $2r=91$; $y=(5/7)(2r)=65$

*3) 피타고라스의 정리에 의하여 정사각형의 1변을 y 라 하면 지름 $2r$ 과의 다음 관계가 성립한다. $y^2=2r^2$... (1), $S=3r^2-y^2=1985.75$... (2) ← (1); $1985.75=\pi r^2-y^2=3r^2-2r^2=r^2$, $r=44.561754$; $2r=89.123508$; $y=63.01032$ 步

*4) $13=a=r-y/2$... (1); $y=\sqrt{2}r$... (2) → (1); $r=26/(2-\sqrt{2})=13(2+\sqrt{2})=44.382$; $2r=88.764$; $y=\sqrt{2}r=62.756148$

- *5) 공식 $H_{n1} = a(a+y)/2$ 에 관하여 $S/4 = 1985.75/4 = 496.4375 = 13(13+y)/2$; $13+y = 76.375$; $y = 63.375$; 方5 斜7 法으로 $2r : y = 7 : 5$. $\therefore 2r = 7y/5 = 88.725$
- *6) 공식 $H_{n1} = a(a+y)/2$ 에 관하여 $S/4 = 496.4375 = 6.5(13+y)$; $13+y = 76.375$; $y = 63.375$; 피타고라스의 정리에 의하여 $2r = \sqrt{2}y = 89.61225$
- *7) 공식 $H_{n2} = 3ay/4$ 에 관하여 $1985.75/4 = 496.4375 = 3 \times 13 \times y/4 = 9.75y$; $\therefore y = 50.916666$; 방5 사7의 경 $2r$ 는 $y : 2r = 5 : 7$ 이므로 $2r = 7y/5 = 71.283332$
- *8) 공식 $H_{n2} = 3ay/4$ 에서 $S/4 = 496.4375 = 3 \times 13 \times y/4 \therefore y = 50.916666$; 피타고라스의 정리에 의하여 $2r = \sqrt{2}y = 71.996165$

2. 正四角形 直四角形과 圓에 관한 문제

(9) 今有圓田內有方池占之外餘積六百九十八步只云四角徑各三步半問圓徑池方若干 (九一 p. 555; 東算 p. 312)

答曰 圓徑四十二步, 池方二十五步

* 외여적, 원전적, 경, 방지적, 방면, 방사를 각각 $S, S_1, 2r, S_2, a, c$ 라 하면, 다음 관계가 성립한다. $S = S_1 - S_2 = 698 \dots (1)$, $a = 5c/7$, $c = 2r - 7 \dots (2) \rightarrow (1)$, $698 = 3r^2 - \{25(2r - 7)^2\}/49$, 정돈하면 $H(r) = 47r^2 + 700r - 35427 = 0$; $35427 = 3 \cdot 7^2 \cdot 241$; $H(21) = 0$; $r = 21$, $2r = 42$; $c = 35$; $a = 5c/7 = 25$

(10) 今有方田內有圓池占之外餘積四百八十六步只云四角徑各長九步九分問池徑田方各若干 (九一 p. 556; 埋藪 p. 351) * 2묘6步 = 480步

答曰 池徑一十八步, 田方二十七步

* 외여적, 방전적, 방면, 방사, 원지적, 경을 각각 $S, S_1, a, c, S_2, 2r$ 라 하면 다음 관계가 성립한다. $S = S_1 - S_2 = 486 \dots (1)$, $c = 2r + 19.8$; $a = 5c/7 = 5(2r + 19.8)/7 \dots (2) \rightarrow (1)$, $S = 486 = a^2 - 3r^2 = 25(4r^2 + 79.2r + 392.04)/49 - 3r^2$; 정돈하면 $H(r) = 47r^2 - 1980r + 14013 = 0$, $14013 = 3^4 \cdot 173$; $H(9) = 0$; $r = 9$; $2r = 18$; $c = 2r + 19.8 = 37.8$, $a = 5c/7 = 27$

* $47r^2 - 1980r + 14013 = 0$; 두 양의 실근 $r = 9$ 와 $r = 1557/47$ 을 갖는다.

