

목적함수를 고려한 이산 비선형 시스템의 반복 학습 제어

Iterative Learning Control for Discrete Time Nonlinear Systems Based on an Objective Function

정 구 민, 최 종 호, 장 태 정

(Gu-Min Jeong, Chong-Ho Choi, and Tae-Jeong Jang)

Abstract : In this paper, a new iterative learning control scheme for discrete time nonlinear systems is proposed based on an objective function consisting of the output error and input energy. The relationships between the proposed ILC and the optimal control are described. A new input update law is proposed and its convergence is proved under certain conditions. In the proposed update law, the inputs in the whole control horizon are updated at once and considered as one large vector. Some illustrative examples are given to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords : iterative learning control, nonlinear systems, objective function

I. 서론

1984년 Arimoto 등 [1]이 반복 학습 제어 기법을 국제 학회에 발표한 이후 최근까지 관련된 수많은 논문들이 발표되고 있다 [2][10]. 반복학습 제어는 유한한 시간 구간에 대하여 원하는 출력 궤적과 실제 출력 궤적 사이에 발생한 오차를 이용하여 다음 시행시의 입력을 수정해주는 과정을 반복적으로 시행함으로써 시스템의 원하는 출력 궤적을 정확히 추종하게 하는 입력을 구해내는 제어 기법이다.

이러한 반복 학습 제어는 출력 오차로 이루어지는 목적 함수의 최소화와 밀접한 관계가 있으며 반복 학습 제어와 최적 제어에 관한 연구들 [6][10]도 이루어지고 있다. Amann 등 [8]은 매 시행 시의 입력 차이와 출력 오차로 이루어지는 목적함수를 가지는 반복학습제어를 제안하였으며 이에 기반하여 수렴성을 증명하였다. [8]의 결과는 [6][7]의 결과와 밀접한 관계가 있다. 위의 방법들에 의하여 수렴한 입력들은 출력 오차를 0으로 만드는 입력이 된다.

출력 오차를 0으로 하는 경우에는, 예를 들어 비최소 위상 시스템과 같이, 입력의 크기가 매우 커지는 경우가 있다. 이런 경우에는 목적함수에 출력 오차항 뿐만 아니라 입력의 크기를 더해주는 것이 필요하게 된다. 출력 오차를 최소화 하면서도 입력의 크기를 작게 만드는 것이 필요하다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 입력과 출력 오차로 이루어지는 목적함수에 기반한 반복학습 제어가 제시되었다 [9][10].

Choi 등 [9]은 연속시간 시스템에 대하여 출력 오차와 입력으로 주어지는 목적함수에 기반한 반복학습 제어를 제시하였으며 최적제어와의 관계를 설명하였다.

Frueh 등 [10]은 선형시스템에 대하여 LQL (Linear Quadratic Learning) 방법을 제시하고 모델링 오차가 존재 하더라도 출력오차와 입력으로 이루어지는 목적함수를 기저함수를 통하여 최소화 할 수 있는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 주어진 구간내의 출력 오차와 입력으로 이루어지는 목적함수에 기반한 반복학습제어를 이산 비선형 시스템으로 확장하여 제시하고 수렴성을 증명한다.

본 논문에서는 구간 내의 입력을 한꺼번에 갱신하는 새로운 입력 갱신식을 이산 비선형 시스템에 대하여 제시한다. 제시한 반복학습 제어의 수렴성을 λ -노름에 기반하여 증명하며 최적제어에 의한 해와의 관계를 기술한다. 비선형 비최소 위상 시스템에 대한 모의 실험을 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 논문에서 해결하려는 문제를 설명하고 3절에서는 새로운 입력 갱신식을 제시하고 수렴성을 증명한다. 4절에서는 제시된 방법과 최적제어와의 관계를 증명하며 5절에서는 모의 실험을 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다. 6절에서는 결론을 맺는다.

II. 문제의 설정

다음과 같은 이산 시간 비선형 단일 입출력 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= f(x(i)) + g(x(i))u(i), \\ y(i) &= h(x(i)), \end{aligned} \quad (1)$$

단, $u \in \mathbb{R}^1$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, 그리고 $y \in \mathbb{R}^1$ 는 플랜트 입력, 시스템의 상태변수, 그리고 플랜트 출력을 각각 나타낸다. f , g , 그리고 h 는 각각 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ 그리고 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ 인 해석가능한 함수이다.

시스템의 상대차수(relative degree) r 은 [12]에서 연속시간에 대하여 정의되어 있으며 이산시간에 대하여는 [11]에 characteristic number ρ 로 정의되어 있다. 여기서는 상대차수 $\sigma = \rho + 1$ 를 사용하기로 한다. 이것은 입력과 출력의 시간차이로 정의되는 선형시스템의 경우와 부합한다.

앞으로 학습의 시행 횟수를 표시하기 위해 윗첨자 k 를 사용하기로 한다. 따라서 $x^k(i)$, $y^k(i)$ 및 $u^k(i)$ 는 k 번째 시행시의 각각의 벡터를 나타낸다. 그리고 앞으로 사용하기 위해 다음과 같은 몇 가지 기호들과 정의를 기술한다.

먼저 n차원의 벡터 $x=[x_1, \dots, x_n]^T$ 에 대하여 벡터 2-노름(norm)을 $\|x\|$ 로 나타내고 $n \times m$ 행렬 $W=\{w_{ij}\}$ 에 대하여 벡터 노름에서 유도(induced)된 행렬 노름을 $\|W\|$ 로 나타낸다. 또한 함수 q 에 대하여 λ -노름을 $\|q(i)\|_\lambda = \sup_{i \in [0, N-1]} \lambda^i \|q(i)\|$ 와 같이 정의한다.

시스템의 상대차수를 σ 라 할 때 시스템의 입력은 구간은 $[0, N-1]$ 에서 갱신되며 갱신을 위하여 사용되는 고려되는 출력 시간 구간은 $[\sigma, \sigma+N-1]$ 이다. 제안하는 갱신식은 구간 $[0, N-1]$ 에서 한꺼번에 입력을 갱신하기 때문에 구간을 $[0, \sigma+N-1]$ 로 한정할 경우 증명상의 어려움이 있다. 이를 해결하기 위하여 구간 $[0, \sigma+2N-2]$ 에서 입력과 출력을 생각하며 구간 $[i, i+N-1], i \in [0, N-1]$ 에서의 입력을 하나의 큰 벡터로 생각하여 증명한다. $N-1$ 이후의 입력은 증명을 위하여만 필요하며 실제의 입력은 $[0, N-1]$ 에서 갱신된다. 표기를 쉽게 하기 위하여 $y_\sigma(i) = y(i+\sigma)$ 로 두고 $u(i), y_\sigma(i)$ 와 $x(i)$ 를

$$\begin{aligned} u(i) &= [u(i), \dots, u(i+N-1)]^T, \\ y_\sigma(i) &= [y_\sigma(i), \dots, y_\sigma(i+N-1)]^T, \end{aligned}$$

$x(i) = [x(i), \dots, x(i+N+\sigma-1)]^T$ 로 정의한다.

