

## 퍼지논리제어와 LMI기법을 이용한 강인 게인 스케줄링

### Robust Gain Scheduling Based on Fuzzy Logic Control and LMI Methods

지 호 선, 구 근 모, 이 훈 구, 탁 민 제, 홍 성 경

(Hyo-Seon Chi, Kuen-Mo Koo, Hungu Lee, Min-Jea Tahk, and Sung-Kyung Hong)

**Abstract** : This paper proposes a practical gain-scheduling control law considering robust stability and performance of Linear Parameter Varying(LPV) systems in the presence of nonlinearities and uncertainties. The proposed method introduces LMI-based pole placement synthesis and also associates with a recently developed fuzzy control system based on Takagi-Sugeno's fuzzy model. The sufficient conditions for robust controller design of linearized local dynamics and robust stabilization of fuzzy control systems are reduced to a finite set of Linear Matrix Inequalities(LMIs) and solved by using co-evolutionary algorithms. The proposed method is applied to the longitudinal acceleration control of a high performance aircraft with linear and nonlinear simulations.

**Keywords** : linear parameter varying system, gain-scheduling control, fuzzy control, linear matrix inequality, co-evolutionary augmented lagrangian method

#### I. 서론

선형 시변 시스템에 대한 제어 기법 중 널리 활용되고 있는 방법은 선형화된 다수의 설계점에 대해 선형 제어기를 각각 설계하는 게인 스케줄링 기법이다. 그러나 각 설계점에서 사용하는 제어기가 고전 제어기의 형태를 갖는 고전적인 게인 스케줄링 제어 기법의 경우 불확실성에 대한 강인성과 안정성을 보장할 수 없고, 변환 영역에서의 안정성을 해석하기 어렵다는 단점이 있다[1][2].

이러한 고전적인 제어기법을 적용하는 대신 불확실성에 대한 비선형 시스템의 강인성과 안정성을 고려한 비선형 제어 기법이 제안되었으나 그 설계 절차가 복잡하고 실시간 제어 설계 과정이 요구되는 단점이 있다. 선형화된 시스템의 불확실성에 대해 강인한 제어기를 설계할 수 있는  $H_2$ 나  $H_\infty$  기법은 불확실성에 대한 강인성과, 고전적인 제어기에 비해 강인한 성능의 제어기를 얻을 수 있다. 그러나 이는 고전 기법에 비해 높은 차수의 제어 이득이 요구되는 단점을 갖는다[3]. 최근 제안된 게인 스케줄링  $H_\infty$  기법[4]은 전체 설계 영역에 걸친 안정성과 강인성을 보장하는 제어기 설계가 가능하며 선형 행렬 부등식을 이용하여 보다 쉽게 제어기를 설계할 수 있는 장점을 지닌다. 그러나 이것 또한 기본적으로  $H_\infty$  기법에 의한 기법이므로 게인의 계산과정이 복잡하여 실제적인 적용이 어렵다.

본 논문은 불확실성을 지닌 비선형 시스템의 강인 안정성과 성능을 고려한 새로운 형태의 게인 스케줄링 제어 기법을 제안한다. 이 기법은 선형 행렬 부등식과 퍼지 제어 시스템을 조합한 것으로 LPV(Linear Parameter Varying) 시스템의 설계 영역 전반에 걸친 안정성과 강인성을 고려한 제어기를 설계할 수 있다. 이를 자세히 설명하면 다음과 같다.

우선 각 설계점에서의 제어기 설계는 변수 불확실성에 대한 강인 안정성과 성능을 고려하여 선형 행렬 부등식을 이용한 극점배치 기법을 도입하였다. 일반적으로 선형 시스템의 안정성과 성능은 극점의 위치와 관계가 있으므로 복소수 평면의 적당한 영역에 극점을 배치함으로써 강인 안정성 및 성능을 고려할 수 있다. 어떤 점에 대한 극점 배치를 다루는 고전적인 극점 배치 기법에 비해 본 연구에서 도입한 LMI 극점 배치 기법은 일정 영역에 대한 극점배치를 다루므로 보다 유연하게 극점 배치를 이용할 수 있는 장점을 갖는다. 이때 이러한 복소평면상의 일정한 영역을 LMI 영역이라 한다[5].

각 설계점에서의 제어기가 구성되면 게인 스케줄링된 전체 제어계의 안정성을 위해 Takagi-Sugeno 퍼지 모델[6]에 기초한 퍼지 제어 시스템을 구성한다. 이 퍼지 모델은 상태 공간 영역에서 각 설계점에 대해 선형화된 모델을 기초로 전체 비선형 시스템을 퍼지모델의 혼합을 통해 나타낸다. 이때 각 설계점에 대해서는 병렬 배분 보상(parallel distributed compensation)제어를 이용하며, 퍼지 모델과 제어 시스템의 안정 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현된다. 이 기법의 장점은 각 설계점에 대해서는 기존의 강인 제어 기법을 적용할 수 있으며, 선형 행렬 방정식으로 표현된 안정성 조건에 의해 게인 스케줄링된 제어기가 전체 영역에서 강인 안정성을 보

접수일자 : 2000. 4. 26., 수정완료 : 2000. 8. 28.

지호선, 구근모, 탁민제 : 한국과학기술원 기계공학과

이훈구 : (주)썬트레이

홍성경 : 세종대학교 항공우주공학과

※ 본 논문은 국방 과학 연구소의 비행제어계 설계 과제의 지원을 받아 수행되었습니다.

장할 수 있다는 것이다.

이상의 퍼지 제어 시스템과 LMI 극점 배치 기법을 조합한 제어 시스템을 구현하면 선형화된 각 설계점에서의 강인성과 개인 스케줄링된 전체 퍼지 제어 시스템의 안정성을 만족하기 위한 충분 조건이 모두 선형 행렬 부등식으로 표현된다. 최근 이러한 선형 행렬 부등식을 만족하도록 하는 강인 제어계 설계 기법이 많이 연구되고 있으나 그 동안의 연구결과는 대부분의 제어계 설계 문제에서 나타나는 설계 요구 조건을 고려할 수 없었으며 그 설계과정 또한 반복적으로 이루어지는 단점이 있다. 이를 보완하기 위해 본 논문에서는 LMI 문제를 최근 새로운 최적화 기법으로 주목받고 있는 공진화 알고리즘을 이용하여 최적화 하는 방법을 제안하였다[7]. 즉 안정성을 보장하는 충분 조건 및 설계요구조건을 구속 조건으로 하는 파라미터 최적화 문제로 구성한 후, 공진화 알고리즘을 이용하여 이러한 구속 조건들을 만족하는 최적 제어 개인을 구하는 방법을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서 LMI에 기초한 극점 배치 기법을 설명하고 3장에서는 퍼지 제어 시스템을 이용한 개인 스케줄링 기법을 간단히 소개하였다. 4장에서는 CEALM(Co-Evolutionary Augmented Lagrangian Method)을 이용한 강인 스케줄링 기법을 소개하였다. 5장에는 제안한 기법을 항공기의 개인 스케줄링에 적용한 결과를 보이고 6장에서 연구 결과에 대한 결론을 제시하였다.