(11) 今有方田內有圓池占之外餘積二千一百五十七步只云田方如池周多六步問田方池周各若干 (九一 p. 558; 東算 p. 313)

答曰 田方四十八步, 池周四十二步

* 외여적, 방전적, 방면, 원지적, 경, 주를 각각 $S, S_1, a, S_2, 2r, l$ 라 하면, 다음 관계가 성립한다. $S = S_1 - S_2 = 2157 \dots (1)$, $l = 6r$, $a = l + 6 = 6r + 6 \dots (2) \rightarrow (1)$, $S = S_1 - S_2 = a^2 - 3r^2 = 2157$; 정돈하면 $H(r) = 33r^2 + 72r - 2121 = 0$; $2121 = 3 \cdot 7 \cdot 101$; $H(7) = 0$; $r = 7$, $l = 6r = 42$, $a = l + 6 = 48$

(12) 今有圓田內有方池占之外餘積一百四十三步只云圓周如方斜多四十步問圓周方斜各若干 (九一 p. 558; 東算 p. 314)

答曰 圓周五十四步, 方斜一十四步

* 외여적, 원전적, 경, 방지적, 방면, 방사를 각각 $S, S_1, 2r, S_2, a, c$ 라 하면, 다음 관계가 성립한다. $S=S_1-S_2=143\cdots(1)$, $l=6r=c+40\cdots(2)$ 그러므로 $c=6r-40$, 방5 사7에 의해 $a=5c/7=5(6r-40)/7\cdots(3)$, 정돈하면 $H(r)=753r^2-12000r+47007=0$; $47007=3^3 \cdot 1741$; $H(9)=0$; $r=9$, $2r=18$, $c=6r-40=14$, $l=6r=c+40=54$

(13) 今有圓田內有直池占之外餘積八百五十五步只云東西兩闊各十二步南北兩闊各八步問圓徑及直池長闊各若干(九一 p. 559; 東算 p. 315)

答曰 圓徑四十二步, 直池長二十六步, 平一十八步

* 여적, 원전적, 경, 직지(직사각형의 연못)적, 직지 장 평을 각각 $S, S_1, 2r, S_2, y, x$ 라 하면 다음 관계가 성립한다. $2r=x+24=y+16\cdots(1)$, $S=S_1-S_2=855\cdots(2)\leftarrow(1)$, $855=3r^2-(2r-24)(2r-16)$; $855=-r^2+80r-384$; 정돈하면 $H(r)=r^2-80r+1239=0$; $1239=3 \cdot 7 \cdot 413$; $H(21)=0$; $r=21$; $2r=42$; $x=2r-24=18$; $y=2r-16=26$

* $r^2-80r+1239=0$; 이차방정식도 $r=21$ 또는 $r=59$ 두 양의 실근 중 1개만 취급함

(14) 今有直田內有圓池占之外餘積三百二十一步只云南北兩闊各六步東西兩闊各二步問長闊及池徑若干(九一 p. 560; 東算 p. 316)

答曰 直田長二十六步平一十八步, 圓池徑一十四步

* 외여적, 직전적, 장, 활, 원지적, 경을 각각 $S, S_1, y, x, S_2, 2r$ 라 하면 다음 관계가 성립한다. $x=2r+4$, $y=2r+12\cdots(1)$, $S=S_1-S_2=321\cdots(2)\leftarrow(1)$, $321=(2r+4)(2r+12)-3r^2=4r^2+32r+48-3r^2$; 정돈하면 $H(r)=r^2+32r-273=0$; $273=3 \cdot 7 \cdot 13$; $H(7)=0$; $r=7$; $2r=14$; $x=2r+4=18$; $y=2r+12=26$

3. 矢 弦과 공식 H_{n2} 에 관련된 문제

(15) 弧矢面積二百四十尺只云弦矢和四十八尺問弦矢各幾何(籌解 p. 437; 籌學 p. 118)

答曰 弦四十尺, 矢八尺

* 본문은 호시전적 $H_{n2}=3xy/4$ 로 계산한 답임. 즉, 시, 현, 전적을 각각 x, y, H_{n2} 라 두면 다음 관계가 성립한다. $(x+y)^2=4xy+(y-x)^2\cdots(1)$, $y+x=48\cdots(2)$, $H_{n2}=240=3xy/4$; $4xy=1280\cdots(3)$, $(1)\leftarrow(2)(3)$; $(y-x)^2=1024 \therefore y-x=32\cdots(4)$; $(4)\pm(2)$; $y=40$; $x=8$

* 九一 p. 552, p. 488을 참조한 셈. 현, 시를 각각 a, x 라 하면 다음 관계가 성립한다. $a+x=48\cdots(1)$, $H_{n1}=240=x(a+x)/2\cdots(2)\leftarrow(1)$, $240=24x$; $x=10$; $a=48-x=38$