시스템 (1)에 대하여 다음과 같이 가정하자.

가정 1 : 시스템 (1)의 상대차수는 $\forall (x(i), u(i)) \in R^n \times R^l, i \in [0, 2N+\sigma-2]$ 에서 σ 로 잘 정의된다.

가정 2 : 시스템의 원하는 출력 궤적 $y_\sigma^d(i), i \in [0, N-1]$ 이 주어진다. 또한 증명을 위하여 어떤 상수 c_i 에 대하여 $y_\sigma^d(i) = c_i, i \in [N, 2N-2]$ 로 가정한다.

주 : $y_\sigma^d(i) = c_i, i \in [N, 2N-2]$ 는 증명을 위하여만 필요한 값들이며 실제 입력의 갱신에는 사용되지 않는다. 입력 $u(i), i \in [N, 2N-1]$ 은 출력 $y_\sigma(i), i \in [0, N-1]$ 에 영향을 주지 않는다. 따라서 이구간의 입력은 0으로 둔다. 이구간의 입력도 마찬가지로 증명을 위하여만 필요한 값이다.

$$u(i) = 0, \quad \forall i \in [N, 2N-2] \quad (2)$$

가정 3 : 함수 f, g 와 h 는 정의되는 영역에서 해석 가능하다.

가정 4 : 가정 2에서 주어진 원하는 출력 궤적 $y_\sigma^d(i), i \in [0, N-1]$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 $u^*(0)$ 가 유일하게 존재한다.

$$S(x^*(0))(y_\sigma^d(0) - y_\sigma^*(0)) - \Lambda(0)u^*(0) = 0 \quad (3)$$

여기서 S 는 상삼각 행렬이며 Λ 는 대각 행렬이다. 각각은 입력 갱신식에 사용되며 목적함수와 관련이 있다.

가정 5 : 시스템 (1)에 대하여 Φ 는 $(x(0), u(i), i \in [0, 2N-2])$ 에서 $x(i), i \in [0, 2N+\sigma-2]$ 로의 사상이라고 하고 Ψ 는 $(x(0), u(i), i \in [0, 2N-2])$ 에서 $y(i), i \in [0, 2N+\sigma-2]$ 로의 사상이라고 하자. 각각의 $x(0)$ 에 대하여 입력-상태 사상인 Φ 와 입력-출력 사상인 Ψ 는 일대일 대응이다.

가정 6 : $U \subset R^m$ 가 유계의 (bounded) 입력 공간이라고

하자. 주어진 $y_\sigma^d(i), i \in [0, N-1]$ 와 초기조건 $x(0)$ 에 대하여 $U \times U \times \dots \times U$ 안의 입력으로 생성된 상태변수 $x(i) \in X, i \in [0, 2N+\sigma-2]$ 인 컴팩트 집합 $X \subset R^n$ 가 존재한다. 따라서 모든 $x(i) \in X$ 인 컴팩트 집합 X 가 존재한다.

본 논문에서 풀고자 하는 문제는 다음과 같다.

문제 : 시스템 (1)에 대하여, 반복학습의 과정을 통하여 출력 오차 $y^*(i) - y(i), i \in [0, N+\sigma-1]$ 를 임의의 작은 상수 ϵ_1 보다 작게 할 수 있는 즉

$$\|y^*(i) - y(i)\| \leq \epsilon_1, \quad \forall i \in [0, N+\sigma-1]$$

를 만족하는 입력 $u^*(i), i \in [0, N-1]$ 를 구하라.

여기서 $u^*(i)$ 와 $y^*(i)$ 는 (3)을 만족한다.

III. 입력 갱신식 및 수렴성의 증명

일반적으로 반복학습제어에서의 입력 $u(i)$ 는 출력 $y(\sigma+i)$ 로부터 갱신된다. 본 논문에서는 전체의 시간구간을 고려하여 한꺼번에 입력을 갱신하도록 한다. 제시하는 방법과 최적제어와의 관련성은 다음 절에서 설명하도록 한다.

제시하는 입력 갱신식은 다음과 같다.

$$u^{k+1}(0) = (I - \Lambda(0))u^k(0) + S(x^k(0))(y_\sigma^d(0) - y_\sigma^k(0)) \quad (4)$$

여기서 $\Lambda(0)$ 는 입력의 가중치를 나타내고 S 는 학습이득 행렬을 나타낸다.

(4)의 입력 갱신식에 기반하여 $u^k(0)$ 가 (3)의 $u^*(0)$ 에 수렴함을 보인다. 만약 S^k 가 상수 행렬이면 즉 $S^k = S$ 이면 시간구간 $[0, N+\sigma-1]$ 에서 수렴성의 증명이 가능하다. 그러나 만약 S^k 가 상수함수가 아니면 증명이 매우 어려워지게 되며 이러한 어려움을 해결하기 위하여 본 논문에서는 시간구간 $[0, 2N+\sigma-2]$ 를 고려하는 방법을 제시한다. 시간구간 $[N+\sigma, 2N+\sigma-2]$ 는 증명을 위하여만 필요한 구간이다. 일반적인 반복학습제어에서 $u^k(i)$ 가 $u^*(i)$ 에 수렴하는 것을 증명하는 것과 같이 제시하는 입력 갱신식을 통하여 $u^k(i)$ 가 $u^*(i)$ 에 수렴하는 것을 증명한다. 따라서 $S(i)$ 와 $\Lambda(i)$ 가 정의될 필요가 있다. 표기의 간편성을 위하여 $S(x(i))$ 대신에 $S(i)$ 를 사용하기로 한다. $S(i)$ 와 $S(0)$ 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} S_{11}(i) & \dots & S_{1,N-i}(i) & S_{1,N-i+1}(i) & \dots & S_{1,N}(i) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{N-i,N-i}(i) & S_{N-i,N-i+1}(i) & \dots & S_{N-i,N}(i) \\ \vdots & \ddots & \vdots & S_{N-i+1,N-i+1}(i) & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & 0 & \dots & S_{N,N}(i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{i+1,i+1}(0) & \dots & S_{i+1,N}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{N,N}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

또한 $\Lambda(i)$ 의 원소는 $\Lambda(0)$ 의 원소로 이루어진다.

$$\begin{aligned} \Lambda(i) &= \text{diag}[\Lambda_1(i), \dots, \Lambda_{N-1}(i), \Lambda_{N-i+1}(i), \dots, \Lambda_M(i)] \\ &= \text{diag}[\Lambda_{i+1}(0), \dots, \Lambda_M(0), \varepsilon I, \dots, \varepsilon I] \end{aligned}$$

여기서 ε 은 충분히 작은 상수이며 증명을 위하여 필요한 값이다.

