

## 가중평균 유한요소법을 이용한 주파수영역에서의 인공 음향파 합성

현혜자<sup>1)</sup> · 서정희<sup>2)</sup> · 민동주<sup>3)</sup>

### Weighted-averaging Finite-element Method for Scalar Wave Equation in the Frequency Domain

Hye-Ja Hyun<sup>1)</sup>, Jung-Hee Suh<sup>2)</sup> and Dong-Joo Min<sup>3)</sup>

**요 약 :** 일반 반사법 탐사 모델링에서 효율적인 주파수영역 수치모델링의 실용화를 위해 무엇보다 해결해야할 과제는 파장당 격자수를 줄이는 것이다. 본 연구에서는 이에 착안하여 수치분산 및 수치이방성을 최소화시키면서 한 파장당 필요한 격자수를 줄일 수 있는 가중평균 유한요소법을 개발하였다. 강성행렬과 질량행렬은 네 개의 사각형 유한요소로 확장하였으며, 모든 격자점이 포함되도록 유한요소를 배열하여 조합하였다. 확장된 네 개의 강성행렬과 질량행렬은 가중평균계수를 주어 선형결합하는 방법으로 가중평균하였다. 가중평균계수는 확장된 25점 평균차분법을 사용하여 가중평균계수를 결정하였다. 또한, 정확도 향상은 2차원 균질모델 과 수평층 모델에서 해석해와 한 파장당 4개의 격자점을 준 가중평균 유한요소법 수치해 비교를 통하여 검증하였다. 또한, 석유탄사에서 활용성이 높은 향사구조 모델을 선정하여 이의 반응을 관찰한 결과 지층경계면외에 네 개의 사각형 유한요소들의 구성으로 인한 인위적인 파의 도달이 인식되지 않았다. 따라서, 본 연구에서 고안된 가중평균 유한요소법은 주파수영역에서 폭 넓은 수치모델링연구를 가능하게 할 것이다.

**주요어 :** 가중평균 유한요소법, 파동방정식

**Abstract :** We develop the weighted-averaging finite-element method which uses four kinds of element sets. By constructing global stiffness and mass matrices for four kinds of element sets and then averaging them with weighting coefficients, we obtain a new global stiffness and mass matrix. With the optimal weighting coefficients minimizing grid dispersion and grid anisotropy, we can reduce the number of grid points required per wavelength to 4 for a 1% upper limit of error. We confirm the accuracy of our weighted-averaging finite-element method through accuracy analyses for a homogeneous and a horizontal-layer model. By synthetic data example, we reconfirm that our method is more efficient for simulating a geological model than previous finite-element methods.

**Keywords :** weighted-averaging finite-element method, wave equation

## 서 론

인공 음향파는 시간-공간영역, 주파수-공간영역, 시간-공간 파수영역(Pseudospectral method)에서 합성할 수 있다. 시간-공간영역에서의 유한차분법은 유한요소법에 비해 상대적으로 전산화 작업이 용이하며 적은 기억용량 및 짧은 계산시간 때문에 많이 이용된다. 그러나, 주파수-공간영역에서는 유한요소법이나 유한차분법이 모두 많은 기억용량 및 계산시간이 필요하다. 주파수-공간영역에서의 단점을 극복하기 위하여 유한차분 가중평균법이 개발되었다(Jo *et al.*, 1996; Shin and Sohn, 1998; Min *et al.*, 2000). 유한차분법은 복잡한 경계면조건을 처리하는 데 있어서는 해결되어야 할 문제점이 많이 있다. 반

면에, 유한요소법은 적분형의 원리에 기초를 두고 있기 때문에 미분방정식에서 직접 유도되는 유한차분법에 비교하여 매질 경계면의 처리를 용이하게 할 수 있는 장점이 있다.

주파수 영역에서의 유한요소법을 이용한 탄성과 파동방정식의 수치모델링은 Lysmer와 Drake(1972)에 의해 시작되었다. 주파수 영역의 유한요소법에서 Marfurt(1984)는 혼합절충형 질량행렬을 이용하여 재래의 유한요소법보다 한 파장당 적은 격자수를 이용하여 정확도를 향상시켰다. Marfurt와 Shin(1989)은 특수 산재행렬 solver인 nested dissection법을 적용하여 슈퍼컴퓨터를 이용한 주파수-공간영역 수치모델링의 가능성을 제시하였다.

주파수-공간영역에서는 복소 임피던스행렬을 LU분해한 후

\*2002년 6월 28일 접수

1) 한국지질자원연구원 탐사개발연구부

2) 서울대학교 지구환경시스템공학부

3) 한국해양연구소 해양지질연구단

선치환 및 후치환법에 의해 다중음원 인공 탄성과 합성을 효율적으로 할 수 있다. 반면에, 시간-공간영역보다 같은 정확도를 얻기 위해 한 파장당 필요한 격자수가 더 많이 필요하다. 그 결과 구성되는 행렬이 매우 방대하여 진다. 따라서, 주파수-공간 영역에서의 인공 음향파 합성의 실용화를 위해 무엇보다 해결해야 할 과제는 파장당 격자수를 줄이는 것이다.

본 연구에서는 이에 착안하여 수치분산 및 수치이방성을 최소화시키면서 한 파장당 필요한 격자수를 줄일 수 있는 가중 평균 유한요소법을 제안하였다. 강성행렬과 질량행렬은 네 개의 사각형 유한요소로 확장하였으며, 모든 격자점이 포함되도록 유한요소를 배열하여 조합하였다. 확장된 네 개의 강성행렬과 질량행렬은 가중평균계수를 주어 선형결합하는 방법으로 가중평균함으로써 한 파장당 필요한 격자수를 줄였다. 가중평균계수는 확장된 25점 평균차분법(Shin and Sohn, 1998)을 사용하여 가중평균계수를 결정하였다.

본 연구에서 개발된 가중평균 유한요소법의 정확도 검증은 정규화된 수치속도와 한 파장당 격자수 및 전파각에 따른 수치분산을 살펴보았다. 또한, 정확도 향상을 보다 구체적으로 관찰하기 위하여 해석해와의 비교는 2차원 균질모델 및 수평층에서 수행하였다.

### 스칼라 파동방정식의 유한요소식 유도

주파수-공간영역에서 2D 스칼라 파동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{k} \omega^2 \phi + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = f(x, z, \omega), \quad (1)$$

여기서  $\phi$ 는 압력장이며  $\omega$ 는 각 주파수,  $k$ 는 체적탄성률,  $f$ 은 음원,  $\rho$ 는 밀도이다.