(16) 假月營積七千八百六十四萬三千二百步只云弦矢和二萬九千六百九十六步問弦矢各幾何 (籌解 p. 437; 籌學 p. 119)

答曰 弦二萬五千六百步, 矢四千九十六步

* 본문도 호시전적을 $H_{n2}=3xy/4$ 으로 계산한 답임. 즉. 시와 현을 각각 x 와 y 라 하고 전적 H_{n2} 를 구한 것임. 관계 $(x+y)^2=4xy+(y-x)^2 \cdots(1)$, $y+x=29696 \cdots(2)$, $H_{n2}=78643200=3xy/4$; $4xy=419430400 \cdots(3)$; $(1) \leftarrow (2)(3)$; $(y-x)^2=462422016=21504^2$; $y-x=21504 \cdots(4)$; $(4) \pm (2)$; $y=25600$; $x=4096$

* 九一 p. 552, p. 488의 풀이를 참조. 현과 시를 각각 a 와 x 라 하면, 다음 관계가 성립한다. $a+x=29,696 \cdots(1)$, $H_{n1}=78,643,200=x(x+a)/2 \cdots(2) \leftarrow (1)$; $78643200=14848x$; $x=52965517$, $a=29696-x=24399449$

4. 角의 大小와 弧矢田積의 비교

호시전은 일종의 근사값인데 반경과 각에 따라 합리적인 규칙의 유무를 조사한다.

★17) 내접 정4각형의 호시전적의 비교

☆1) $r=1$, $H_{n1}=0.2500$, $H_{n2}=0.3107$, $H_n=0.25$, $|H_{n1}-H_n|=0$, $|H_{n2}-H_n|=0.0607$

☆2) $r=10$, $H_{n1}=25$, $H_{n2}=31.0656$, $H_n=25$, $|H_{n1}-H_n|=0$, $|H_{n2}-H_n|=6.0656$

☆3) $r=100$, $H_{n1}=2500$, $H_{n2}=3106.6022$, $H_n=2500$, $|H_{n1}-H_n|=0$, $|H_{n2}-H_n|=606.6022$

★18) 반경 $r=50$, 각 $\theta=30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 160^\circ$ 에서 비교

☆4) $r=50$, $\theta=30^\circ \rightarrow H_n=F_n-I_n=29.5$; $H_{n1}=23.516212$; $H_{n2}=33.09405$; $r-a=r \cdot \cos 15^\circ=50 \times 0.9659=48.295 \therefore a=1.705$; $y/2=r \cdot \sin 15^\circ=50 \times 0.2588=12.94 \therefore y=25.88$;

$(H_n-H_{n1})/H_n=0.2028402 > 0$; $(H_n-H_{n2})/H_n=-0.1218322 < 0$

☆5) $r=50$, $\theta=90^\circ \rightarrow$ 같은 방법으로; $H_n=F_n-I_n=713.5$; $H_{n1}=625.01195$; $H_{n2}=776.66095$

$(H_n-H_{n1})/H_n=0.1240196 > 0$; $(H_n-H_{n2})/H_n=-0.0885227 < 0$

☆6) $r=50$, $\theta=150^\circ \rightarrow$ 같은 방법으로; $H_n=F_n-I_n=2647.5$; $H_{n1}=2476.5345$; $H_{n2}=2684.719$

$(H_n-H_{n1})/H_n=0.0654762 > 0$; $(H_n-H_{n2})/H_n=-0.0140581 < 0$

☆7) $r=50$, $\theta=160^\circ \rightarrow$ 같은 방법으로; $H_n=F_n-I_n=3443.125$; $H_{n1}=2888.268$; $H_{n2}=3051.895$

$(H_n-H_{n1})/H_n=0.0570845 > 0$; $(H_n-H_{n2})/H_n=0.0036661 > 0$

★19) 공식 H_{n1} 과 H_{n2} 의 호시전적은 각의 대소에 따라서 변하고 있다. 그래서 삼각함수 수표를 찾아 변화를 알아보게 된다. $0^\circ \leq n^\circ \leq 180^\circ$, 부채꼴의 넓이를 F_n ; 내의 이등변 삼각형의 넓이를 I_n ; 호시전의 넓이를 H_n 이라 하면 $F_n=H_n+I_n$ 인 관계가 있다.