먼저 (2)와 (4)에서부터 $\mathbf{u}^{k+1}(i)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1}(i) &= [u^{k+1}(i), u^{k+1}(N-1), 0, \dots, 0]^T \\ &= (I - \Lambda(i)) \mathbf{u}^k(i) + S(\mathbf{x}^k(i)) (\mathbf{y}_\sigma^d(i) - \mathbf{y}_\sigma^k(i)). \end{aligned} \quad (5)$$

Lemma 1에서는 $i=1, 2, \dots, N-1$ 에 따라서 (3)과 같은 관계식이 성립함을 보인다.

Lemma 1 : 이산 비선형 시스템 (1)과 시스템의 원하는 궤적 y^d 가 가정 1 - 가정 6을 만족한다고 하자. 만약 $u^*(j)$, $j \leq i-1$ 이 결정되어 있으면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$S(\mathbf{x}^*(i)) (\mathbf{y}_\sigma^d(i) - \mathbf{y}_\sigma^*(i)) - \Lambda(i) \mathbf{u}^*(i) = 0 \quad (6)$$

증명 : 부록 1

다음의 Lemma 2는 중간값의 정리에 의하여 출력 오차 $y_\sigma^*(i) - y_\sigma^k(i)$ 를 초기상태의 오차 $\delta x^k(i)$ 와 $\mathbf{u}^k(i)$ 로 나눌 수 있음을 보인다.

Lemma 2 : 이산시간 비선형 시스템 (1)에 대하여 상대 차수가 σ 라 하자. 중간값의 정리에 의하여 출력 오차는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y_\sigma^*(i) - y_\sigma^k(i) &= [A^{k_1}(i), A^{k_2}(i), \dots, A^{k_N}(i)] \delta x^k(i) \\ &+ \begin{bmatrix} J_{11}^k(i) & 0 & \dots & 0 \\ J_{21}^k(i) & J_{22}^k(i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{M1}^k(i) & J_{M2}^k(i) & \dots & J_{MN}^k(i) \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^k(i) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\delta x^k(i) = x^*(i) - x^k(i)$, $\delta \mathbf{u}^k(i) = \mathbf{u}^*(i) - \mathbf{u}^k(i)$ 이고

$$\begin{aligned} A^{k_r}(i) &= h'(x(i+\sigma+p-1), \gamma^k(i+\sigma+p-1)) \\ &\times \prod_{l=2}^i \{f(x^*(i+\sigma+p-l), x^k(i+\sigma+p-l)), \\ &\times \prod_{l=1}^i \{f(x^*(i+p-l), x^k(i+p-l)) \\ &\quad + g'(x^*(i+p-l), x^k(i+p-l))u(i+p-l)\}, \\ J_{M}^k(i) &= h'(x(i+\sigma+p-1), \gamma^k(i+\sigma+p-1)) \\ &\times \prod_{l=2}^i \{f(x^*(i+\sigma+p-l), x^k(i+\sigma+p-l)), \\ &\times \prod_{l=1}^{i-q} \{f(x^*(i+p-l), x^k(i+p-l)) \\ &\quad + g'(x^*(i+p-l), x^k(i+p-l))u(i+p-l)\}, \\ &\times g(x^k(i+q-1)), \quad \text{for } p \geq q, \\ J_{M}^k(i) &= 0, \quad \text{for } p < q, \end{aligned}$$

이며 여기서

$$\begin{aligned} f(x^*(i), x^k(i)) &\equiv \begin{bmatrix} f_1(x(i), \alpha^k_1(i)) \\ \vdots \\ f_n(x(i), \alpha^k_n(i)) \end{bmatrix} \\ g'(x^*(i), x^k(i)) &\equiv \begin{bmatrix} g'_1(x(i), \beta^k_1(i)) \\ \vdots \\ g'_n(x(i), \beta^k_n(i)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_m(x(i), \alpha^k_m(i)) = f_m(\alpha^k_m(i)x^*(i) + (1 - \alpha^k_m(i))x^k(i))$$

$$g'_m(x(i), \beta^k_m(i)) = g'_m(\beta^k_m(i)x^*(i) + (1 - \beta^k_m(i))x^k(i))$$

$$h'(x(i), \gamma^k(i)) = h'(\gamma^k(i)x^*(i) + (1 - \gamma^k(i))x^k(i))$$

$$0 \leq \alpha^k_{m(i)}, \beta^k_{m(i)}, \gamma^k(i) \leq 1, \quad \forall i, k, m.$$

이다. 상대차수가 1일 때는

$J_{pp}^k(i) = h'(x(i+p, \gamma^k(i+p))) \times g(x^k(i+p-1))$ 으로 나타낼 수 있다.

증명 : 부록 2

수렴 조건은 $i=0$ 에서만 증명되면 된다. Lemma 3에서는 $i=0$ 에서 수렴 조건을 만족하면 나머지 구간에서도 수렴 조건이 만족됨을 보인다.

Lemma 3 : 이산 시간 비선형 시스템 (1)과 원하는 출력 궤적 y^d 가 가정 1-가정 6을 만족한다고 하자. 만약 다음의 조건

$$\|I - \Lambda(i) - S(\mathbf{x}^k(i)) J^k(i)\| \leq \rho < 1$$

이 $i=0$ 에서 만족되면, 이 조건들은 $i \in [0, N-1]$ 에서 항상 성립한다.

증명 : 부록 3

다음의 정리에서는 입력 갱신식 (4)에 의하여 반복학습을 할 때 수렴 조건이 만족되면 $u^*(i)$ 를 구할 수 있음을 보인다.

정리 1 : 이산 시간 비선형 시스템 (1)과 원하는 출력 궤적 $y^d(i)$ 가 가정 1 - 가정 6을 만족하고 초기 조건이 $x^k(0) = x^*(0) = x^d(0)$ 와 같이 주어져 있으며 입력 갱신식 (4)에 의하여 입력이 갱신된다고 하자. 만약 학습 이득 행렬 $S(\mathbf{x}^k(0))$ 가 다음의 조건

$$\|I - \Lambda(0) - S(\mathbf{x}^k(0)) J^k(0)\| \leq \rho < 1 \quad (8)$$

을 만족하면 $u^k(i)$ 와 $y^k(i)$ 는 $k \rightarrow \infty$ 일 때 시간구간 $i \in [0, N+\sigma-1]$ 에서 $u^*(i)$ 와 $y^*(i)$ 으로 수렴한다.