II. LMI영역에서의 극점 배치

선형 행렬 부등식은 일반적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$L_i(x) < 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (1)$$

여기에서  $x \in R^p$ 는 변수 벡터이며,  $L(\cdot)$ 는  $x$ 에 affine된 대칭행렬이다. 부등 기호는 음한정(negative definite)임을 나타낸다. 이러한 LMI 집합은 다음과 같은 하나의 선형 행렬 부등식으로 간주될 수 있다.

$$L(x) = \text{diag}(L_1(x), \dots, L_M(x)) < 0 \quad (2)$$

따라서 LMI 문제를 푼다는 것은 (2)를 만족하는 벡터  $x$ 를 구하는 것으로 LMI가  $x$ 에 affine된 특성에 의해 볼록 최적화 문제가 된다[7]. LMI 영역은 복소 평면상에서 LMI로 표현되는 복소 평면의 부분집합이다. LMI 영역의 개념은 Lyapunov 안정성 이론에 기초하고 있으며 극점 배치에 유용하게 사용된다.

만일  $D$ 가 복소평면의 LHP의 일정한 영역을 나타낼 때, 시스템  $\dot{x} = Ax$ 의 모든 극점이 영역  $D$ 에 속하게 되면 이를  $D$ -안정(stable)하다고 한다. 이때 LMI 영역은 다음과 같은 복소 평면상의 부분영역  $D$ 로 정의된다.

$$D = \{z \in C : L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad (3)$$

여기에서  $L = L^T$ 이고  $M$ 은 실행렬(real matrix),  $z$ 는 복소 변수를 나타낸다.  $f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T$ 를 영역  $D$ 의 특성 함수(characteristic function)라고 한다. LMI영역의

정의에 의해  $f_D(\bar{z}) = \overline{f_D(z)}$ 가  $z \in D$  에서 대해서 만족하므로 복소 평면 상의 실수축에 대칭인 볼록한 영역을 나타낸다.

만약 다음을 만족하는 양한정 대칭행렬  $X$ 가 존재하면 행렬  $A$ 는  $D$ -안정하다.

$$M_D(A, X) = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}X + \beta_{ij}AX + \beta_{ij}XA^T \\ 1 \leq i, j \leq m, X > 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

$[\alpha_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$  과  $[\beta_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$  는 행렬  $L$ 과  $M$ 의 성분을 나타낸다. 이때  $M_D$ 와  $f_D$ 는 각각 다음과 같은 치환에 의해 서로 연관되어 있음을 알 수 있다.

$$(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$$

독립적으로 정의된 LMI 영역들은 좀 더 복잡한 영역으로 확장될 수 있으며, 이로 인해 LMI 영역은 제어이론에서 요구하는 보다 실질적인 영역을 나타낼 수 있다. 즉, 특성함수  $f_{D_1}, \dots, f_{D_N}$ 으로 나타나는 LMI 영역  $D_1, \dots, D_N$ 이 주어졌을 때, 이들의 교집합 영역  $D = D_1 \cap \dots \cap D_N$ 은 다음의 특성 함수를 갖는 LMI 영역이 된다.

$$f_D(z) = \text{diag}(f_{D_1}, \dots, f_{D_N}) \quad (5)$$

결국 LMI 영역의 교집합 영역에 대한 극점배치는 모든  $i = 1, \dots, N$ 에 대해  $M_{D_i}(A, X) < 0$ 를 만족하는 공통의 양한정 행렬  $X$ 를 구하는 문제가 된다. 또한 LMI 극점 배치 구속 조건을 고려한 상태 피드백 설계는 (4)의 행렬  $A$ 에  $A_{cl} = A - BK$ 을 대입하여 구할 수 있는데 이를 다음과 같이 표현되는 시변 파라미터를 갖는 불확실 시스템에 적용 가능하다.

$$\dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u \quad (6)$$

$\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_n(t))$ 는 범위  $\underline{\Delta}_i \leq \Delta_i(t) \leq \overline{\Delta}_i$ 내에서 변하는 불확정성을 나타내는 시변 파라미터(time-varying parameter)이다. 모든  $A(\Delta)$ 과  $B(\Delta)$ 에 대한 페루프 극점이 LMI 영역  $D$ 에 위치하기 위한 상태 피드백 개인  $K$ 를 찾는 문제를 고려하면 다음과 같은 다극점(polytopic) 모델이 유용하게 사용된다. 즉,  $R^n$ 에서 그림 1과 같이 모서리(corner)  $\{\Pi_i\}_{i=1}^N$  ( $N=2^n$ )에 대해 다음과 같은 식을 취한다면

$$\Delta(t) = \alpha_1 \Pi_1 + \dots + \alpha_N \Pi_N, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (7)$$

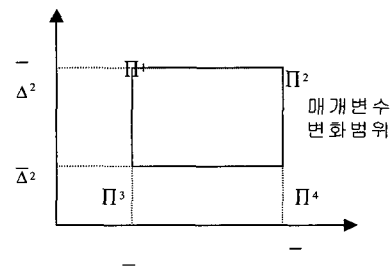


그림 1. 매개변수 상자(n=2).

Fig. 1. Parameter box(n=2).

(6)은 다음 행렬 polytope에서 값을 가진다.

$$(A, B) \in \left\{ \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right); \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (8)$$

이때 상태 피드백 제어에 의해 (6)의 모든 극점이 변수 불확정성에 대해 항상 일정한 LMI 영역에 존재하기 위한 조건은 다음과 같이 행렬 극점에 대해 나타내어지며 이를 이차 D-안정화 조건이라고 한다[5].