본 연구에서는 고전적인 변분법 대신 Galerkin방법을 이용하여 유한요소식을 유도하였다. Galerkin방법에서는 매 주파수에서의 파동장을 기저함수(shape function)들의 선형결합으로 근사시킨다. 이렇게 근사된 파동장을 (1)식에 대입하여 생기는 잔여치를 가중함수로 적분하여 다음과 같이 표시한다.

$$\iint W_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \right) - f + \frac{1}{k} \omega^2 \phi^e \right] dx dz = 0, \quad (2)$$

여기서,  $\phi^e = \sum N_i \phi_i$ ,  $\phi_i$ 는 절점변위,  $W_i$ 는 가중함수,  $r$ 는 요소의 절점수이다.

가중함수를 기저함수로 대치한 후 (2)식을 부분적분하면 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$\omega^2 M \Phi + K \Phi = f \quad (3)$$

여기서,

$$K_{ij} = \iint \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz, \quad (4)$$

$$M_{ij} = \iint \frac{1}{k} N_i N_j dx dz, \quad (5)$$

$$f_i = \iint f N_i dx dz, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

이때,  $M = (r \times r)$  크기의 질량행렬,  $K = (r \times r)$  크기의 강성행렬,  $f = (r \times 1)$  크기의 음원벡터,  $\Phi = (r \times 1)$  크기의 압력 벡터,  $r$ 는 요소 절점수이다.

(3)식은 행렬식으로 단순화하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S \Phi = f \quad \text{또는} \quad \Phi = S^{-1} f \quad (7)$$

여기서, 크기의 복소임피던스행렬로 다음과 같이 표시된다.

$$S = \omega^2 M + K \quad (8)$$

### 가중평균 유한요소 파동방정식을 위한 사각형 유한요소 배열법

일반적인 유한요소법에서 사용되는 요소형태는 삼각형요소 및 사각형요소이다. 본 연구에서는 사각형요소만을 이용하였다. 사각형요소만을 (3)식에 적용하면 일반적인 유한요소 파동방정식이 된다. 본 연구에서 새롭게 확장된 유한요소 파동방정식은 ① 재래의 요소형태로 중심격자점  $P_{ij}(=P(x_i, z_j; \omega))$ 을 중심으로  $x$ 축과  $z$ 축 방향으로 각각 한 격자간격으로 구성된 정사각형 유한요소 파동방정식 ( $\Delta x, \Delta z$ ), ② 중심격자점을 중심으로  $x$ 축과  $z$ 축 방향으로 각각 두 배의 격자간격으로 확장된 정사각형 유한요소 파동방정식 ( $2\Delta x, 2\Delta z$ ), ③ 중심격자점을 중심으로  $x$ 축 방향으로 두 배의 격자간격과  $z$ 축 방향으로 한 격자간격인 직사각형 유한요소 파동방정식 ( $2\Delta x, \Delta z$ ), ④ 중심격자점을 중심으로  $x$ 축 방향으로 한 격자간격이고  $z$ 축 방향으로 두 배의 격자간격으로 구성된 직사각형 유한요소 파동방정식 ( $\Delta x, 2\Delta z$ )을 선형결합한 것이다. 여기서  $\Delta (= \Delta x = \Delta z)$ 는 격자간격을 나타낸다.

Fig. 1은 네 개의 각기 다른 사각형 유한요소들을 보여준다. 왼쪽의 위에서부터 정사각형 유한요소 ( $\Delta x, \Delta z$ ), 정사각형 유한요소 ( $2\Delta x, 2\Delta z$ ), 직사각형 유한요소 ( $2\Delta x, \Delta z$ ) 및 직사각형 유한요소 ( $\Delta x, 2\Delta z$ )를 차례로 보여준다. 모든 격자점에서 이 네 개의 각기 다른 사각형 유한요소가 배열하도록 조합되어야 한다.

Fig. 2에는 정사각형 유한요소 ( $2\Delta x, 2\Delta z$ )들을 격자점을 중심으로 네 가지 경우로 달리 배열한 사각형 유한요소들을 보여준다.

Fig. 3은 직사각형 유한요소 ( $2\Delta x, \Delta z$ )들을 중심격자점  $P_{ij}(=P(x_i, z_j; \omega))$ 에 배열한 경우와  $x$ 축 양의 방향(positive

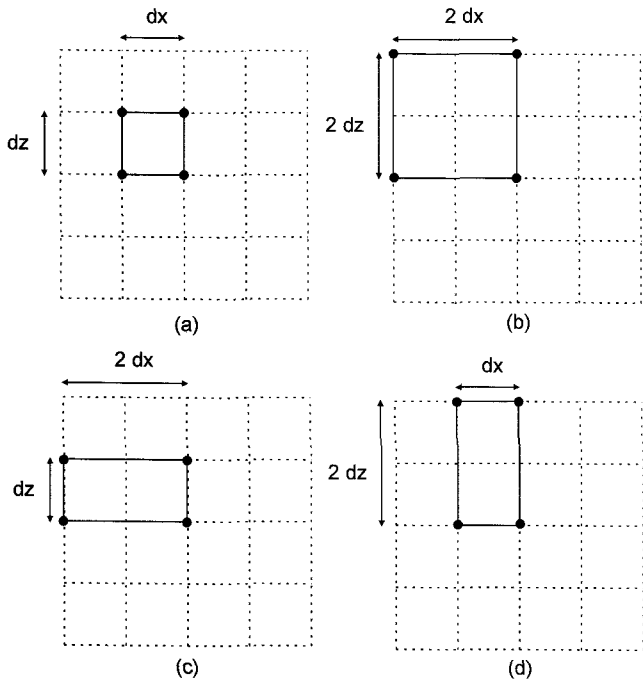


Fig. 1. Four kinds of the rectangular element sets used in the weighted-averaging finite-element method: (a) the fundamental  $(\Delta x, \Delta z)$ -element set and the supplementary (b)  $(2\Delta x, 2\Delta z)$ , (c)  $(2\Delta x, \Delta z)$ - and (d)  $(\Delta x, 2\Delta z)$ - element sets.