- ☆8) $r=100; n=1$ 에서 $F_1=(10000/2) \times (\pi/180)=87.5; I_1=(10000/2) \times \sin 1^\circ=87.5$
 $H_1=F_1-I_1=0$
- ☆9) $r=100; n=2$ 에서 $F_2=(10000/2) \times (2\pi/180)=174.5; I_2=(10000/2) \times \sin 2^\circ=174.5;$
 $H_2=F_2-I_2=0$ ($H_1 < H_2$?)
- ☆10) $r=100; n=3$ 에서 $F_3=(10000/2) \times (3\pi/180)=262; I_3=(10000/2) \times \sin 3^\circ=261.5;$
 $H_3=F_3-I_3=0.5$
- ☆11) $r=100; n=4$ 에서 $F_4=(10000/2) \times (4\pi/180)=349; I_4=(10000/2) \times \sin 4^\circ=349;$
 $H_4=F_4-I_4=0 \therefore$ 모순 $\therefore 0=H_4 > H_3=0.5$
- ☆12) $r=100; n=5$ 에서 $F_5=(10000/2) \times (5\pi/180)=436.5; I_5=(10000/2) \times \sin 5^\circ=436$
 $H_5=F_5-I_5=0.5$

이하는 큰 문제가 없어서 H_n 만을 적는다. 물론 $\forall m, n \in \mathbb{N} - \{181, \dots\}, m > n$ 이면 $H_m > H_n$ 이다. 그런데 이상에서 나타난 바는 $H_1=H_2=H_4=0; H_3=0.5$ 이어서 관계 $H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < \dots$ 에 모순.

☆13) 호시전의 대소 관계는 $H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < H_6 < \dots < H_{179} < H_{180}$ 이다. 그런데 모순으로 (1), (2), (3), (4)이 나온다.

- (1) $H_1=H_2=H_4$
- (2) $H_{n1} \neq \emptyset \neq H_{n2}, H_n = \emptyset$ ($n=2, 4$)
- (3) $H_3=H_5$
- (4) $H_3 > H_4$; 즉, 원은 매끄러운 곡선인데, 현재 사용하는 삼각 함수표는 rugged curve를 나타내고 있다. 이 모순을 해결하려면 수표의 교정이 필요하다고 본다. 그것도 넓이가 1보다 작으면 수표를 소수점 이하 4자리로 하는 것은 고려해 볼 과제라 생각한다.

☆14) n 과 H_n, H_{n1} 과 H_{n2} 의 바람직한 관계표

n	H_n	H_{n1}	H_{n2}	$H_{n1}-H_n$	$H_{n2}-H_{n1}$	비교; H/F
1	0.0165					0.000189
2	0.03621	0.0266921	0.0398642	-0.0095179	0.0036542	0.0002074
3	0.1315					0.0005022
4	0.2715	0.2144615	0.3189088	-0.0570385	0.0474088	0.0007777
5	0.3705					0.0008491
6	0.851	0.7273135	1.0768668	-0.1236865	0.2258668	0.0016252
7	1.3615					0.0022288
8	2.1305	1.7321753	2.5536475	-0.397747	0.4231475	0.0030517

위의 표는 $H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < H_6 < H_7 < H_8 \dots$ 의 관계가 보존된다. 이는 수표를 교정하였기 때문이다.

5. 結論

공식 $H_n = F_n - I_n$, 여기서 $0^\circ \leq n^\circ \leq 180^\circ$ 이고 F 와 I 는 각 n 에서 부채꼴과 이등변 삼각형의 면적을 나타낸다. 따라서 가장 참값에 가까운 근사값이다. 공식 $H_{n1} = a(a+y)/2$ 는 밑변 $a+y$ 와 높이 a 로 하는 삼각형의 면적으로 보자는 주장이며 공식 $H_{n2} = 3ay/4$ (여기서 $0 \leq a \leq r$; $0 \leq y \leq 2r$ 이다.)는 가로 a , 세로 y 의 직사각형의 면적 중 4분의 3을 호시전의 면적으로 보자는 주장이다. 후자는 항등 관계 $(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2$ 를 만족시켜준다. 그리고 158° 근방에서 참값에 가까운 근사값이 된다. 또한 $\theta = \pi/2$ 라디안에서 $\pi = 3$ 이면 $H_n = H_{n1}$ 이다. 삼각함수 표를 소수 넷째(셋째) 자리로 고정함은 자연스럽지 못하다. 마치 고속도로 국도 지방도를 等速으로 달리자는 주장과 같다고 본다.