D-안정화 조건 : 어떤 LMI 영역 D에 대해 다음 식을 만족하는 X>0 와 K가 존재하면 (6)은 모든 k에서 이차 D-안정하다.

$$M_{D_k} = [ \alpha_{ij} X + \beta_{ij} (A_k - B_k K) X + \beta_{ji} X (A_k - B_k K)^T ]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad (9)$$

이 식은 (4)의 안정화 조건을 페루프 시스템에서의 식으로 바꾸어 표현한 것으로 A<sub>k</sub>와 B<sub>k</sub>는 A(Π<sub>k</sub>)와 B(Π<sub>k</sub>)의 정점을 의미하며 N은 불확정 변수의 정점의 개수를 나타낸다.

**III. 퍼지 제어를 통한 강인 게인 스케줄링**

1. Takagi-Sugeno 퍼지 모델

비선형 플랜트에 대해 Takagi-Sugeno 퍼지 모델[6]은 비선형 시스템의 각 설계점에 대한 입출력 관계를 퍼지 IF-THEN 규칙으로 표현한다. 퍼지 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같이 나타내어진다.

규칙 i : 만일 z<sub>1</sub>(t) 가 M<sub>i1</sub>...이고 z<sub>p</sub>(t) 가 M<sub>ip</sub>... 이면

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i=1, 2, \dots, r$$

여기에서 r은 IF-THEN 규칙의 개수이고 M<sub>ij</sub>는 퍼지 집합이다. x(t)∈R<sup>n</sup>은 상태 벡터, u(t)∈R<sup>m</sup>은 제어 입력 벡터, z(t)∈R<sup>p</sup>는 조건 변수(premise variable)이다. 이러한 비선형 시스템에 대한 퍼지 규칙에 대해 퍼지 시스템의 최종 출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (10)$$

이때,

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) \quad (11)$$

$$z(t) = [ z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t) ] \quad (12)$$

이며, M<sub>ij</sub>(z<sub>j</sub>(t))는 z<sub>j</sub>(t)의 멤버십 함수의 기여도를 의미한다. 또한 각 가중치에 대해서는 다음을 만족한다고 가정한다.

$$w_i(z(t)) \geq 0, \quad i=1, \dots, r \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \quad \text{for all } i$$

2. 병렬 배분 보상기

(10)의 퍼지 시스템을 안정화 하는 제어기 설계에는 병렬 배분 보상기(PDC : parallel distributed compen

sation)가 사용된다. PDC의 개념은 앞서의 각 퍼지 모델에 대해 독립적인 제어계를 설계하는 것으로, 퍼지 모델(10)이 선형화된 상태 방정식으로 표현 되었으므로 각 규칙에 대해 기존의 선형 제어 이론을 적용하는 것이다. PDC를 이용하여 설계된 퍼지 제어기 역시 다음과 같은 퍼지 시스템의 퍼지 규칙으로 나타내어진다.

규칙 i : 만약 z<sub>1</sub>(t) 가 M<sub>i1</sub>...이고 z<sub>p</sub>(t) 가 M<sub>ip</sub>... 이면

$$u(t) = -K_i x(t), \quad i=1, 2, \dots, r$$

위 규칙들로부터 다음의 전체 퍼지 제어계 입력을 얻는다.

$$u(t) = \frac{-\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (14)$$

(14)의 퍼지 제어 입력은 설계된 각 선형 제어기의 퍼지 모델이고 일반적으로는 비선형이다. 이때, (14)를 (10)에 대입하면 다음과 같은 전체 퍼지 제어 시스템을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t)) \{ A_i - B_i K_j \} x(t)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t))} \quad (15)$$

Lyapunov 안정성 이론을 적용한 이 시스템의 강인 안정성을 위한 충분조건은 다음과 같다.[7]

퍼지 시스템 (15)는 x<sub>i</sub>(z(t))w<sub>j</sub>(z(t)) ≠ 0, ∀z(t)일 때 다음을 만족하는 양한정 행렬 P가 존재할 때 점근적으로 안정하다.

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0, \quad i, j=1, 2, \dots, r$$

또한, 위 조건은 간단한 수식 전개를 통해 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$F(K, P) = \text{diag} \left( \left\{ A_{ci}^T P + P A_{ci} \right\}_{1 \leq i \leq r}, \left\{ G_{ij}^T P + P G_{ij} \right\}_{i, j} \right) < 0$$

$$\text{where } A_{ci} = (A_i - B_i K_i)$$

$$\text{and } G_{ij} = \frac{(A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)}{2}$$

**IV. CEALM을 이용한 게인 스케줄링 기법**

이번 장에서는 LPV 불확실 시스템에 대해 보완 라그랑지안 공진화 알고리즘(CEALM)[8]을 이용한 게인 스케줄링 문제에 다루었으며 LPV 시스템의 상태 변수 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = A(\theta, \Delta)x(t) + B(\theta, \Delta)u(t) \quad (16)$$

여기에서 x(t)∈R<sup>n</sup>은 상태 벡터, u(t)∈R<sup>m</sup>은 제어입력, θ(t)는 스케줄된 시변 변수, Δ(t)는 불확실 시변 변수를 의미한다. 스케줄된 변수 θ(t)는 (10)에서 결정한 z(t)이고 Δ(t)와 달리 실시간으로 측정이 가능한 변수이다.

본 논문에서 제안된 기법은 앞서의 Takagi-Sugeno 퍼지 모델에서 시작한다. 이 기법은 제어설계에서 널리 사용되는 응답오차나 제어입력과 같은 성능 지수 F(K)

를 최소화하고 설계 요구 조건을 만족하는 상태 피드백 제어  $u(t) = -Kx(t)$ 를 결정하는 것으로 요약된다. 성능 지수는 다음과 같다.

$$J = \min F(K) \tag{17}$$

이때 제어계인은 다음의 설계 요구 조건을 만족해야 한다.