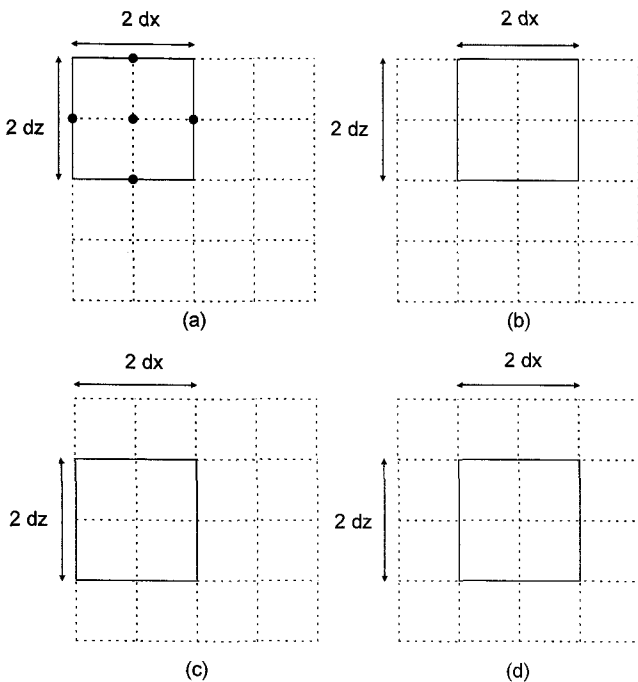


Fig. 2. Four  $(2\Delta x, 2\Delta z)$ -element sets used for all the nodal points to be included in the construction of the stiffness and mass matrix. The indicates the nodal points excluded in the construction of the stiffness and mass matrix.

direction)으로 한 격자간격 이동하여 배열한 두 가지 경우를 보여준다.

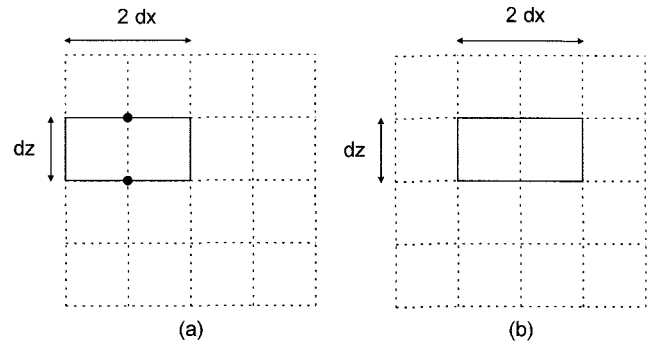


Fig. 3. Two  $(2\Delta x, \Delta z)$ -element sets used for all the nodal points to be included in the construction of the stiffness and mass matrix. The indicates the nodal points excluded in the construction of the stiffness and mass matrix.

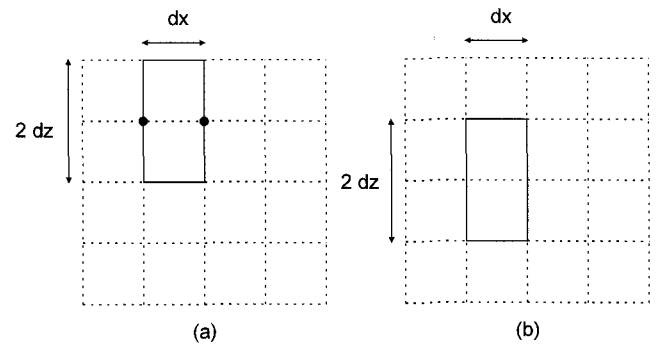


Fig. 4. Two  $(\Delta x, 2\Delta z)$ -element sets used for all the nodal points to be included in the construction of the stiffness and mass matrix. The indicates the nodal points excluded in the construction of the stiffness and mass matrix.

Fig. 4는 직사각형 유한요소  $(\Delta x, 2\Delta z)$ 들을 중심격자점  $P_{ij}(=P(x_i, z_j; \omega))$ 에 배열한 경우와  $z$ 축의 양방향(positive direction)으로 한 격자간격 이동하여 배열한 두 가지 경우를 보여 준다. 이렇게 구성된 9가지 경우의 유한요소 파동방정식들은 파장당 필요한 격자점을 줄이고 정확도를 향상시키기 위하여 선형결합될 것이다.

### 가중평균계수

9가지로 구성된 유한요소 파동방정식의 강성행렬식에서 정사각형 유한요소  $(\Delta x, \Delta z)$ 에는 가중평균계수를  $c1$ 주고, 정사각형 유한요소  $(2\Delta x, 2\Delta z)$ 에는 가중평균계수  $c2$ , 직사각형 유한요소  $(2\Delta x, \Delta z)$  및 직사각형 유한요소  $(\Delta x, 2\Delta z)$ 에는 가중평균계수  $c3$ 을 주었다. 그리고, 유한요소 파동방정식의 일치질량행렬식에서는 이와 유사하게 정사각형 유한요소  $(\Delta x, \Delta z)$ 에는 가중계수  $e1$ , 정사각형 유한요소  $(2\Delta x, 2\Delta z)$ 에는 가중계수  $e1$ , 직사각형 유한요소  $(2\Delta x, \Delta z)$  및  $(\Delta x, 2\Delta z)$ 에는  $e3$ 을 주었으며 집중질량행렬식에는 정사각형 유한요소  $(\Delta x, \Delta z)$ 에 가중계수 를 주었다.

가중평균 유한요소 파동방정식에서의 분산관계식은 유한차

분 파동방정식의 분산관계식과 유사하다.

가중평균된 유한요소 파동방정식의 분산식은 다음과 같이 표시된다.

$$\omega^2 D_m = -v^2 (D_{xx} + D_{zz}) \quad (9)$$

일반적인 사각형 유한요소체에 의한  $x$ 에 관한 2차미분치는 유한 차분 2차미분치에 가중평균함으로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} D_{xx}(\Delta x, \Delta z) = & \frac{1}{6} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j-1} - 2P_{i,j-1} + P_{i+1,j-1}) \\ & + \frac{2}{3} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}) \\ & + \frac{1}{6} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j+1} - 2P_{i,j+1} + P_{i+1,j+1}), \quad (10) \end{aligned}$$

가중평균 유한요소 파동방정식의  $x$ 에 관한 2차미분치는 위에서 언급한 가중계수  $c_1(\Delta x, \Delta z)$ ,  $c_2(2\Delta x, 2\Delta z)$ 와  $c_3((2\Delta x, \Delta z)$  및  $(\Delta x, 2\Delta z)$ 의 선형결합으로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} D_{xx} = & c_1 [D_{xx}(\Delta x, \Delta z)] + c_2 [D_{xx}(2\Delta x, 2\Delta z)] \\ & + c_3 [D_{xx}(2\Delta x, \Delta z)] + c_3 [D_{xx}(\Delta x, 2\Delta z)], \quad (11) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} D_{xx}(2\Delta x, 2\Delta z) = & \frac{1}{62} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j-2} - 2P_{i,j-2} + P_{i+2,j-2}) \\ & + \frac{2}{32} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j} - 2P_{i,j} + P_{i+2,j}) \\ & + \frac{1}{62} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j+2} - 2P_{i,j+2} + P_{i+2,j+2}), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{xx}(2\Delta x, \Delta z) = & \frac{1}{62} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j-1} - 2P_{i,j-1} + P_{i+2,j-1}) \\ & + \frac{2}{32} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j} - 2P_{i,j} + P_{i+2,j}) \\ & + \frac{1}{62} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-2,j+1} - 2P_{i,j+1} + P_{i+2,j+1}), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{xx}(\Delta x, 2\Delta z) = & \frac{1}{6} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j-2} - 2P_{i,j-2} + P_{i+1,j-2}) \\ & + \frac{2}{3} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}) \\ & + \frac{1}{6} \frac{\Delta z}{\Delta x} (P_{i-1,j+2} - 2P_{i,j+2} + P_{i+1,j+2}). \quad (14) \end{aligned}$$