증명 : 부록 4

주 : 위의 정리에서는 2-노음이 사용되었다. ∞ -노음에 대하여도 마찬가지로 증명할 수 있다.

주 : 시간구간 N 이 1이거나 $S^k(0)$ 이 대각행렬이면 정리 1은 Choi 등 [9]의 결과를 이산시간으로 바꾼 것과 동등하다. 만약 $\Lambda=0$ 이면 정리 1은 Jang 등 [5]의 결과와 같다.

주 : 기존의 방법에 의하여 비최소 위상 시스템의 출력 추종 문제를 풀 때 주어진 출력을 추종하는 입력은 매우 커질 수 있다. 적당한 Λ 와 N 을 선택한 후 제안된 방법

에 의하여 입력을 갱신할 경우 크기가 작은 입력을 얻을 수 있다.

IV. 반복학습제어와 목적함수의 최소화

정리 1의 결과와 목적함수와의 관계를 살펴보기로 한다. 다음의 목적함수를 생각하자.

$$V_0 = \frac{1}{2} [y_o^d(0) - y_o(0)]^T Q(0) [y_o^d(0) - y_o(0)] + \frac{1}{2} u(0)^T R(0) u(0) \tag{9}$$

$$Q = \text{diag}[Q(0), \dots, Q(N-1)],$$

$$R = \text{diag}[R(0), \dots, R(N-1)].$$

여기서 $Q(i) \geq 0, R(i) \geq 0$. $u^*(0)$ 와 $y_o^*(0)$ 가 시스템 (1)의 목적함수 V_0 를 최소화하는 입력이라고 하자.

목적함수 V_0 를 최소화하는 입력 $u^*(0)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial u(0)} \right|_{u(0)=u^*(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_0}{\partial u(0)} \\ \frac{\partial V_0}{\partial u(1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial V_0}{\partial u(N-1)} \end{bmatrix} = [-J^T Q [y_o^d(0) - y_o(0)] + R u]_{u^*(0)} = 0$$

정리하면

$$- [J^T]_{u^*(0)} Q [y_o^d(0) - y_o^*(0)] + R u^* = 0 \tag{10}$$

를 얻는다.

여기서

$$J^T = \begin{bmatrix} [-\frac{\partial y_o(0)}{\partial u(0)}]^T & [-\frac{\partial y_o(1)}{\partial u(0)}]^T & \dots & [-\frac{\partial y_o(N-1)}{\partial u(0)}]^T \\ 0 & [-\frac{\partial y_o(1)}{\partial u(1)}]^T & \dots & [-\frac{\partial y_o(N-1)}{\partial u(1)}]^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [-\frac{\partial y_o(N-1)}{\partial u(N-1)}]^T \end{bmatrix}$$

이다.

(10)은 최적입력 $u^*(0)$ 를 구하기 위한 필요조건이다.

정리 2 : 반복학습제어와 목적함수의 최소화

이산 비선형 시스템 (1) 과 원하는 출력궤적 $y^d(i)$ 가 가정 1 - 가정 6을 만족한다고 하자. 입력 갱신식에서 어떤 상수 η 에 대하여 $S(x^k(0)) = \eta(J^k)^T Q$, $A = \eta R$ 로 두면 정리 1에서 얻어진 입력은 목적함수 (9)를 최소화한다.

증명 : 만약 어떤 상수 c_0 에 대하여 $A(0) = c_0 R$,

$S(x^*(0)) = c_0 (J)^T Q$ 로 두면 (10)은 (3)과 같다. V_0 가 quadratic이므로 (10)을 만족하는 해가 존재한다. 가정 4로부터 (3)을 만족하는 유일한 해가 존재하므로 (3)을 만족하는 해는 목적함수를 최소화하는 유일한 해가 된다.

Steepest descent method를 이용하면, 목적함수를 최소화하는 입력은 다음 갱신식에서 얻을 수 있다.

$$u^{k+1}(0) = u^k(0) - \eta \frac{\partial V_0}{\partial u^k(0)} = u^k(0) - \eta [-(J^k)^T Q [y_o^d(0) - y_o^k(0)] + R u^k(0)].$$

만약 $A(0) = \eta R$, $S(x^k(0)) = \eta (J^k)^T Q$ 로 두면 위의 입력 갱신식은

$$u^{k+1}(0) = u^k(0) + S(0) [y_o^d(0) - y_o^k(0) - A(0) u^k(0)] = [I - A(0)] u^k(0) + S(0) [y_o^d(0) - y_o^k(0)].$$

이 되고 이 식은 (4)와 같다. 따라서 (4)를 이용하여 목적함수를 최소화하는 입력을 얻을 수 있다. ■

정리 2는 시스템이 완전하게 알려져 있을 경우 최적의 입력을 제안된 방법으로 얻어 낼 수 있음을 의미한다.

V. 모의 실험

제안된 방법의 효율성을 알아보기 위하여 다음과 같은 이산시간 비선형 비최소위상 시스템을 생각하자. 이 시스템은 [13]의 시스템을 $\Delta t = 0.04$ 로 샘플링하였다.

$$x_1(i+1) = x_1(i) + \Delta t(-x_1(i) + x_2(i))$$

$$x_2(i+1) = x_2(i) + \Delta t(-3x_2(i) + x_3(i) + (2 + \sin^2(x_4(i)))u(i))$$

$$x_3(i+1) = x_3(i) + \Delta t(x_1(i) - 2x_3(i))$$

$$x_4(i+1) = x_4(i) + \Delta t(-x_4(i) + x_3^2(i))$$

$$y(i) = x_1(i) - 3x_3(i)$$

위의 식에서 모델이 비선형 항이 없이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$x_1(i+1) = x_1(i) + \Delta t(-x_1(i) + x_2(i))$$

$$x_2(i+1) = x_2(i) + \Delta t(-3x_2(i) + 2u(i))$$

$$x_3(i+1) = x_3(i) + \Delta t(x_1(i) - 2x_3(i))$$

$$x_4(i+1) = x_4(i) + \Delta t(-x_4(i))$$

$$y(i) = x_1(i) - 3x_3(i)$$

원하는 출력궤적은 다음과 같이 주어진다.

$$y^d(i) = \begin{cases} 0.1 \times (1 - \cos(i)), & \text{if } i \in [0, 157], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

시스템의 상대차수는 2이다.

S^* 를 결정하기 위하여 시스템의 모델로부터 J^* 를 추정하고 이것을 \bar{J}^* 라고 하자. 이것을 이용하여 $S = \alpha (\bar{J}^*)^T$ 로 둔다. 수렴 조건을 만족하는지 알기 위하여는 u^* 를 알아야 하는데 알려져 있지 않으므로 J^* 를 구할 수 없다.

$$J_{\eta}^*(i) = \left. \frac{\partial y_o(i+j-1)}{\partial u(i+l-1)} \right|_{u(0)=u^*(0)}$$

을 이용하여 수렴 조건을 $\|I - A - \alpha \bar{J}^T \hat{J}\|$ 로 근사화 한다.