호시전에서 생기는 포함(부등) 상등 관계의 모순은 수표의 교정만이 해결책으로 본다. 조선왕조대에는 이차방정식의 양의 실근 2개 중 1개만 취급했다.

참고 문헌

1. 韓國科學技術史資料大系
2. 九章算術
3. 한국수학사학회지
4. 한국수학사학회 Colloquium, 매월 제3주 화 17:00 한양여자대학 연구동 Seminar-Room
5. 柳寅永, “默思集算法의 瑕疵,” 한국수학사학회지 제 12 권 제 2 호(1999), 63-68,
6. “ , “理藪新編의 管見,” 한국수학사학회지 제 13 권 제 1 호(2000), 27-32,
7. “ , “朝鮮王朝代의 秤法과 疋法,” 한국수학사학회지 제 13 권 제 2 호(2000), 23-32,
8. “ , “朝鮮王朝代 古, 徽, 密, 新率의 圓 및 立圓積,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 1 호(2001), 1-16,
9. “ , “朝鮮朝代의 高次方程式의 虛實,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 2 호 (2001), 1-12,
10. “ , “朝鮮朝代의 數學問題 取扱의 虛實(1),” 한국수학사학회지 제 15 권 제 1 호(2002), 57-68,

☆표 1) n 과 호시전적 H_n , H_{n1} 과 H_{n2} 의 관계표

n	H_n	H_{n1}	H_{n2}	$H_{n1} - H_n$	$H_{n2} - H_n$	비교; H/F
1	0					0
2	0	0.0352	0.0525	0.0352	0.0525	0
3	0.5					0.0019083
4	0	0.2112	0.3141	0.2112	0.3141	0
5	0.5					0.0019083
6	1	0.74	1.0983	-0.258	0.0983	0.0019102
7	1.5					0.0024549
8	2	1.704	2.5128	-0.296	0.5128	0.0028653
9	3.5					0.0044557
10	4.5	3.3858	4.9704	-1.1142	0.4704	0.0051575
11	6					0.00625
12	7.5	5.89875	8.62125	-1.60125	1.12125	0.0071633
13	9.5					0.0083739
14	12	9.42375	3.71375	-2.57625	1.71375	0.0098239
15	15					0.0114591
16	18.5	13.97285	20.2536	-4.52715	1.7536	0.0132474
17	21.5					0.0144927
18	26	19.99365	28.8558	-6.00625	2.8558	0.0165499
19	30					0.018094
20	35.5	27.5424	39.5808	-7.9576	4.0808	0.020338
21	40.5					0.0221516
22	47	36.8	52.6608	-10.2	5.6608	0.0244791
23	53.5					0.0266567
24	61	47.92815	68.29515	-13.07185	7.29515	0.0291238
25	68.5					0.0314004
26	77	60.8768	86.4	-16.1232	9.4	0.0339356
27	86					0.0365025
28	96	76.25475	107.76645	-19.74525	11.76645	0.0392879
29	106.5					0.0420865
30	118	94.06485	132.3762	-23.93515	14.3762	0.0450725
31	130.5					0.048235
32	143	114.14565	159.9858	-28.85435	16.9858	0.0512085
33	157					0.0545138
34	171	137.32725	191.6682	-33.67275	20.6682	0.0576339
35	186.5					0.0610574

朝鮮朝代 弧矢田積의 虛實斗 三角函數表

36	202.5	163.05705	226.6515	-39.44295	24.1515	0.0644869
37	220					0.0681325
38	237.5	192.30325	266.178	-45.19675	28.678	0.0716224
39	257					0.0755105
40	276.5	224.40645	309.339	-52.09355	32.839	0.079215
41	297.5					0.083147
42	319.5	260.0224	356.9664	-59.4776	37.4664	0.0871759
43	342.5					0.0912724
44	366	299.208	409.0632	-66.792	43.0632	0.0953249
45	391.5					0.0996944
46	418	342.20775	465.90975	-75.79225	47.90975	0.1041225
47	444.5					0.1083749
48	473	389.20675	527.0832	-84.0754	54.2942	0.1129147
49	502.5					0.1175163
50	533.5	438.87465	593.9643	-94.44735	60.6423	0.1222642
51	564.5					0.1268396
52	598	494.868	665.4912	-102.987	67.6362	0.1317761
53	632					0.1366486
54	667.5	554.265	742.29	-113.1225	74.9025	0.1416445
55	704					0.1466819
56	742	618.34655	824.67675	-123.65345	82.67675	0.1518313
57	780.5					0.1569159
58	821	686.565	911.9088	-134.435	90.9088	0.1622048
59	862.5					0.1675245
60	906	759.78	1,005	-146.22	99	0.1730328
61	950.5					0.1785479
62	996	837.3792	1,103.13	-158.6208	107.13	0.1840864
63	1,043					0.1897053
64	1,091	920.28615	1,207.3771	-170.7139	116.3771	0.1953446
65	1,141					0.2011458
66	1,191.5	1,008.5282	1,317.6597	-182.9718	126.1597	0.2068755
67	1,244.5					0.2128441
68	1,298	1,102.437	1,434.348	-195.563	136.348	0.2187394
69	1,353.5					0.2247778
70	1,410	1,201.2664	1,556.4636	-208.7336	146.4636	0.2308258
71	1,468.5					0.2370077
72	1,527.5	1,305.103	1,684.047	-222.397	156.547	0.2431163