가중평균 유한요소 파동방정식의  $z$ 에 관한 2차미분치는 위에서 언급한 가중계수  $c_1(\Delta x, \Delta z)$ ,  $c_2(2\Delta x, 2\Delta z)$ 와  $c_3((2\Delta x, \Delta z)$  및  $(\Delta x, 2\Delta z)$ 의 선형결합으로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} D_{zz} = & c_1 [D_{zz}(\Delta x, \Delta z)] + c_2 [D_{zz}(2\Delta x, 2\Delta z)] \\ & + c_3 [D_{zz}(2\Delta x, \Delta z)] + c_3 [D_{zz}(\Delta x, 2\Delta z)], \quad (15) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} D_{zz}(\Delta x, \Delta z) = & \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i-1,j-1} - 2P_{i,j-1} + P_{i+1,j-1}) \\ & + \frac{2}{3} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i,j-1} - 2P_{i,j} + P_{i,j+1}) \\ & + \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i+1,j-1} - 2P_{i+1,j} + P_{i+1,j+1}), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{zz}(2\Delta x, 2\Delta z) = & \frac{1}{62} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i-2,j-2} - 2P_{i-2,j} + P_{i-2,j+2}) \\ & + \frac{2}{32} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i,j-2} - 2P_{i,j} + P_{i,j+2}) \\ & + \frac{1}{62} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i+2,j-2} - 2P_{i+2,j} + P_{i+2,j+2}), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{zz}(2\Delta x, \Delta z) = & \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i-2,j-1} - 2P_{i-2,j} + P_{i-2,j+1}) \\ & + \frac{2}{3} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i,j-1} - 2P_{i,j} + P_{i,j+1}) \\ & + \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i+2,j-1} - 2P_{i+2,j} + P_{i+2,j+1}), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{zz}(\Delta x, 2\Delta z) = & \frac{1}{62} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i-1,j-2} - 2P_{i-1,j} + P_{i-1,j+2}) \\ & + \frac{2}{32} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i,j-2} - 2P_{i,j} + P_{i,j+2}) \\ & + \frac{1}{62} \frac{\Delta x}{\Delta z} (P_{i+1,j-2} - 2P_{i+1,j} + P_{i+1,j+2}). \quad (19) \end{aligned}$$

일반적인 사각형 유한요소 파동방정식의 일치질량행렬(consistent mass matrix)은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} D_m(\Delta x, \Delta z) = & \frac{1}{36} \Delta x \Delta z (P_{i-1,j-1} - 4P_{i,j-1} + P_{i+1,j-1}) \\ & + \frac{1}{9} \Delta x \Delta z (P_{i-1,j} - 4P_{i,j} + P_{i+1,j}) \\ & + \frac{1}{36} \Delta x \Delta z (P_{i-1,j+1} - 2P_{i,j+1} + P_{i+1,j+1}). \quad (20) \end{aligned}$$

2차미분치의 선형결합처럼 각각 다른 4개의 일치질량행렬과 집중질량행렬을 다음과 같이 결합시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} D_m = & e_1 D_m(\Delta x, \Delta z) + e_2 D_m(2\Delta x, 2\Delta z) + e_3 D_m(2\Delta x, \Delta z) \\ & + e_3 D_m(\Delta x, 2\Delta z) + f P_{i,j} \Delta x \Delta z \quad (21) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} D_m(2\Delta x, 2\Delta z) = & \frac{1}{36} 4 \Delta x \Delta z (P_{i-2,j-2} + 4P_{i,j-2} + P_{i+2,j-2}) \\ & + \frac{1}{9} 4 \Delta x \Delta z (P_{i-2,j} + 4P_{i,j} + P_{i+2,j}) \\ & + \frac{1}{36} 4 \Delta x \Delta z (P_{i-2,j+2} + 4P_{i,j+2} + P_{i+2,j+2}), \quad (22) \end{aligned}$$

$$D_m(2\Delta x, \Delta z) = \frac{1}{36} 2\Delta x \Delta z (P_{i-2,j-1} + 4P_{i,j-1} + P_{i+2,j-1}) + \frac{1}{9} 2\Delta x \Delta z (P_{i-2,j} + 4P_{i,j} + P_{i+2,j}) + \frac{1}{36} 2\Delta x \Delta z (P_{i-2,j+1} + 4P_{i,j+1} + P_{i+2,j+1}), \quad (23)$$

$$D_m(\Delta x, 2\Delta z) = \frac{1}{36} 2\Delta x \Delta z (P_{i-1,j-2} + 4P_{i,j-2} + P_{i+1,j-2}) + \frac{1}{9} 2\Delta x \Delta z (P_{i-1,j} + 4P_{i,j} + P_{i+1,j}) + \frac{1}{36} 2\Delta x \Delta z (P_{i-1,j+2} + 4P_{i,j+2} + P_{i+1,j+2}). \quad (24)$$

유한요소 파동방정식의 분산관계식은 (11)식, (15)식 및 (21)식을 (9)식에 대입하여 구할 수 있다.

분산관계식으로부터 얻어지는 위상속도 및 군속도는 다음과 같이 정의된다.

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad (25)$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (26)$$

여기서,  $v_{ph}$  및  $v_{gr}$ 은 각각 위상속도 및 군속도이며,  $\omega$ 는 각주파수이고  $k$ 는 공간주파수이다.