1) 각 설계점의 변수 불확실성에 대해 보상된 시스템은  $X > 0$  에서 다음 이차  $D$ -안정 조건을 만족한다.

$$M_{K_i}(K, X) = [\alpha_{ij}X + \beta_{ij}A_{cl_k}X + \beta_{ji}XA_{cl_k}^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \tag{18}$$

$$A_{cl_k} = (A_k - B_kK), \quad k = 1, \dots, N$$

2) 개인 스케줄된 전체 시스템의 강인 안정성을 위해 Takagi-Sugeno 퍼지 모델은  $P > 0$ 과 다음의 이차 안정성 조건을 만족한다.

$$T(K, P) = \text{diag}([A_{cl_i}^T P + PA_{cl_i}]_{1 \leq i \leq r}, [G_{ij}^T P + PG_{ij}]_{i, j}) < 0 \tag{19}$$

$$A_{cl_i} = (A_i - B_iK_i), \quad G_{ij} = \frac{(A_i - B_iK_i) + (A_j - B_jK_j)}{2}$$

3) 원하는 시스템 성능 요구 조건에 대해 페루프 시스템은 다음과 같이 표현되는 부등 구속 조건을 만족한다.

$$G(K) < 0 \tag{20}$$

이렇게 표현된 구속 조건을 갖는 최적화 문제의 최적 제어 계인은 공진화 알고리즘을 이용하여 구한다. 즉, 제어 계인  $K$ 는 진화를 거듭하며 설계 요구 조건을 만족하고 성능지수를 최소화하게 된다. 이때 공진화를 통해 얻은 계인은 성능 지수를 최소화 할 뿐만 아니라 퍼지 시스템의 강인 안정성 및 불확실성에 대한 강인성 또한 보장하게 된다.

이때 공진화 알고리즘은 LMI조건과 부등식형태로 나타나는 구속조건을 동시에 고려할 수 있다는 장점을 가진다.

**V. 항공기 종축 가속도 개인 스케줄링 제어기 설계**

본 논문에서 제안한 강인 개인 스케줄링 기법을 항공기의 종축제어기 설계에 적용해 보았다. 항공기의 공력 계수는 속도, 공기의 밀도, 무게중심(CG) 등의 변화에 큰 영향을 받으므로 항공기의 안정성은 이러한 파라미터들의 불확실성에 크게 좌우된다. 이 절에서는 강인 개인 스케줄링 제어기를 설계하기 위해서, CG 변화에 따른 변수 불확실성을 고려하여 앞서 제안된 기법을 통한 개인 스케줄링 설계 예를 보이도록 하였다.

**1. 플랜트 모델 설계**

일반적인 항공기의 비선형 모델을 비행 포위 선도 내의 선택적인 설계점에서 선형화하고 비행 조건  $(\theta(t))$ 과 변수 불확실성  $(\Delta(t))$ 에 대해 선형적으로 변수가 변화하는 불확실 시스템을 고려하면 종축 방향에 대한 항공기의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다[8].

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & 0 & -g \\ Z_u & Z_\alpha & 1 & 0 \\ M_u & M_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \tag{21}$$

상태 변수  $(u, \alpha, q, \theta)$ 는 각각 수평 속도, 받음각, 피치 각속도, 피치각의 섭동치이다. 입력  $\delta_e$ 는 조종면 변위를 나타낸다. 시스템 행렬 내의 각 변수들은 공기 역학적인 힘과 모멘트의 공력 계수를 나타내고 이들은 또한 비행 조건과 불확실성에 따라 변하는 시변 변수가 된다.

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{C_{x_u} q_a S}{mU}, & X_\alpha &= \frac{C_{x_\alpha} q_a S}{mU} \\ Z_u &= \frac{C_{z_u} q_a S}{mU}, & Z_\alpha &= \frac{C_{z_\alpha} q_a S}{mU} \\ M_u &= \frac{C_{m_u} q_a S}{I_y}, & M_\alpha &= \frac{C_{m_\alpha} q_a S}{I_y} \\ M_q &= \frac{C_{m_q} q_a S}{I_y} \frac{c}{2U} \end{aligned} \tag{22}$$

여기에서  $m$ 은 항공기의 무게,  $I_y$ 는 피치 모멘트,  $U$ 는  $x$  축 방향의 속도이고,  $q_a$ 는 동압,  $S$ 와  $c$ 는 각각 날개 면적과 평균 공력 코드 길이를 나타낸다.

**2. 제어기 구조**

그림 2는 표준하중계수  $N_z$ 를 출력값으로 하는 항공기 종축 가속도 제어 시스템을 보여주고 있다. 표준하중계수는 다음과 같이 표현된다.

$$N_z = \frac{U}{g} (\dot{\alpha} - q) \tag{23}$$

(23)을 보면 출력  $N_z$ 는  $\dot{\alpha}$ 와  $q$ 에 의해 결정됨을 알 수 있다. 항공기가 안정할 때 오차가 0인 명령추종을 위한 피드포워드 루프에는 단순 적분제어기가 도입 되었고 형상 필터(shaping filter)와 제한기(limiter)는 조종 스틱에 의한 명령 입력  $N_z$ 가 포함된다.

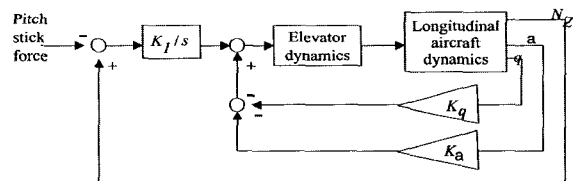


그림 2. 제어 구조.

Fig. 2. Control structure.

**3. 단주기 모드의 근사**

항공기 종축 가속도 제어 문제에서는 (21)에 주어진 상태 변수 방정식에서 단주기 모드에 관련된  $\alpha$ 와  $q$ 만을 상태 변수로 사용하는 근사 모델을 사용하는 경우가 많다. 단주기 운동의 근사식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e}/U_0 \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \tag{24}$$

이때 전방향 속도  $U_0$ 가 충분히 크다고 가정하면  $Z_{\delta_e}/U_0$ 는  $M_{\delta_e}$ 에 비해 매우 작으므로 무시할 수 있다. 이 경우 간략화된 단주기 모델의 종축 운동의 전달함수

는 다음과 같다.