예제 1 : 위의 시스템에 대하여 $A = 0.001I$, $S = 10 \bar{J}^T$ 로 둔다. 시스템의 원하는 궤적은 다음과 같이 주어진다.

$$y^d(i) = \begin{cases} 0, & i \in [-286, -1] \\ 0.1 \times (1 - \cos(i)), & i \in [0, 157], \\ 0, & i \in [158, 314] \end{cases}$$

입력은 시간 $i = -286$ 에서 시작하고 전체 구간의 크기 N 은 600이다. 그림 1에는 원하는 궤적과 이에 따른 출력을 보였다. $y^*(i)$ 는 $y(i)$ 를 거의 추종하였다. 오차의 최대

값은 0.0005보다 작았다. 그림 2에는 u^* 에 해당하는 입력을 나타내었다. 완벽한 모델링이 불가능하고 J^k 의 계산이 어렵기 때문에 수렴조건이 만족하는 지를 정확히 아는 것은 매우 어렵다. 수렴 조건은 $\|I - A - S \hat{J}\|$ 를 이용하여 근사된 값을 구하였다. 이 경우에 항상 $\|I - A - S \hat{J}\| \leq 0.999$ 을 만족하였다.

그림 3에서는 목적함수가 빠르게 감소함을 알 수 있다.

예제 2 : 입력 가중치의 역할을 알기 위하여 $\Lambda = 0.1I, 0.4I$ 로 두고 $s = 10I$ 로 두었다. 그림 1과 그림 2에 각각 이에 따른 입력과 출력을 나타내었다. 그림 3은 반복 횟수에 따른 목적함수의 감소를 보여준다. 5회 이후에는 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 큰 입력 가중치에 대해서는 입력의 크기가 작아짐을 알 수 있다.

위의 결과에서 목적함수의 값은 일정값에 수렴하였으며 LQR문제에서와 같이 추종 성능은 S 와 A 의 비율에 따라 결정된다.

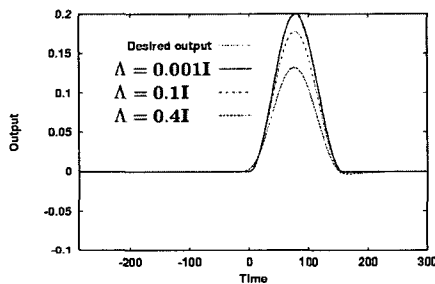


그림 1. 가중치에 따른 출력 변화.
Fig. 1. Outputs for input penalty functions.

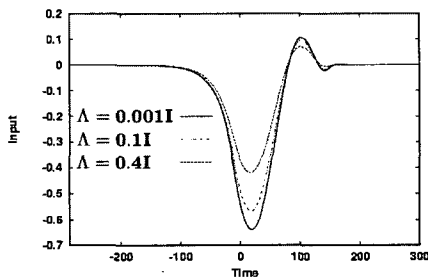


그림 2. 가중치에 따른 입력 변화.
Fig. 2. Inputs for input penalty functions.

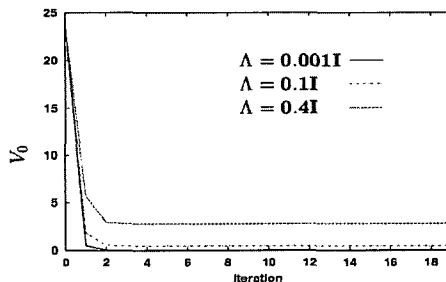


그림 3. 가중치에 따른 목적함수 값의 변화.
Fig. 3. Objective functions for input penalty functions.

VI. 결론

본 논문에서는 주어진 구간내의 출력 오차와 입력으로 이루어지는 목적함수에 기반한 반복학습제어를 이산 비선형 시스템으로 확장하여 제시하였다.

이를 위하여 구간 내의 입력을 한꺼번에 갱신하는 새로운 입력 갱신식을 제시하고 수렴성을 λ -노름에 기반하여 증명하였다.

제안된 방법과 최적제어에 의한 해와의 관계를 기술하였으며, 비선형 비최소 위상 시스템에 대한 모의 실험을 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증하였다. 제시하는 방법에서 얻어지는 해는 모델링에 따라 다르게 되며 이의 해결을 위한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operations of robots by learning," *Journal of Robotic Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.
- [2] Z. Bien and K. M. Huh, "High-order iterative learning control algorithm," *IEE Proc. Pt.-D*, vol. 136, no. 3, pp. 105-112, 1989.
- [3] T.-Y. Kuc, J.-S. Lee, and K. Nam, "An iterative learning control theory for a class of nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1215-1221, 1992.
- [4] H.-S. Ahn, C.-H. Choi, and K.-B. Kim, "Iterative learning control for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1575-1578, Nov. 1993.
- [5] T.-J. Jang, H.-S. Ahn, and C.-H. Choi, "Iterative learning control for discrete-time nonlinear systems," *Int. J. Systems Sci.*, vol. 25, no. 7, pp. 1179-1189, July, 1994.
- [6] K. Furuta and M. Yamakitai, "Iterative generation of optimal input of a manipulator," *Proc. of IEEE Robotics and Automation*, pp. 579-583, 1986.
- [7] M. Togai and O. Yamano, "Learning control and its optimality: Analysis and its application to controlling industrial robots," *Proc. of IEEE Robotics and Automation*, pp. 248-253, 1986.
- [8] N. Amann, D. H. Owens, and Eric Rogers, "Iterative learning control using optimal feedback and feedforward actions," *Int. J. Control*, vol. 65, no. 2, pp. 277-293, 1996.
- [9] C.-H. Choi, T.-J. Jang, "Iterative learning control of nonlinear systems with consideration on input magnitude," *Proc. Asian Contr. Conf.*, pp. 37-40, July, 1997.
- [10] J. A. Frueh and M. Q. Phan, "Linear quadratic optimal learning control," *Proc. of the 24th IEEE Conf. Decisio and Control*, pp. 678-683, December, 1998.
- [11] H. Nijmeijer and A. J. Van Der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-

Verlag, Berlin. 1990.

[12] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[13] S. Devasia, D. Chen, and B. Paden, "Nonlinear inversion based output tracking," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 7, pp. 930-942, July, 1996.