(9)식에 (25)식을 대입시키면 위상속도는 다음과 같이 표시된다.

$$v_{ph} = \frac{1}{v} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-D_{xx} - D_{zz}}{D_m}} \quad (27)$$

(9)식에 (26)식을 대입시키면 군속도는 다음과 같이 표시된다.

$$v_{gr} = -\frac{1}{v} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2D_m^2} \left[ \frac{(D_{xx}' + D_{zz}')}{\Delta} D_m - (D_{xx} + D_{zz}) \frac{D_m'}{\Delta} \right] \quad (28)$$

(27)식과 (28)식에서 가중계수의  $c_1$ ,  $c_2$  및  $c_3$ 는  $c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 1$ 의 제한조건을 주었으며 가중계수  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  및  $f$ 에는  $c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 1$ 의 제한조건을 주었다(e.g., Jo et al., 1996; Shin and Sohn, 1998; Stekl and Pratt, 1998). 그리고, 정규화된 위상속도 (27)식과 정규화된 군속도 (28)식이 단위값을 갖도록 행렬식을 구성하여(Shin and Sohn, 1998) 다음과 같은 가중계수들을 구하였다.

$$\begin{aligned} c_1 &= 1.63034868, & c_2 &= 0.0663752854, & c_3 &= -0.223962456, \\ e_1 &= 0.168119922, & e_2 &= -0.0953879654, & e_3 &= 0.15665926, \\ f &= 0.586794913. \end{aligned} \quad (29)$$

위 가중계수들은 속도모델에 독립적으로 쓰일 수 있다. 이는

가중계수를 결정하는 과정에서 모든 방향의 전파각과 주파수를 고려하여 수치오차를 최소화시켰기 때문이다.

### 분산곡선 분석

수치모형실험에서 합성되는 파동의 정확도에 영향을 주는 수치분산의 정도는, 분산관계식에서 유도되는 수치속도가 실제속도로부터 벗어나는 정도로 평가된다. 즉, 수치분산은 수치 위상속도 및 수치군속도가 격자간격  $\Delta$ , 전파각  $\theta$ 에 따라 실제 속도로부터 어느정도 달라지는 정도로 나타난다. 새롭게 고안된 가중평균 유한요소법의 정확도 향상을 검증하기 위하여 기존의 방법-가속도항에 집중질량행렬만을 이용한 경우, 일차 질량행렬만을 이용한 경우, 혼합질량행렬 질량행렬을 이용한 경우-과 비교를 통하여 정규화된 수치 위상속도 및 수치 군속도와 실제속도와의 관계를 분산곡선을 이용하여 분석하였다.

분산곡선에서는 실제속도에 대한 수치 위상속도 및 수치 군속도의 분산정도를 관찰하기 위하여 세로축에 정규화된 수치 위상속도 및 수치 군속도를 나타내고, 가로축은 파장당 격자수  $\Delta$ 를 나타내었다. 즉 격자수가 무한대에서 2개까지,  $1/G = 0 \sim 0.5$ , 주어졌을 때를 나타내고 있다. 또한, 수치이방성을 관찰하기 위하여 평면파의 전파각  $\theta$ 에 따라서도 나타내었다. Fig.

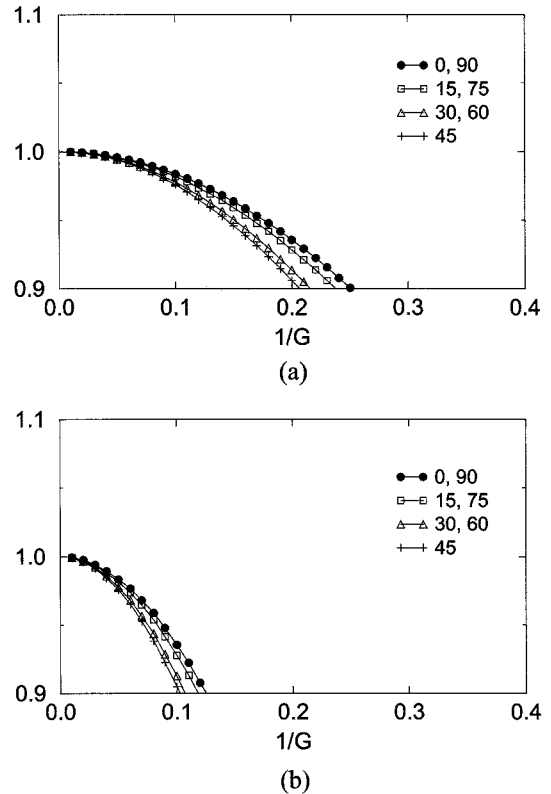
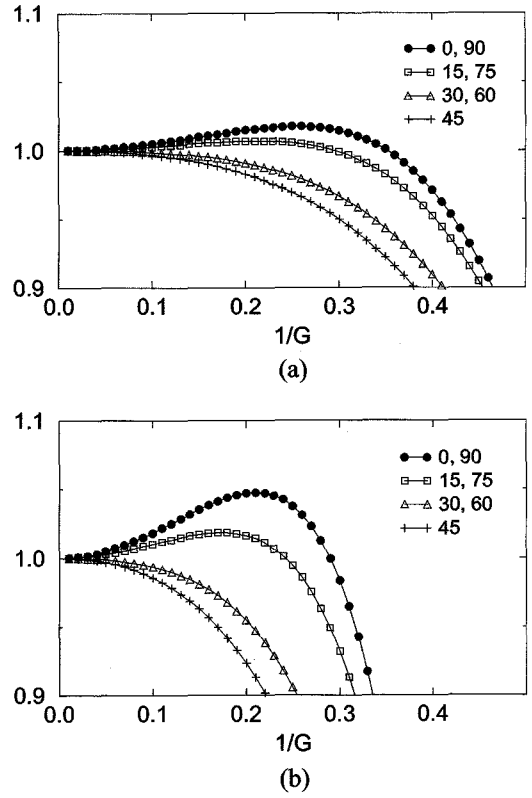
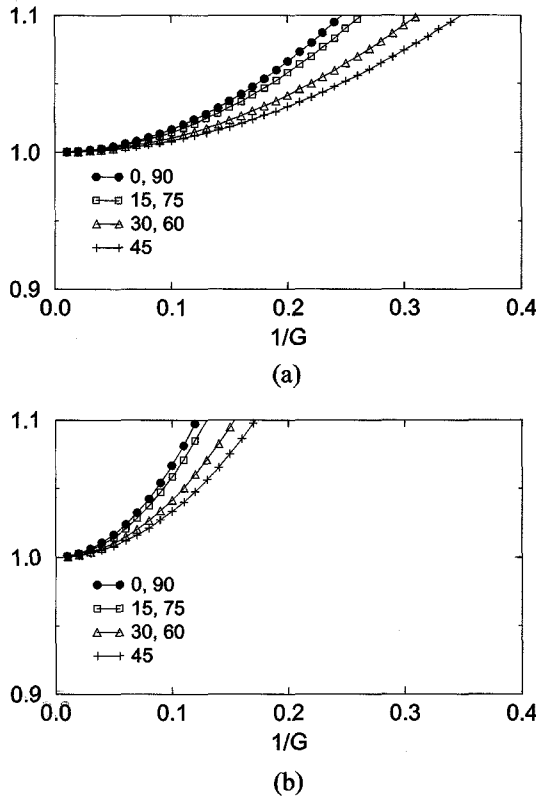


Fig. 5. Normalized (a) phase and (b) group velocities obtained by the lumped mass operator for propagation angles of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, and 90° with respect to the x-axis. G is the number of grid points per wavelength.