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{M_{\delta e}}{\Delta(s)}, \quad \frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{(s-Z_a)M_{\delta e}}{\Delta(s)} \quad (25)$$

여기에서

$$\Delta(s) = s^2 - (M_q + Z_a)s + M_q Z_a - M_a = s^2 + 2\zeta_{sp}w_{nsp}s + w_{nsp}^2 = (s - \sigma_1)(s - \sigma_2) \quad (26)$$

이고,  $\sigma_1$  과  $\sigma_2$ 는 단주기 모드의 극점이다. (26)으로부터  $M_q$ ,  $Z_a$ 는 단주기 모드의 감쇄와 주파수 모두에 영향을 미치며  $M_a$ 는 단주기 주파수에만 영향을 미친다. 그림 2의 제어 시스템을 고려할 경우 단주기 운동 방정식은 적분기 내부 상태 변수를 덧붙여 다음과 같이 표현된다[9].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -U_0 Z_a/g & 0 \\ 0 & Z_a & 1 \\ 0 & M_a & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{\delta e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (27)$$

여기에서  $x$ 는 적분기의 내부 상태 변수를 뜻한다. 따라서 그림 1의 제어 시스템은 시스템 (27)에 대해 상태피드백 제어계를 설계하는 것이 되며 결과적으로 LMI를 이용한 극점 배치 기법을 적용할 수 있다.

4. 변수 불확실성과 다극점(polytopic) 모델

고기동 항공기의 질량 중심 위치는 연료의 소모량과 장착된 무기체계 등에 따라 변하므로 제어 시스템은 질량 중심 변화로 인한 불확실성에 대해 강인하게 설계되어야 한다. LMI에 기초한 극점 배치 기법을 적용하기 위해서는 앞서의 단주기 운동으로 표현된 시스템을 다극점 모델로 표현하여야 한다. 질량 중심의 변화가 피치 강성도(stiffness)에 주는 영향을 검토하면 피치 모멘트  $C_m$ 은 다음과 같은 식으로 표현된다[10].

$$C_m = C_{m(re)} + \frac{\Delta x_{cg}}{c} C_z \quad (28)$$

이때 이러한 질량 중심의 변화에 의해 시스템의 파라미터  $M_u, M_a, M_q, M_{\delta e}$ 가 영향을 받음을 알수 있다. 이때,  $C_{z_u}, C_{z_\alpha}, C_{z_q}$ 는  $C_{z_\alpha}$ 에 비해 그 크기가 무시할 만큼 작으므로 여기에서는 질량 중심의 변화를  $M_a$ 에 대해서만 고려하였다. 모델 설계에 있어 질량 중심의 위치는 공칭 위치에서 앞쪽으로 9%, 뒤쪽으로 5%로 전체 14% MAC(mean Aerodynamic Chord)범위 내에서 변화하는 것으로 가정한다.

5. Takagi-Sugeno 퍼지 모델

앞서 기술한 항공기 종축 단주기 운동 방정식들은  $H \in [10kt, 30kt]$ , 마하수  $M_\infty \in [0.6, 0.95]$ 의 비행영역에서 4개의 설계점을 선택해 구성된다. 설계점은 임의의 비행 조건에서의 비선형 운동식을 표현하는 퍼지 모델을 얻기 위해 전체 비행 범위의 각 극점으로 선택하였다. 개인 스케줄링은 Takagi-Sugeno 퍼지 모델을 사용하여 수행한다. 퍼지 모델은 다음과 같이 표현된다.

규칙  $i$ : 만약  $H$ 가  $M_{1j}$ 이고  $M_\infty$ 가  $M_{2k}$ 이면

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

$$i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2$$

마찬가지로 PDC 제어기는 다음과 같이 표현된다.

규칙  $i$ : 만약  $H$ 가  $M_{1j}$ 이고  $M_\infty$ 가  $M_{2k}$ 이면

$$u(t) = -K_i z(t)$$

$$i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2$$

이때  $\sum_{i=1}^4 w_i(t) = 1$  이므로 퍼지 제어기는 다음 식으로 나타내어진다.

$$u(t) = -w_1 K_1 x(t) - w_2 K_2 x(t) - w_3 K_3 x(t) - w_4 K_4 x(t) \quad (29)$$

6. CEALM 설계

CEALM을 위한 비용 함수는 제어 입력과 응답 오차의 시간 적분 평균을 최소화하는 것으로 선택한다.

$$F(K) = \sum_{m=1}^4 [c_f \max|\delta_{e,m}|] + \int_{t_0}^{t_f} x(N_{z,m} - N_{z,c,m}) dt \quad (30)$$

여기에서  $K = [K_1, K_2, K_3, K_4], K_m = [K_{i_m}, K_{\alpha_m}, K_{q_m}]$   $1 \leq m \leq 4$  이다. 제어 입력에 대해서는  $c_f = 5$ 의 가중치를 주었고 응답 오차에 대해서는 정상상태 오차를 없애기 위해 시간에 따라 선형으로 증가하는 가중치를 주었다. 그리고 구속 조건  $G(K)$ 는 설계 요구 조건을 고려하여 다음과 같이 정하였다.

$$G_1 = c_1 T(K, P) < 0$$

$$G_{2 \sim 5} = c_2 M_{D_m}(K_m, X_m) < 0$$

$$G_{6 \sim 9} = c_3 (\underline{w}_m - w_{sp_m}) < 0$$

$$G_{10 \sim 13} = c_4 (w_{sp_m} - \bar{w}_m) < 0$$

$$G_{14 \sim 17} = c_5 (2\zeta_m w_{sp} - w_{i_m}) < 0$$

$$G_{18 \sim 21} = c_6 (y_m + 3/5 x_m - 2.8) < 0$$

여기에서  $k=1,2$  이고  $m=1,2,3,4$ 이며,  $x$ 와  $y$ 는 각각  $q_{peak}/q_{ss}, \Delta \theta_{peak}/q_{ss}, \bar{w}, \underline{w}$ 는 MIL Spec.에서 요구하는 최대, 최소 극점, P는 (19)의 안정성 조건을 만족하는 양한정 행렬을 나타낸다.  $G_1$ 은 (19)에 주어진 Takagi-Sugeno 퍼지 모델의 이차 안정 구속 조건이다.  $G_{2 \sim 5}$ 는 (4)에 주어진 각 설계점에서의 LMI 극점 배치 D-안정화 구속 조건을 나타낸다. 강인 안정성과 성능 요구조건을 만족하기 위해 원반형과  $q=0, r=25, \theta=55^\circ$ 인 부채꼴의 공통 영역을 LMI 영역으로 한다. 이를 그림 그림

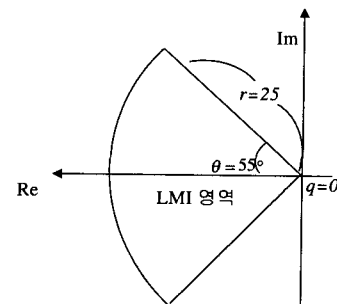


그림 3. LMI 영역.  
Fig. 3. LMI region.