73	1,589					0.2494309
74	1,651	1,414.835	1,818.0378	-236.165	167.0378	0.2556716
75	1,715.5					0.2621084
76	1,781	1,530.004	1,957.926	-250.996	176.926	0.2685261
77	1,847.5					0.274946
78	1,916	1,651.1317	2,104.0645	-264.8683	188.0645	0.2814749
79	1,986					0.2880765
80	2,057.5	1,777.932	2,256.228	-279.568	198.728	0.2947074
81	2,130					0.3013369
82	2,204.5	1,910.2737	2,414.1199	-294.2263	209.6199	0.3080631
83	2,280.5					0.3148557
84	2,358	2,047.98	2,577.373	-310.02	219.373	0.2316697
85	2,436.5					0.3284799
86	2,517	2,192.5818	2,747.778	-324.4182	230.778	0.3353764
87	2,599					0.342334
88	2,682.5	2,343.9853	2,924.8237	-338.5147	242.3237	0.3493065
89	2,767.5					0.3563381
90	2,854	2,500.0479	3,106.6437	-353.9321	252.6637	0.3633817
91	2,942					0.3704823
92	3,031.5	2,661.4527	3,293.1182	-370.0473	261.6182	0.3775923
93	3,123					0.3847954
94	3,215	2,831.472	3,488.778	-383.5735	272.222	0.3919297
95	3,309.5					0.3991918
96	3,405	3,006.3919	3,688.3767	-398.6081	283.3767	0.4064458
97	3,502.5					0.4137625
98	3,600.5	3,186.7493	3,893.1197	-413.7507	292.6197	0.4210126
99	3,701					0.4283812
100	3,802.5	3,374.1112	4,104.228	-428.3888	301.728	0.4357417
101	3,906					0.4431586
102	4,010	3,567.802	4,321.0645	-442.1979	311.0645	0.4505111
103	4,116.5					0.457974
104	4,224	3,766.7164	4,542.426	-457.2836	318.426	0.4654289
105	4,333.5					0.4729346
106	4,443.5	3,972.8414	4,770.0377	-470.6586	326.5377	0.4803783
107	4,556					0.487925
108	4,669.5	4,184.2422	5,002.047	-485.2578	332.547	0.4954376
109	4,784.5					0.5029962

朝鮮朝代 弧矢田積の 虚實斗 三角函數表

110	4,901	4,402.1536	5,239.603	-498.8464	338.603	0.5105474
111	5,018.5					0.5180921
112	5,138	4,625.7552	5,481.348	-512.2448	343.348	0.5256803
113	5,258.5					0.5332623
114	5,380.5	4,856.3856	5,729.1595	-524.1144	348.6595	0.5408353
115	5,504					0.5484529
116	5,629	5,103.285	5,991.12	-525.715	362.12	0.5560604
117	5,755					0.563663
118	5,883	5,333.545	6,236.13	-549.455	353.13	0.5713037
119	6,011.5					0.5788916
120	6,142	5,580	6,495	-562	353	0.5865164
121	6,273					0.5940903
122	6,406	5,833.094	6,758.9087	-572.906	352.9087	0.6017
123	6,540.5					0.6093255
124	6,676	6,090.9355	7,025.6767	-585.0645	349.6767	0.6169485
125	6,813					0.6245588
126	6,950.5	6,355.44	7,297.29	-595.06	346.79	0.6321222
127	7,090					0.6397284
128	7,230	6,624.6335	7,571.491	-605.3665	341.491	0.6472694
129	7,371.5					0.6548079
130	7,514.5	6,899.93	7,849.4642	-614.57	334.9642	0.6623914
131	7,658.5					0.6699177
132	7,803	7,179.8195	8,129.6932	-623.1805	326.6932	0.6774025
133	7,952.5					0.6849993
134	8,097	7,464.8385	8,412.9097	-632.1615	315.9097	0.6923459
135	8,245.5					0.6998981
136	8,394.5	7,754.3345	8,698.063	-640.1655	303.563	0.7073222
137	8,545.5					0.7147756
138	8,697.5	8,048.23	8,984.9662	-649.27	287.4662	0.7222037
139	8,849.5					0.7295548
140	9,003.5	8,348.046	9,274.839	-655.454	271.339	0.7369347
141	9,158					0.7442805
142	9,313.5	8,650.5285	9,564.678	-662.9715	251.178	0.7515735
143	9,470					0.7588749
144	9,627.5	8,959.506	9,858.1515	-667.994	230.6515	0.7661242
145	9,785.5					0.7733433
146	9,945	9,270.2675	10,150.168	-674.7325	206.168	0.7805509