부록

1. Lemma 1의 증명

$i=0$ 일 때는 (3)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S(\mathbf{x}^*(0)) \begin{bmatrix} y_o^d(0) - y_o^*(0) \\ y_o^d(1) - y_o^*(1) \\ \vdots \\ y_o^d(N-1) - y_o^*(N-1) \end{bmatrix} - A(0) \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(N-1) \end{bmatrix} = 0 \quad (A.1)$$

(A.1)에서 $u^*(0)$ 가 얻어졌다고 가정하고 맨 위의 행을 제거하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$S'(\mathbf{x}^*(0)) \begin{bmatrix} y_o^d(1) - y_o^*(1) \\ y_o^d(2) - y_o^*(2) \\ \vdots \\ y_o^d(N-1) - y_o^*(N-1) \end{bmatrix} - A'(0) \begin{bmatrix} u^*(1) \\ u^*(2) \\ \vdots \\ u^*(N-1) \end{bmatrix} = 0 \quad (A.2)$$

여기서 $A'(0) = \text{diag}[A_2(0), A_3(0), \dots, A_N(0)]$ 이고

$$S'(\mathbf{x}^*(0)) = \begin{bmatrix} S_{22}(\mathbf{x}^*(0)) & S_{23}(\mathbf{x}^*(0)) & \dots & S_{2N}(\mathbf{x}^*(0)) \\ 0 & S_{33}(\mathbf{x}^*(0)) & \dots & S_{3N}(\mathbf{x}^*(0)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{NN}(\mathbf{x}^*(0)) \end{bmatrix}$$

이다.

$i=1$ 일 때, (6)은 다음과 같다.

$$S(\mathbf{x}^*(1)) \begin{bmatrix} y_o^d(1) - y_o^*(1) \\ y_o^d(2) - y_o^*(2) \\ \vdots \\ y_o^d(N) - y_o^*(N) \end{bmatrix} - A(1) \begin{bmatrix} u^*(1) \\ u^*(2) \\ \vdots \\ u^*(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (A.3)$$

(A.3)에서 맨 아래의 항은 0이다. (2)로부터 다음과 같이 정리 된다.

$$S''(\mathbf{x}^*(1)) \begin{bmatrix} y_o^d(1) - y_o^*(1) \\ y_o^d(2) - y_o^*(2) \\ \vdots \\ y_o^d(N-1) - y_o^*(N-1) \end{bmatrix} - A''(1) \begin{bmatrix} u^*(1) \\ u^*(2) \\ \vdots \\ u^*(N-1) \end{bmatrix} = 0 \quad (A.4)$$

여기서

$$A''(1) = \text{diag}[A_1(1), A_2(1), \dots, A_{N-1}(1)] = \text{diag}[A_2(0), A_3(0), \dots, A_N(0)]$$

$$S''(\mathbf{x}^*(1)) = \begin{bmatrix} S_{11}(\mathbf{x}^*(1)) & S_{12}(\mathbf{x}^*(1)) & \dots & S_{1N-1}(\mathbf{x}^*(1)) \\ 0 & S_{22}(\mathbf{x}^*(1)) & \dots & S_{2N-1}(\mathbf{x}^*(1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{N-1N-1}(\mathbf{x}^*(1)) \\ S_{22}(\mathbf{x}^*(0)) & S_{23}(\mathbf{x}^*(0)) & \dots & S_{2N}(\mathbf{x}^*(0)) \\ 0 & S_{33}(\mathbf{x}^*(0)) & \dots & S_{3N}(\mathbf{x}^*(0)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{NN}(\mathbf{x}^*(0)) \end{bmatrix}$$

따라서 (A.2)는 (A.4)와 같다. 마찬가지로 $i \in [2, N-1]$ 에서도 증명할 수 있다.

2. Lemma 2의 증명

중간값의 정리에 의하여 $x^d(i)$ 와 $x^k(i)$ 사이에 다음 식을 만족하는 $x(i, \gamma^k(i))$ 가 존재한다.

$$y^d(i) - y^k(i) = h(x^d(i)) - h(x^k(i)) = h'(x(i, \gamma^k(i)))(x^d(i) - x^k(i)).$$

또한 $x^d_1(i-1)$ 와 $x^k_1(i-1)$ 사이에 다음식을 만족하는 $x(i-1, \beta^k_1(i-1))$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} x^d(i) - x^k(i) &= f_1(x^d(i-1)) + g_1(x^d(i-1))u^d(i-1) - f_1(x^k(i-1)) - g_1(x^k(i-1))u^k(i-1) \\ &= f_1(x(i-1, \alpha^k_1(i-1)))(x^d(i-1) - x^k(i-1)) + [g_1(x^d(i-1)) - g_1(x^k(i-1))]u^d(i-1) + g_1(x^k(i-1))[u^d(i-1) - u^k(i-1)] \\ &= f_1(x(i-1, \alpha^k_1(i-1)))(x^d(i-1) - x^k(i-1)) + g'_1(x(i-1, \beta^k_m(i-1)))[x^d(i-1) - x^k(i-1)]u^d(i-1) + g_1(x^k(i-1))[u^d(i-1) - u^k(i-1)] \\ &= [f_1(x(i-1, \alpha^k_1(i-1))) + g'_1(x(i-1, \beta^k_m(i-1)))]u^d(i-1) \times \delta x(i-1) + g_1(x^k(i-1))[u^d(i-1) - u^k(i-1)] \end{aligned}$$

상대차수의 정의에 의하여 $u^*(i+j)$ 와 $u^k(i+j)$, $j \geq 1$ 은 출력 오차 $y^*(i+d) - y^k(i+d)$ 에 영향을 주지 않는다. 따라서 (7)을 얻을 수 있다.

3. Lemma 3의 증명

$\|I - A(0) - S(\mathbf{x}^k(0))J^k(0)\| \leq \rho < 1$ 이라고 가정하고 $1 - \rho < \epsilon < 1$ 인 어떤 상수 ϵ 이 항상 존재한다고 하자. 또한 $\Xi(0) = I - A(0) - S(\mathbf{x}^k(0))J^k(0)$ 로 두자. 그러면 (2)로부터 $I - A(i) - S(\mathbf{x}^k(i))J^k(i)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \Xi(i) &= I - A(i) - S(\mathbf{x}^k(i))J^k(i) \\ &= \begin{bmatrix} \Xi_0(i) & 0_{(N-d) \times i} \\ 0_{i \times (N-d)} & (1 - \epsilon)I_{i \times i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 $\Xi_0(i) = \begin{bmatrix} \Xi_{i+1, i+1}(0) & \dots & \Xi_{i+1, N}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{N, i+1}(0) & \dots & \Xi_{N, N}(0) \end{bmatrix}$ 이다.