**Fig. 6.** Normalized (a) phase and (b) group velocities obtained by the consistent mass operator for propagation angles of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, and 90° with respect to the x-axis.  $G$  is the number of grid points per wavelength.

**Fig. 7.** Normalized (a) phase and (b) group velocities obtained by the eclectic method for propagation angles of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, and 90° with respect to the x-axis.  $G$  is the number of grid points per wavelength.

5는 강성행렬과 가속도항에 집중질량행렬만을 사용한 것으로 강성행렬에 가중계수  $c_1=1$ 을 주고, 집중 질량행렬에는  $f=1$ 의 가중계수를 주고 얻어진 분산곡선을 나타내고 있다. 수치 위상 속도 및 수치 군속도가 실제 속도에 대해 분산이 크게 나타난다. 수치이방성은 대체로 등방성을 보이고 있다. 즉, 전파각에 따른 수치분산은 거의 없는 것으로 보인다. 파장당 격자수가 33.3개 이상일때 오차가 1% 이내에 있음을 알 수 있었다. 또한, 주파수가 고주파수가 될수록 수치속도가 실제속도에 비해 저속도를 띄고 있음을 알 수 있다. Fig. 6은 강성행렬과 가속도항에 일치질량행렬만을 사용한 것으로 강성행렬에 가중계수  $c_1=1$ 을 주고, 일치 질량행렬에는  $e_1=1$ 의 가중계수를 주고 얻어진 분산곡선을 나타내고 있다. 수치 위상속도 및 수치 군속도가 실제 속도에 대해 분산이 크게 나타나고 있다. 또한, 주파수가 고주파수가 될수록 수치속도가 실제속도에 비해 고속도를 띄고 있음을 알 수 있다. 이는 가속도항에 집중질량행렬만을 사용한 것과 다른 결과이다. Fig. 7는 강성행렬과 가속도항에 혼합질량행렬 질량행렬을 사용한 것으로 강성행렬에 가중계수  $c_1=1$ 을 주고, 일치 질량행렬에는  $e_1=0.63$ 의 가중계수 및 집중 질량행렬에는  $f=0.37$ 을 주고 얻어진 분산곡선을 나타내고 있다. 수치 위상속도 및 수치 군속도가 기존의 방법중에서는 가장 정확도가 향상되어 보다 실제 속도에 대해 분산이

적어졌음을 볼 수 있다. 그러나, 전파각에 따른 수치 이방성은 더욱 크게 나타나고 있다. 특히 정규화된 군속도의 경우에는 전파각에 따른 분산현상이 더욱 심하게 나타나고 있다. 즉, 전파각에 따라 수치분산이 크게 차이를 알 수 있다. 정규화된 군속도의 허용오차 1% 이내인 경우는 파장당 격자수가 14개 정도일 때이다. 본 연구에서 개발된 가중평균 유한요소법을 이용하여 가중계수를 주어 얻어진 수치속도와 실제속도와와의 분산관계를 Fig. 8에 나타내었다. 수치분산은 기존의 방법에 비해 크게 정확도가 향상되어 군속도의 허용오차 1% 이내에서 파장당 격자수가 4개 까지 줄일 수 있었다. 이는 가속도항에 혼합질량행렬 질량행렬을 사용했을 때(Marfurt, 1984)에 비해 약 1/4정도로 파장당 격자수가 준 것이다. 따라서, 분석 결과에 의하면 주파수영역에서 음향파동방정식의 수치모형실험 실용화에서 대두되는 컴퓨터 주기억 장치의 용량문제와 계산시간상의 문제가 가중평균 유한요소법 개발로 인하여 효율성이 증대되었음을 알 수 있다.

**정확도 향상**

수치분산현상을 보다 구체화하여 정확도 향상을 검증하기 위하여 2차원 균질등방성 모델 및 수평층 모델을 선정하여 해

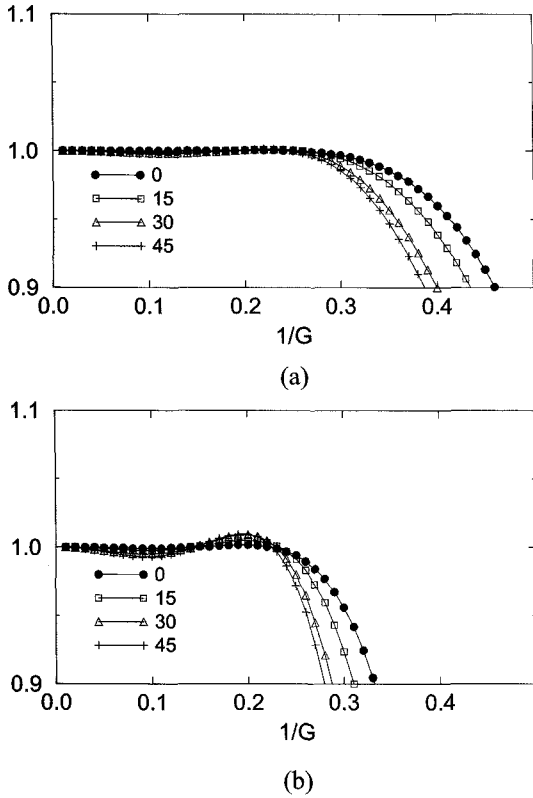


Fig. 8. Normalized (a) phase and (b) group velocities obtained by the weight-ed-averaging finite-element method for propagation angles of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, and 90° with respect to the x-axis. G is the number of grid points per wavelength.

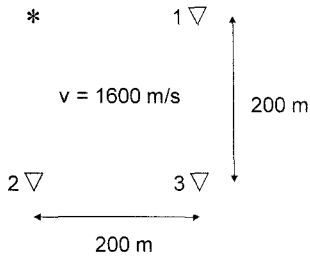


Fig. 9. The geometry of the homogeneous model.

석해와 가중평균유한요소법 수치해를 비교하였다.