147	10,105					0.7877299
148	10,266	9,587.434	10,445.485	-678.566	179.485	0.7948588
149	10,427.5					0.8019611
150	10,590	9,906.138	10,738.876	-683.862	148.876	0.8090145
151	10,753					0.8160431
152	10,917	10,229.422	11,033.766	-687.578	116.766	0.8230238
153	11,082					0.829988
154	11,247	10,554.725	11,327.4	-692.275	80.4	0.8368926
155	11,413.5					0.8437881
156	11,580	10,884.642	11,621.295	-695.358	41.295	0.8506262
157	11,747.5					0.8574191
158	11,915	11,217.13	11,914.66	-697.87	-0.34	0.8641572
159	12,083.5					0.8708515
160	12,252.5	11,533.072	12,207.58	-699.428	-44.92	0.877529
161	12,422					0.8841281
162	12,592	11,890.542	12,498.355	-701.458	-93.645	0.8907123
163	12,762.5					0.8972195
164	12,933.5	12,229.385	12,786.753	-704.115	-146.747	0.9037137
165	13,105					0.9101326
166	13,276.5	12,570.44	13,072.713	-706.06	-203.787	0.9165055
167	13,448.5					0.922805
168	13,621.5	12,915.348	13,358.621	-706.152	-262.879	0.9290976
169	13,794					0.9353132
170	13,967.5	13,529.332	13,639.97	-708.168	-327.53	0.9414916
171	14,140.5					0.9475959
172	14,314	13,606.035	13,919.512	-707.965	-394.488	0.9536309
173	14,488					0.9596608
174	14,662.5	13,954.408	14,195.598	-708.092	-466.902	0.9656228
175	14,836.5					0.9715155
176	15,011	14,302.299	14,467.814	-708.701	-543.186	0.9773422
177	15,185					0.9831024
178	15,359.5	14,649.566	14,734.552	-709.934	-624.948	0.9887984
179	15,533.5					0.9944303
180	15,708	15,000	15,000	-708	-708	1.0000025
	$\pi = 3.14159$	$\pi = 3$: 고법	$\pi = 3$: 고법			
	$0 < a < 100 = r$					
	$0 < y < 200 = 2r$					

朝鮮朝代 孤欠田積의 虛實과 三角函數表

☆표 2) 관계에 오류가 교정된 현재의 수표(안은 구 수표의 값)

Degree	Rad.	Sin	Cos	Tan	Cot	Rad.	Deg.
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.5708	90
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.143*(290)	1.5533	89
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.653*(36)	1.5359	88
3	0.0523*(4)	0.0523	0.9986	0.0524	19.084*(1)	1.5184	87
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0700*(699)	14.268*(301)	1.5010	86
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.429*(30)	1.4835	85
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5147*(4)	1.4661	84
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1433*(43)	1.4486	83
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1406	7.1124*((54)	1.4312	82
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1583	6.3171*(38)	1.4137	81
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6721*(13)	1.3963	80
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1440*(6)	1.3788	79
12	0.2094	0.2079	0.9782*(1)	0.2125*(6)	4.7059*(46)	1.3614	78
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3309*(15)	1.3439	77
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0112*(08)	1.3265	76
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7327*(1)	1.3090	75
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4880*(74)	1.2915	74
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3058*(7)	3.2701*(9)	1.2741	73
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0779*(7)	1.2566	72
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3444*(3)	2.9036*(42)	1.2392	71
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3639*(40)	2.7480*(75)	1.2217	70
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6048*(51)	1.2043	69
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4752*(1)	1.1868	68
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4244*(5)	2.3563*(59)	1.1694	67
24	0.4189	0.4067	0.9136*(5)	0.4452	2.2462*(0)	1.1519	66
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1345	65
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4878*(7)	2.0200*(503)	1.1170	64
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9627*(6)	1.0996	63
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5318*(7)	1.8804*(7)	1.0821	62
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8041*(0)	1.0647	61
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7319*(21)	1.0472	60