$1 - \epsilon < \rho$, $\|(1 - \epsilon)I_{i \times i}\| < \rho$ 이고 $\|\Xi_0(i)\| \leq \rho < 1$ 이므로 $\Xi(i)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$\|I - A(i) - S(\mathbf{x}^k(i))J^k(i)\| \leq \rho < 1, \quad i \in [0, N-1]$$

4. 정리 1의 증명

증명에서의 사용을 위하여 가정으로부터 유도될 수 있는 다음과 같은 성질들을 먼저 기술하도록 한다.

(P1) 함수 f, g, h 가 해석가능하고 X 는 콤팩트 집합이

므로 다음 식을 만족하는 Lipschitz 상수 m_f, m_g, m_h 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &\leq m_f \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X \\ \|g(x_1) - g(x_2)\| &\leq m_g \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X \\ \|h(x_1) - h(x_2)\| &\leq m_h \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X. \end{aligned}$$

(P2) X 가 가정 6으로부터 컴팩트 집합이고 S 가 해석 가능하므로 다음의 식을 만족하는 상수 $m_{sjl}, 0 \leq j, l \leq N-1$ 가 존재한다.

$$\|S_{jl}(x') - S_{jl}(x'')\| \leq m_{sjl} \|x' - x''\|, \forall x', x'', 0 \leq j, l \leq N-1$$

따라서 다음의 식을 만족하는 상수 m_s 가 존재한다.

$$\|S(x') - S(x'')\| \leq m_s \|x' - x''\|, \forall x', x'' \in X \quad (A.5)$$

(P3) 함수 $g(\cdot)$ 이 해석가능하고 X 가 컴팩트 집합이므로 $\|g(x)\| \leq M_g$ 를 만족하는 상수 M_g 가 존재한다.

상대차수의 정의와 $x^*(0) = x^k(0)$ 로부터 $y^*(i) = y^k(i), i \in [0, \sigma-1]$ 를 얻을 수 있다. $\delta x^k(i)$ 를 $\delta x^k(i) = x^*(i) - x^k(i)$ 로 정의하자. (3)과 (6)을 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u^{k+1}(i) &= u^*(i) - u^{k+1}(i) \\ &= [I - \Lambda(i)] [u^*(i) - u^k(i)] \\ &\quad + S(x^*(i)) [y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)] \\ &\quad - S(x^k(i)) [y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)] \\ &\quad + S(x^k(i)) [y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)] \\ &\quad - S(x^k(i)) [y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^k(i)] \end{aligned} \quad (A.6)$$

Lemma 2를 이용하면 (A.6)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u^{k+1}(i) &= [I - \Lambda(i) - S(x^k(i)) J^*(i)] \delta u^k(i) \\ &\quad - S(x^k(i)) A^k(i) \delta x^k(i) \\ &\quad + [S(x^*(i)) - S(x^k(i))] [y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)] \end{aligned} \quad (A.7)$$

$S, A^k(i)$ 와 $y_{\sigma(i)}^*(i) - y_{\sigma(i)}^k(i)$ 는 해석가능하므로 가정 6을 이용하면 어떤 상수 M_y, M_{sa} 가 존재하여

$$\begin{aligned} \|y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)\| &\leq M_y, \\ \forall y_{\sigma(i)}^k(i), y_{\sigma(i)}^*(i), i \in [0, N-1], \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\|S(x^k(i)) A^k(i)\| \leq M_{sa}, \forall i. \quad (A.9)$$

을 만족함을 알 수 있다.

(A.7)에 노음을 취하고, (A.9)를 이용하면

$$\begin{aligned} \|\delta u^{k+1}(i)\| &\leq \|I - \Lambda(i) - S(x^k(i)) J^*(i)\| \|\delta u^k(i)\| \\ &\quad + \|S(x^k(i)) A^k(i)\| \|\delta x^k(i)\| \\ &\quad + \|S(x^*(i)) - S(x^k(i))\| \|y_{\sigma(i)}^d - y_{\sigma(i)}^*(i)\| \end{aligned} \quad (A.10)$$

을 얻을 수 있다.

(8)과 Lemma 3를 이용하면

$\|I - \Lambda(i) - S(x^k(i)) J^*(i)\| \leq \rho$ 를 만족한다. (A.5), (A.8) 그리고 (A.9)를 이용하면 (A.10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \|\delta u^{k+1}(i)\| &\leq \rho \|\delta u^k(i)\| + M_{sa} \|\delta x^k(i)\| + M_y m_s \|\delta x^k(i)\| \\ &\leq \rho \|\delta u^k(i)\| + M_{sa} \|\delta x^k(i)\| + M_y m_s \|\delta x^k(i)\| \\ &= \rho \|\delta u^k(i)\| + \alpha_m \|\delta x^k(i)\| \end{aligned} \quad (A.11)$$

여기서 $\alpha_m = M_{sa} + M_y m_s$ 이다. (1)로부터 시스템의 상태변수는

$$\begin{aligned} \delta x^{k(i+1)} &= f(x^*(i)) - f(x^k(i)) + [g(x^*(i)) - g(x^k(i))] u^*(i) \\ &\quad + g(x^k(i)) [u^*(i) - u^k(i)], i \in [0, n + \sigma - 1]. \end{aligned} \quad (A.12)$$

를 만족한다.

(A.12)의 양변에 노음을 취하고 (P1)과 (P3)를 이용하면, $\|\delta x^k(i+1)\| \leq (m_f + m_g M_u) \|\delta x^k(i)\| + M_g \|\delta u^k(i)\|$ (A.13) 을 얻을 수 있다. 여기서 $M_u = \sup_{i \in [0, N-1]} \|u^*(i)\|$ 이다. $x^*(0) = x^k(0)$ 이므로 (A.13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|\delta x^k(i)\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} d_1^{i-j-1} M_g \|\delta u^k(j)\|,$$

여기서 $d_1 = m_f + m_g M_u$ 이다.

$\|\delta x^k(i)\| = (\sum_{j=i}^{i+N+\sigma-1} \|\delta x^k(j)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\|\delta x^k(i)\| \leq \sqrt{N + \sigma} \times \text{Max}_{i \leq j \leq i + N + \sigma - 1} [\|\delta x^k(j)\|]$$

또한 각각의 $\|\delta x^k(i)\|$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \|\delta x^k(i+l-1)\| &\leq c_l, l = 1, \dots, N + \sigma, \\ c_l &= \sum_{j=0}^{i+l-2} d_1^{i+l-j-2} M_g \|\delta u^k(j)\| \end{aligned}$$

이 성립하며 $\max_{i \leq j \leq i + N + \sigma - 1} [\|\delta x^k(j)\|]$ 는

$$\max_{i \leq j \leq i + N + \sigma - 1} [\|\delta x^k(j)\|] \leq \begin{cases} C_{N+\sigma}, & d_1 \geq 1 \\ \frac{C_{N+\sigma}}{d_1^{N+\sigma-1}}, & d_1 < 1 \end{cases}$$