Fig. 9는 균질등방성모델로 P파의 속도 1600 m/s, 밀도 1.0 g/cm<sup>3</sup>로 가정하였다. 음원의 파원은 가우시안 1차미분치(first derivative of a gaussian pulse)을 사용하였다. 음원은 모델의 중앙에 위치시켜 모든 방향으로 탄성파가 방사되도록 하였으며, 수신기배열은 수평 및 수직방향으로 각각 200m씩 떨어진 거리에 위치시켰다. Fig. 10는 해석해(실선으로 표시)와 본 연구에서 개발된 가중평균 유한요소법을 이용하여 가중계수를 주고 구해진 수치해(점선으로 표시) 결과를 보여준다. 파장당 격자수를 4개 주고 얻은 결과에서 실제 속도와 수치 위상속도 및 수치 군속도가 일치하는 정확도 향상에 기인한 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

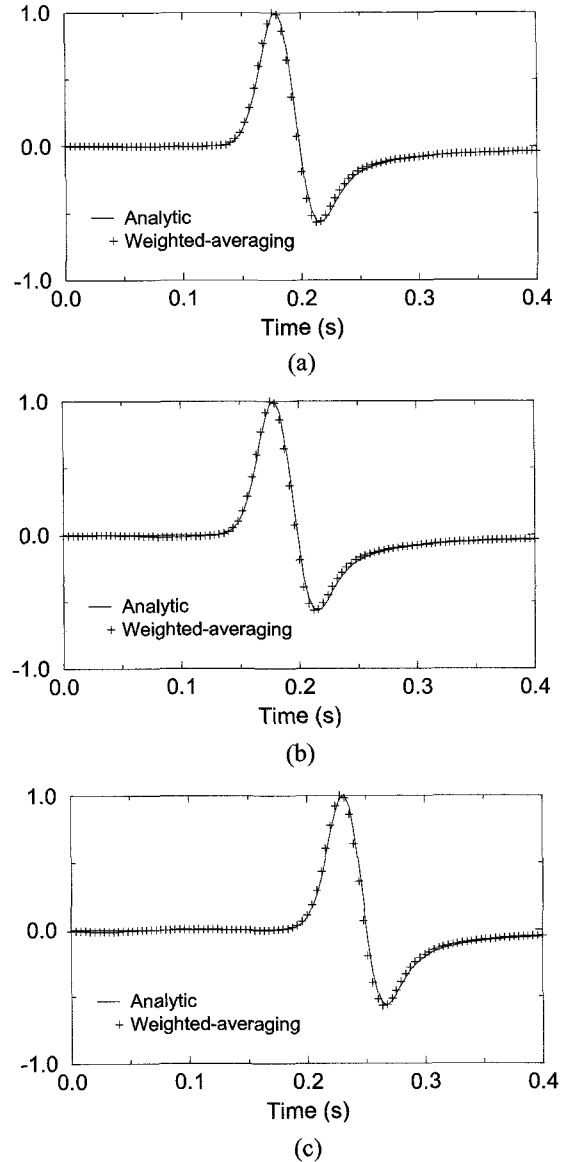


Fig. 10. Numerical solutions computed by the weighted-averaging finite-element method (plus symbols) and analytic solutions (solid line) at (a) receiver 1, (b) receiver 2, and (c) receiver 3 of Fig. 9. The number of Grid points per wavelength is 4.

Fig. 11에는 수평층 모델을 선정하여 탄성파의 투과 및 반사 전달현상을 파장당 격자수를 4개로 주어 기존의 방법(Marfurt, 1984)과 상대 비교하고자 하였다. 모델의 물성 매개변수에 대한 정보는 Table 1에 나타내었다. 음원은 최대주파수가 30 Hz 인 수직방향의 탄성파를 지면에서 주었으며, 수신기배열은 탄성파 전달현상이 잘 인식될 수있도록 위치시켰다.

Fig. 12에서는 반사면의 상부 60m에 위치한 수신기에 전달된 직접파와 반사파의 결과로 기존의 방법 해(실선)와 상대적으로 훌륭하게 일치함을 볼 수있다. Fig. 13에서도 투과파의 전달이 좋은 결과를 보여주고 있다. 상기 결과에서 새롭게 고안된 가중평균 유한요소법의 정확도향상 및 주파수영역에서

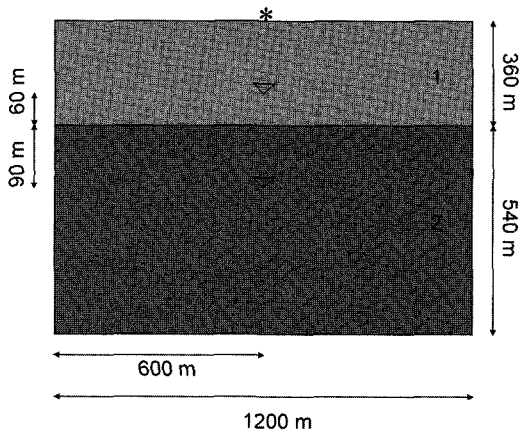


Fig. 11. The geometry of the horizontal-layer model.

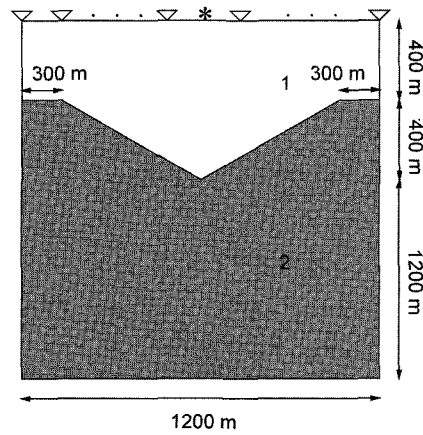


Fig. 14. The geometry of the syncline model.

Table 1. The material properties of the horizontal-layer model shown in Fig. 11

Layer	velocity	density
1	1800 m/s	2.2 g/cm <sup>3</sup>
2	3600 m/s	2.6 g/cm <sup>3</sup>

Table 2. The material properties of the syncline model shown in Fig. 14

Layer	velocity	density
1	2500 m/s	2.3 g/cm <sup>3</sup>
2	4000 m/s	2.7 g/cm <sup>3</sup>

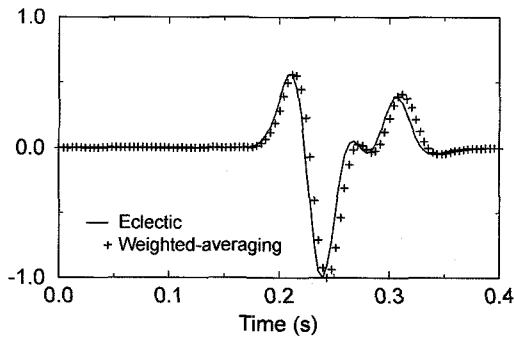


Fig. 12. Synthetic seismogram (of direct and reflection waves) obtained by the weighted-averaging finite-element (plus symbols) and the eclectic method (solid line) at the distance of 60m above the reflectors of the horizontal-layer model shown in Fig. 11.