3에 도시하였다.  $G_{6-17}$ 는 단주기 극점과 적분 극점의 배치 요구 조건이다.  $G_{18-21}$ 는  $q$ 와  $\theta$  응답에 관계되는 조건으로 극점 배치 요구 조건과 함께 MIL Spec.을 만족하는 HQ요구 조건이다. 각각의 구속 조건에 대한 가중치는  $c_1 = c_2 = 1000, c_3 = \dots = c_6 = 10$  으로 주었다.

CEALM을 적용하기 위한 구속 조건들과 비용 함수에 대해 게인  $K$ 와 라그랑지안 변수  $\lambda$ 에 대한 함수인 라그랑지안 함수는 벌칙 매개변수  $\rho=1000$ 에 대해 구성하였다. 게인 매개변수  $K(X)$ 를 최소화 파라미터  $X$ 로 설정하고 라그랑지안 변수  $\lambda(Y)$ 를 최대화 파라미터  $Y$ 로 선정한 후 공진화 알고리즘을 적용하였다. 이때 제어 게인은 극점이 LMI영역에 위치하기 위한 크기와 부호를 고려하여 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned} 0 &\leq K_i \leq 100 \\ -300 &\leq K_a \leq 0 \\ -100 &\leq K_q \leq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

무작위로 선정된 부모 집단과 자손 집단의 초기값에 대해 돌연변이와 재결합을 위한 진화는 진화 전략 (evolutionary strategy)을 사용하였고  $(\mu, \lambda)$ -선택 기법 [11]을 이용하였다.

이상의 CEALM 성능 확인을 위하여 단주기 근사 모델을 사용한 시뮬레이션을 수행하였다. 수직 가속도 명령은  $N_{z,com}=2$ 의 크기를 0.5초부터 4.5초까지 스텝으로 주었고 설계된 제어기의 명령 추종이 이루어지는지 확인하였다. (30)에 주어진 성능 지수는  $t_0=1$ 초,  $t_f=4.3$ 초로 잡았다. 이는 정상상태 오차를 주로 고려하고 전이 성능(transient performance)은 가격 함수에 포함하지 않기 위함이다. CEALM을 위한 시뮬레이션 조건은 표 1에 주어지 있다.

표 1. CEALM의 시뮬레이션 조건.

Table 1. Parameter values for CEALM.

No. of minimizing variable (X)	12
No. of maximizing variable (Y)	21
No. of parent population ( $\mu$ )	7
No. of offspring population ( $\lambda$ )	40
No. of maximum generation	150

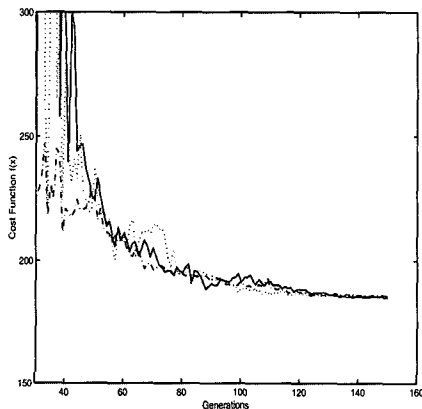


그림 4. CEALM의 비용 함수 수렴.

Fig. 4. Evolution of cost function for CEALM.

제어 게인이 LMI 안정 구속 조건  $G_1, G_2$ 를 만족하는지 검토하기 위해 MATLAB의 control toolbox[12]를 이용한 컨벡스(convex) 프로그램 알고리즘이 각 진화 과정에서 수행되도록 하였다. 또한 표 1에 주어진 조건에 따라 3회의 반복 수행을 통해 초기조건이 달라짐에 따른 영향을 분석하였다. 그림 4는 3번의 수행결과에 대한 비용함수의 수렴성능을 보여주고 있다.

여기에서 CEALM은 초기치에 관계없이 항상 일정한 값으로 수렴함을 볼 수 있다. 여기에서 구한 최적해는  $F^*=185.3078$ 이고 수렴된 게인 값들은 표 2에 명시하였다. (19)에 주어진 Takagi-Sugeno 퍼지 모델을 안정화하는 양한정 행렬  $P$ 는 다음과 같다.

$$P=10^4 \begin{bmatrix} 0.0487 & -0.2386 & -0.0088 \\ -0.2386 & 2.5365 & 0.0684 \\ -0.0088 & 0.0684 & 0.0141 \end{bmatrix} \quad (32)$$

표 2. CEALM으로 최적화된 게인.

Table 2. Optimal gains of best fitness.

H(kft)	$M_\infty$	$K_i$	$K_a$	$K_q$
10	0.6	33.5042	-260.9197	-45.9536
10	0.95	12.8329	-203.9264	-24.2173
30	0.6	42.2539	-281.9807	-93.9266
30	0.95	22.3359	-233.2337	-37.0422

7. 선형 시뮬레이션

앞 절에서 단주기 근사 모델과 CEALM을 이용해 얻은 최적 제어 게인을 이용하여 (21)에 주어진 선형 모델에 대한 시뮬레이션을 수행하였다. 비행조건이  $H=10kft, M_\infty=0.6$ 인 상황에서 크기  $N_{z,com}=2$ 인 스텝 입력을 0.5초부터 4초간 가하였고 무게 중심의 불확실성은 4절에서와 같이 14% MAC범위로 가하였다. 이에 대한 시간 응답을 그림 5에 도시하였다. 제어입력에 대한 응답은 그림 7의 비선형 시뮬레이션 응답 결과와 같아 도시하지 않았다. 공진화 알고리즘을 이용한 설계 결과 모든 구속 조건을 만족하고 있음을 확인하였으며, 단주기 근사 모델만을 고려한 종축 제어계 설계가 효과적으로 이루어졌음을 알 수 있다. 다른 설계점에서도 설계 요구 조건에 부합하는 응답을 얻을 수 있음을 아울러 확인하였다. 또한, 무게 중심의 변화에 따른 불확실성이 존재하는 경우에도 LMI 강인 극점 배치 기법을 사용하여 강인한 결과를 나타냈다. 표 3은 설계 결과 얻은 각 설계점에서의 안정도 여유를 나타낸다.

8. 비선형 시뮬레이션

이 장에서는 설계된 제어 시스템을 비선형 모델을 사용하여 시뮬레이션 결과를 보였다. 그림 6은 종축의 비선형 시뮬레이션을 위한 블록선도이다. 사용한 비선형 운동방정식은 다음과 같다.