와 같이 제한된다. 따라서 $\|\delta x^k(i)\|$ 는 다음과 같이 제한된다.

$$\begin{aligned} \|\delta x^k(i)\| &\leq \sqrt{N + \sigma} \times \max_{i \leq j \leq i + N + \sigma - 1} [\|\delta x^k(j)\|] \\ &\leq \frac{\sqrt{N + \sigma} \times C_{N+\sigma}}{\sqrt{N + \sigma} \times \frac{C_{N+\sigma}}{d_1^{N+\sigma-1}}}, d_1 \geq 1 \\ &\quad \sqrt{N + \sigma} \times \frac{C_{N+\sigma}}{d_1^{N+\sigma-1}}, d_1 < 1 \end{aligned} \quad (A.14)$$

(2)를 이용하면 (A.14)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \|\delta x^k(i)\| &\leq \beta C_{N+\sigma} \\ &= \sum_{j=0}^{i+N+\sigma-2} \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta u^k(j)\| \\ &= \sum_{j=0}^{i+N-2} \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta u^k(j)\|, \end{aligned} \quad (A.15)$$

$$\beta = \sqrt{N + \sigma} \times \max \left[1, \frac{1}{d_1^{N+\sigma-1}} \right]$$

(A.15)를 (A.11)에 대입하면

$$\begin{aligned} \|\delta u^{k+1}(i)\| &\leq \rho \|\delta u^k(i)\| \\ &\quad + \alpha_m \sum_{j=0}^{i+N-2} \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta u^k(j)\| \end{aligned} \quad (A.16)$$

와 같이 정리된다. 여기서

$\|\delta \mathbf{u}^k(i)\| = (\sum_{j=i}^{i+N-1} \|\delta u^k(j)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 이다. 따라서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\delta u^k(j)\| &\leq \|\delta \mathbf{u}^k(j)\|, \quad 0 \leq j \leq i-1 \\ \|\delta u^k(j)\| &\leq \|\delta \mathbf{u}^k(i-1)\|, \quad 0 \leq j \leq i+N-2. \end{aligned} \quad (A.17)$$

(A.17)을 (A.16)에 대입하면

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{u}^{k+1}(i)\| &\leq \rho \|\delta \mathbf{u}^k(i)\| + \alpha_m \sum_{j=0}^{i+N-2} \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta u^{k(j)}\| \\ &\leq \rho \|\delta \mathbf{u}^k(i)\| + \alpha_m \sum_{j=0}^{i-2} \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta \mathbf{u}^k(j)\| \\ &\quad + \alpha_m \beta \sum_{j=i-2}^{i+N-2} d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g \|\delta \mathbf{u}^k(i-1)\| \\ &= \rho \|\delta \mathbf{u}^k(i)\| + \sum_{j=0}^{i-1} b(j) \|\delta \mathbf{u}^k(j)\|, \end{aligned}$$

여기서 $b(j) = \begin{cases} \alpha_m \beta d_1^{i+N+\sigma-j-2} M_g, & 0 \leq j \leq i-2 \\ \alpha_m \beta \sum_{l=1}^N d_1^{N+\sigma-l} M_g, & j = i-1 \end{cases}$ 이다.

양변에 λ^i 를 곱하고 supremum을 취하면

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [0, N-1]} (\lambda^i \|\delta \mathbf{u}^{k+1}(i)\|) &\leq \rho \sup_{i \in [0, N-1]} (\lambda^i \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|) \\ &\quad + \sup_{i \in [0, N-1]} (\sum_{j=0}^{i-1} b(j) \lambda^{i-j} \|\delta \mathbf{u}^k(j)\|) \\ &\leq \rho \sup_{i \in [0, N-1]} (\lambda^i \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|) \\ &\quad + \sup_{i \in [0, N-1]} (\sum_{j=0}^{i-1} b(j) \lambda^{i-j}) \sup_{l \in [0, N-1]} (\lambda^l \|\delta \mathbf{u}^k(l)\|) \end{aligned}$$



정 구 민

1972년 10월 4일생. 1995년 서울대학교 제어계측공학과 학사. 1997년 동대학원 제어계측공학과 석사. 현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정 재학중. 주관심 분야는 제어이론 및 응용 등임.

최 종 호

제어·자동화·시스템공학 논문지 제3권, 제6호, 참조.

λ -노음의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{u}^{k+1}(i)\|_{\lambda} &\leq \rho \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|_{\lambda} \\ &\quad + \sup_{j \in [0, N-1]} b(j) \sup_{i \in [0, N-1]} (\sum_{l=0}^{i-1} \lambda^{i-l}) \\ &\quad \cdot \sup_{i \in [0, N-1]} (\lambda^i \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|) \\ &= \rho \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|_{\lambda} + m_b \frac{\lambda(1-\lambda^{N-1})}{1-\lambda} \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|_{\lambda} \end{aligned}$$

을 얻는다.

여기서 $m_b = \sup b(j)$, $\rho_1 = \rho + m_b \frac{\lambda(1-\lambda^{N-1})}{1-\lambda}$ 이다.

(8)에서부터 $\rho < 1$ 이므로 $\rho_1 < 1$ 이게 하는 충분히 작은 λ 가 존재한다. 따라서 $k \rightarrow \infty$ 에 따라 구간 $i \in [0, N-1]$ 에서 $\|\delta \mathbf{u}^k(i)\|_{\lambda} \rightarrow 0$ 가 성립한다.

λ -노음의 정의에 의하여

$$\lambda^{-N+1} \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|_{\lambda} \geq \sup_{i \in [0, N-1]} \|\delta \mathbf{u}^k(i)\|.$$

이므로 $k \rightarrow \infty$ 에 따라 구간 $i \in [0, N-1]$ 에서 $\|\delta \mathbf{u}^k(i)\| \rightarrow 0$, $\sup_{i \in [0, 2N+\sigma-2]} \|x^*(i) - x^k(i)\| \rightarrow 0$ 가 각각 성립한다.

(P1)에 의하여 $\|y^*(i) - y^k(i)\| \leq m_d \|x^*(i) - x^k(i)\|$ 가 성립하므로 출력오차 $y^*(i) - y^k(i)$ 는 $k \rightarrow \infty$ 에 따라 $\forall i \in [0, 2N+\sigma-2-1]$ 에 대하여 0으로 수렴한다.



장 태 정

1964년 1월 16일생. 1986년 서울대학교 제어계측공학과 학사. 1988년 동대학원 제어계측공학과 석사. 1994년 동대학원 제어계측공학과 박사. 현재 강원대학교 전기전자정보통신공학부. 주관심 분야는 제어이론 및 응용, Haptic 인터페이스, 디지털통신 등임.

인터페이스, 디지털통신 등임.