31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6008*(9)	1.6644*(3)	1.0297	59
32	0.5585	0.5299	0.8481*(0)	0.6248*(9)	1.6005*(3)	1.0123	58
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6493*(4)	1.5401*(399)	0.9948	57
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	0.9774	56
35	0.6109	0.5736	0.8191*(2)	0.7003*(2)	1.4280*(1)	0.9599	55
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7266*(5)	1.3763*(4)	0.9425	54
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	0.9250	53
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	0.9076	52
39	0.6807	0.6293	0.7772*(1)	0.8097*(8)	1.2350*(49)	0.8901	51
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8392*(1)	1.1916*(6)	0.8727	50
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8694*(3)	1.1502*(4)	0.8552	49
42	0.7330	0.6691	0.7432*(1)	0.9003*(4)	1.1107*(6)	0.8378	48
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	0.8203	47
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9658*(7)	1.0354*(5)	0.8029	46
45	0.7854	0.7071	0.7071	1	1	0.7854	45

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 ; \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} ; \tan\theta \cot\theta = 1 ; \pi = 3.141592$$

☆ 丑 3) Desirable numeration Table of Trigonometric Functions

Deg.	Rad	Sin	Cos	Tan	Cot	Rad.	Deg.	비고
1	0.0174532	0.0174499	0.9998477	0.0174503	57.305605	1.5533	89	
2	0.0349065	0.0348992	0.9993908	0.0349204	28.636556	1.5359	88	
3	0.0523598	0.0523335	0.9986297	0.0524059	19.08182	1.5184	87	
4	0.0696131	0.0697588	0.9975639	0.0699291	14.300198	1.5010	86	
5	0.0872664	0.0871923	0.9961915	0.0875256	11.425228	1.4835	85	
6	0.1047197	0.1045495	0.9945197	0.1051256	9.5124308	1.4661	84	
7	0.1221730	0.1219007	0.9925423	0.1226446	8.1536406	1.4486	83	
8	0.1396263	0.1392002	0.9902643	0.1405687	7.1139592	1.4312	82	
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1583	6.3171*	1.4137	81	
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6721*	1.3963	80	
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1440*	1.3788	79	
12	0.2094	0.2079	0.9782*	0.2125*	4.7059*	1.3614	78	

朝鮮朝代 弧矢田積の 虚實斗 三角函數表

13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3309*	1.3439	77	
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0112*	1.3265	76	
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7327*	1.3090	75	
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4880*	1.2915	74	
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3058*	3.2701*	1.2741	73	
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0779*	1.2566	72	
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3444*	2.9036*	1.2392	71	
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3639*	2.7480*	1.2217	70	
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6048*	1.2043	69	
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4752*	1.1868	68	
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4244*	2.3563*	1.1694	67	
24	0.4189	0.4067	0.9136*	0.4452	2.2462*	1.1519	66	
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1345	65	
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4878*	2.0200*	1.1170	64	
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9627*	1.0996	63	
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5318*	1.8804*	1.0821	62	
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8041*	1.0647	61	
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7319*	1.0472	60	
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6008*	1.6644*	1.0297	59	
32	0.5585	0.5299	0.8481*	0.6248*	1.6005*	1.0123	58	
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6493*	1.5401*	0.9948	57	
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	0.9774	56	
35	0.6109	0.5736	0.8191*	0.7003*	1.4280*	0.9599	55	
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7266*	1.3763*	0.9425	54	
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	0.9250	53	
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	0.9076	52	
39	0.6807	0.6293	0.7772*	0.8097*	1.2350*	0.8901	51	
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8392*	1.1916*	0.8727	50	
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8694*	1.1502*	0.8552	49	
42	0.7330	0.6691	0.7432*	0.9003*	1.1107*	0.8378	48	
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	0.8203	47	
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9658*	1.0354*	0.8029	46	
45	0.7854	0.7071	0.7071	1	1	0.7854	45	