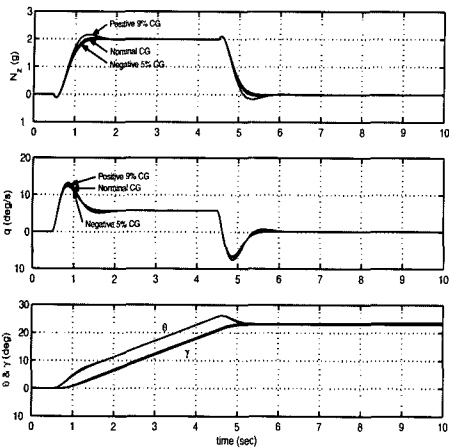


그림 5. 선형 시뮬레이션 시간응답(  $H=10kft$  ,  $M_{\infty}=0.6$  ).  
 Fig. 5. Time responses(  $H=10kft$  ,  $M_{\infty}=0.6$  ).

표 3. 최적화된 안정도 여유.  
 Table 3. Stability margins.

H(kft)	$M_{\infty}$	GM (dB)	PM (deg)
10	0.6	12.18	63.25
10	0.95	13.82	65.75
30	0.6	16.46	67.54
30	0.95	12.95	64.13

$$\begin{aligned} X &= m(\dot{U} + W\dot{q}) \\ Z &= m(\dot{W} - U\dot{q}) \\ M &= I_y \dot{q} \end{aligned}$$

대기 모델은 참고문헌 [13]의 표준 대기 모델을 사용하였다. 퍼지 제어기는 PDC 제어를 적용하여 실시간으로 매개변수(  $[H M_{\infty}]$  )를 측정하여 스케줄링 되도록 하였다. 엘리베이터는 위치(  $[-30^{\circ} 30^{\circ}]$  )와 변화율(  $[-60^{\circ}/sec 60^{\circ}/sec]$  )에 대한 제한조건을 두고 시상수가 20인 일차 모델이라 가정하였다.

$H=20$  kft이고  $M_{\infty}=0.6, 0.8, 0.95$ 인 비행 조건에서 시뮬레이션 하였고 그림 7에  $M_{\infty}=0.6$ 일 때의 결과를 도시하였다. 종방향 가속도 명령은 수평 비행 트림 조건에서 출발하여 0.5초부터 3초간 2g의 크기만큼 더해준 후에 다시 초기 트림조건으로 회복하는 것으로 주었다. 그림 7의 시간 응답을 볼 때, 설계된 제어기는 비선형 모델을 사용하는 경우에도 만족할 만한 성능을 보여줌을 확인할 수 있다. 퍼지 제어기에 의한  $N_z$  응답도 만족할 만한 명령 추종 성능을 보이며 고려한 모든 비행 조건에서 비슷한 정도의 결과를 보여주었다. 또한 매개변수 불확실성에 대한 강인성을 증명하기 위해 CG변화에 대한 시뮬레이션 결과도 함께 도시하였다. CG의 변화는 선형 시뮬레이션에서의 조건과 같다. 결과를 보면 선형 시뮬레이션의 경우와 비슷하게 CG 변화에 대해 강인함을 확인할 수 있다.

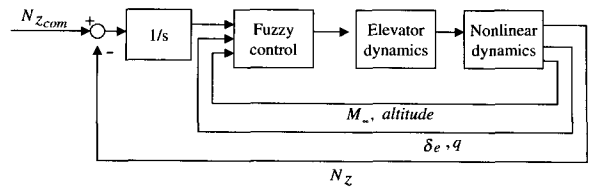
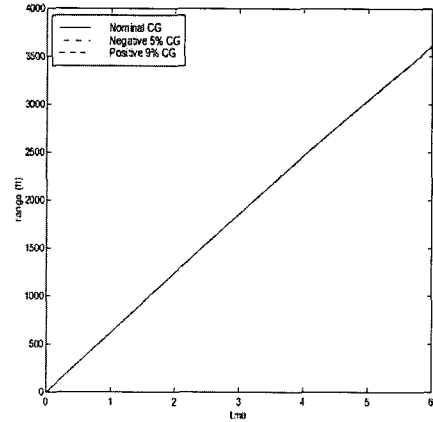
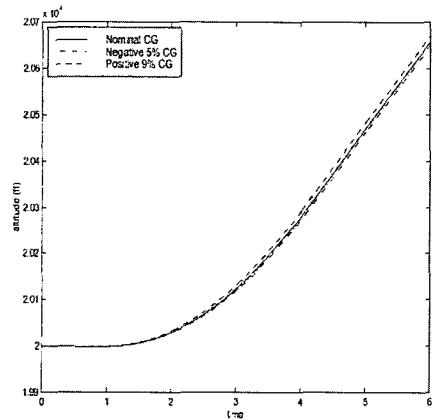


그림 6. 비선형 시뮬레이션 블록 선도.

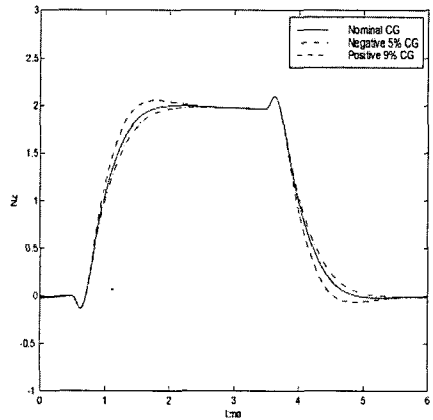
Fig. 6. SIMULINK block for nonlinear simulation.