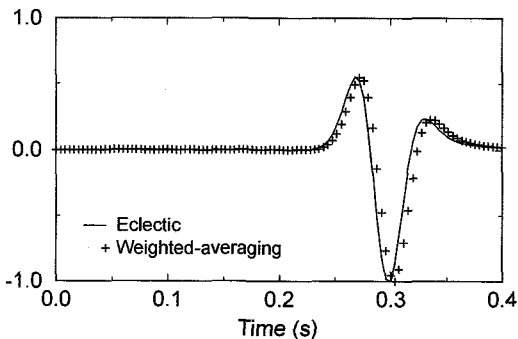


Fig. 13. Synthetic seismogram (of transmission waves) obtained by the weighted-averaging finite-element (plus symbols) and the eclectic method (solid line) at the distance of 90m under the reflectors of the horizontal-layer model shown in Fig. 11.

수치모델링의 효율성을 입증할 수 있었다.

### 수치모델링 예

석유탐사에서 가장 활용성이 높은 지하 지질구조인 향사구조 모델을 선정하여 이의 반응을 관찰하고자 하였다(Fig. 14 및 Table 2 참조). 음원은 지면의 중앙에서 최대주파수 40 Hz 인 파형을 수직으로 방사하였으며 수신기배열은 음원을 중심

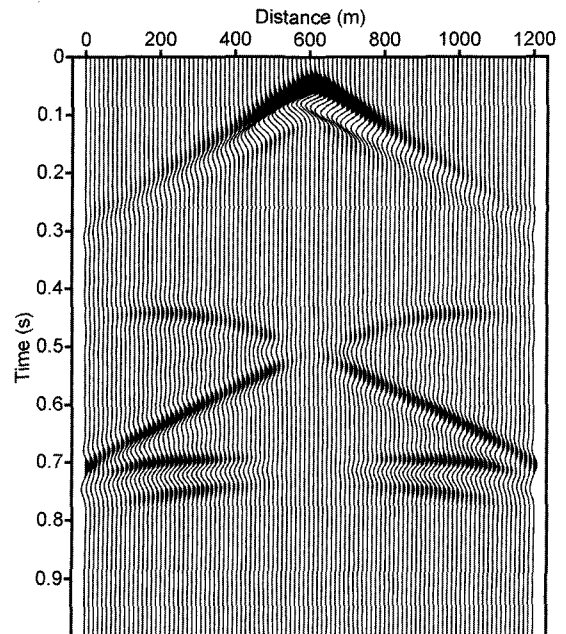


Fig. 15. Synthetic seismogram obtained by the weighted-averaging finite-element method for the syncline model.



으로 양측방향에 위치시켰다. 격자간격은 수평 및 수직 방향으로 하여 각각 주었다. 기록시간은 1 sec로 주었다. 경계조건으로는 모델의 유한성에서 초래되는 반사파의 역제를 위해 스폰지 경계조건을 적용하였다(Shin, 1995).

Fig 15에는 향사구조에서 전형적으로 획득되는 “bow-tie” 형태의 탄성과 전달현상이 훌륭하게 재현되었다. 상기 결과에서는 지층경계면외에 가중평균 유한요소법에서 네 개의 사각형 유한요소들의 구성으로 인하여 요소경계가 인위적인 경계로써 인식되어 생성된 파의 도달이 관찰되지 않는다. 그러므로, 본 연구에서 고안된 가중평균 유한요소법은 주파수영역에서 폭 넓은 수치모델링연구를 가능하게 할 것이다.

## 결 론

본 연구에서는 수치분산 및 수치이방성을 최소화시키면서 한 파장당 필요한 격자수를 줄일 수 있는 가중평균 유한요소법을 개발하였다. 강성행렬과 질량행렬은 네 개의 사각형 유한요소로 확장하였으며, 모든 격자점이 포함되도록 유한요소를 배열하여 조합하였다.

가중계수는 위상속도와 군속도가 실제속도와 일치하도록 결정하였다. 확장된 네 개의 강성행렬과 질량행렬은 9가지 가중계수를 주어 선형결합하는 방법으로 가중평균하였다.

가중평균유한요소법을 이용하여 파장당 격자수를 33.3개(일반적인 유한요소법에서 4개로 줄일 수 있었다. 파장당 격자수를 줄임으로서 복소임피던스행렬을 저장하는 데 필요한 컴퓨터 기억용량(band-type solver인 경우: 95.3% 감소, nested dissection method인 경우: 67.3% 감소) 및 계산시간이 크게 향상되었다. 그러므로, 본 연구는 모형의 규모 및 음원의 주파수대역의 제한성을 극복하는 데 기여하게 될 것이다.

정확도 향상은 2차원 균질모델 과 수평층 모델에서 해석해 또는 혼합질층형 유한요소법과 파장당 4개의 격자점을 준 가중평균 유한요소법 비교에 의해 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 또한, 석유탐사에서 활용성이 높은 향사구조 모델을 선정하여 이의 반응을 관찰한 결과 지층경계면외에 네 개의 사각

형 유한요소들의 구성으로 인한 인위적인 파의 도달이 인식되지 않았다. 따라서, 본 연구에서 고안된 가중평균 유한요소법은 주파수영역에서 폭 넓은 수치모델링연구를 가능하게 할 것이다.

## 사 사

본 연구는 과학기술부 종합전 심도구조보정 및 주시역산기술 국가지정연구사업 및 산업자원부 에너지지원기술개발사업의 일환으로 수행되었으며, 문교부 BK21사업에 의해 지원되었다.

## 참고문헌

- Jo, C. H., Shin, C. S., and Suh, J. H., 1996, An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator: *Geophysics*, **61**, 529-537.
- Lysmer, J., and Drake, L. A., 1972, A finite element method for seismology: method in computational physics: Academic Press.
- Marfurt, K. J., 1984, Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations: *Geophysics*, **49**, 533-549.
- Marfurt, K. J., and Shin, C. S., 1989, The future of interactive modeling of geophysical exploration: in Supercomputers in Seismic Exploration: Pergamon Press.
- Min, D. J., Shin, C. S., Kwon, B. D., and Chung, S. H., 2000, Improved frequency-domain elastic modeling using weighted-averaging difference operators: *Geophysics*, **65**, 884-895.
- Shin, C. S., 1995, Sponge boundary condition for frequency-domain modeling: *Geophysics*, **60**, 1870-1874.
- Shin, C. S., and Sohn, H. J., 1998, A frequency-space 2-D scalar wave extrapolator using extended 25-point finite-difference operator: *Geophysics*, **63**, 289-296.
- Stekl, I. and Pratt, R. G., 1999, Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite difference using rotated operators: *Geophysics*, **64**, 1779-1794.