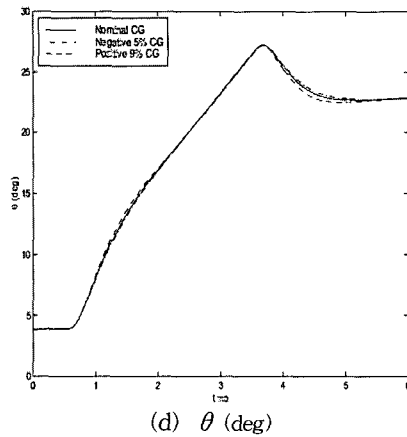
(a) range



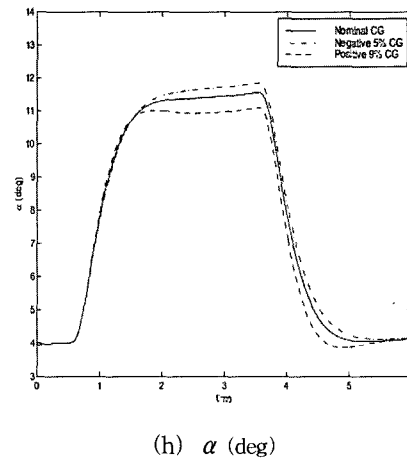
(b) altitude



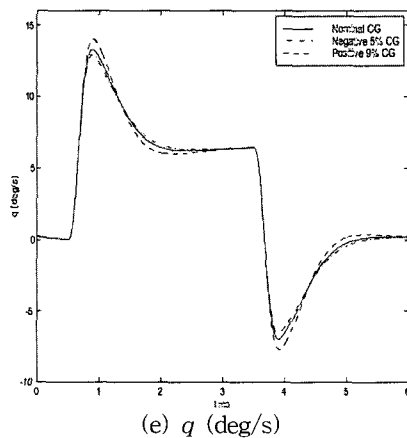
(c)  $N_z$



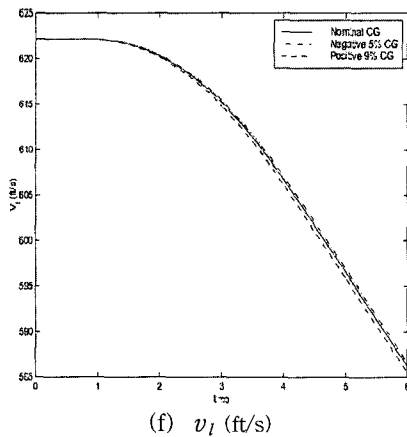
(d)  $\theta$  (deg)



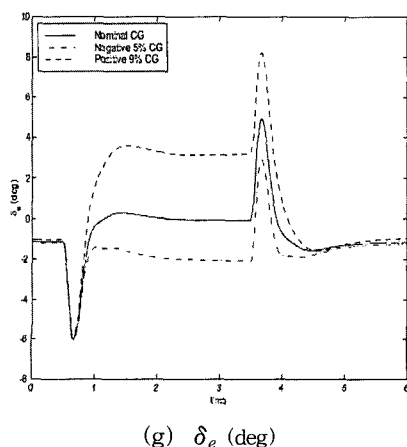
(h)  $\alpha$  (deg)



(e)  $q$  (deg/s)



(f)  $v_1$  (ft/s)



(g)  $\delta_e$  (deg)

그림 7. 비선형 시뮬레이션 결과 ( $H = 20$  kft,  $M_\infty = 0.6$ ).

Fig. 7. Nonlinear simulation results ( $H = 20$  kft,  $M_\infty = 0.6$ ).

### VI. 결론

본 논문에서 제안한 강인 계인 스케줄링 제어기의 장점은 공진화 알고리즘과 LMI 구속 조건을 조합하여 스케줄링된 시스템의 강인 안정성과 성능을 만족하는 제어계 설계가 가능 하다는데 있다. 또한 제어 구조가 고전 계인 스케줄링 기법에 바탕을 두고 있어서 제어기가 복잡하지 않고, 강인 안정성과 성능을 고려하여 고전 기법에 비해 큰 계인을 갖는 다른 기법들의 단점을 극복하여 계인 스케줄링 문제에 폭넓게 이용될 수 있다.

### 참고문헌

- [1] J. F. Shamma and M. Athans, "Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants," *Automatica*, vol. 27, pp. 559-564, 1991.
- [2] J. F. Shamma and M. Athans, "Analysis of gain scheduled control of nonlinear plants," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 8, 1970.
- [3] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-848, 1989.
- [4] P. Apkarian and P. Gahinet, "A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 5, pp. 853-864, 1995.
- [5] M. Chilali and P. Gahinet, " $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1996.
- [6] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of



systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems Man Cybernet*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.

- [7] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stability,  $H_\infty$  control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, 1996.
- [8] M. J. Tahk and B. C. Sun, "Co-evolutionary augmented lagrangian methods for constrained optimization", to appear in *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*.

- [9] B. L. Stevens and F. L. Lewis, "Aircraft control and Simulation", Wiley Interscience, 1992.
- [10] G. F. Franklin and J. D. Powell, "Feedback control of dynamic systems", Addison Wesley, 1994.
- [11] T. Bäck, "Evolutionary algorithms in theory and practice", Oxford University Press, 1996.
- [12] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, "The LMI control toolbox," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 2038-2041, 1994.
- [13] A. M. Kuethe and C. Y. Chow, "Foundation of aerodynamics", John Wiley & Sons, pp. 518, 1986.



지 호 선

1977년 8월 12일 청주 출생. 1999년 한국과학기술대학교 항공우주공학과 졸업(B.S). 1999-현재 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공 석사과정.



구 근 모

1975년 3월 27일 일본 센다이현 출생. 1998년 한국과학기술대학교 항공우주공학과 졸업(B.S). 2000년 한국과학기술원 기계공학과 (M.S.)



이 훈 구

1992년 한국과학기술원 물리학과 졸업(학사), 1994년 동 대학원 항공우주공학과 석사. 1999년 동 대학원 항공우주공학과 박사. 1999년 4월 ~ 2000년 3월, 조지아 공과 대학(Georgia Institute of Technology)항공우주공학과 방문 연구원(Visiting Research Scholar). 2000년 5월 ~ 현재, (주)썬트렉아이 선임연구원. 관심분야는 인공위성 및 비행체의 자동제어 및 응용, 표적 추적 필터링, 신경회로망을 이용한 비선형적응제어, 진화 알고리즘을 이용한 최적화.



탁 민 제

1976년 서울대학교 항공공학과 졸업. 1983년 Univ. of Texas at Austin 석사. 1986년 Univ. of Texas at Austin 박사. 1976년 ~ 1981년 국방과학연구소 연구원. 1986년 ~ 1989년 미국 Integrated Systems, Research Scientist. 1989년 ~ 현재 KAIST 항공우주공학과 교수.



홍 성 경

1987년 연세대 기계공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), Texas A&M Univ. 기계공학 박사(1998). 1989년~2000 국방과학연구소 선임연구원. 현재 세종대학교 기계항공우주공학부 조교수. 관심분야는 지능제어, 강건제어 및 센서응용.