Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 49-64

연분수와 무리수에 관한 고찰

동의대학교 수학과 **강미광**

Abstract

Every real number can be expressed as a simple continued fraction. In particular, a number is rational if and only if its simple continued fraction has a finite number of terms. Owing to this property, continued fractions have been a powerful tool which determines a real number to be rational or not.

Continued fractions provide not only a series of best estimate for a real number, but also a useful method for finding near commensurabilities between events with different periods.

In this paper, we investigate the history and some properties of continued fractions, and then consider their applications in several examples. Also we explain why the Fibonacci numbers and the Golden section appear in nature in terms of continued fractions, with some examples such as the arrangements of petals round a flower, leaves round branches and seeds on seed head.

0. 서론

학생들에게 무한 개념을 지도하다 보면 매번 부딪치는 문제 중 하나는 유리수 집합과 무리수 집합의 농도 비교이다. 유리수 집합의 무리절단이 생길 때마다 하나씩 정의되는 무리수이지만 무리수 집합은 유리수들의 집합보다 훨씬 큰 무한집합이라는 것을 직관적으로 이해시키기는 쉽지 않다.

유리수와 무리수를 벨기에 수학자 스테빈(Stevin, 1548-1620)이 발명한 소수로 나타내면 유리수는 유한소수이거나 순환 무한소수 그리고 무리수는 비순환 무한소수로 특정 지어진다. 그러나 순환하긴 하지만 무한소수인 유리수도 많이 존재하므로 유리수와 무리수의 이 같은 특징이 두 집합의 농도 차를 구별하기에는 미진한 감이 있다. 그러나 연분수에 의한 실수의 분류법은 유리수는 유한 개념과 무리수는 무한 개념과 연관되도록 각각 특징짓는다. 왜냐하면 모든 수는 단순 연분수로 표현될 뿐 아니라 유리수는 바로 유한 개의 항을 가지는

단순 연분수와 일대일 대응되므로 자연히 무리수는 무한 연분수와 일대일 대응이 이루어지기 때문이다. 번분수라고도 불리는 연분수는 우리나라의 교육 과정에서는 단편적인 예로서만 한 두 번 언급되고 대학에서도 거의 다루지 않는 분야이지만 나름대로 연구할 만한 가치가 있는 하나의 수학 전공 분야이다.

이 글에서는 연분수의 역사를 통해 연분수가 수학사에 미친 영향을 조사하고 연분수가 가지는 중요한 성질과 아울러 여러 가지 예를 통해 그의 활용도를 살펴보고자 한다. 그리고 자연이 유리수보다 무리수, 특히 황금비를 선호하는 이유를 연분수라는 도구를 사용해 설명하고자 한다.

1. 연분수의 역사

$a_0, a_1, a_2, \cdots$와 $b_0, b_1, b_2, \cdots$가 실수와 복소수일 때, 다음과 같이 표현되는 수를 연분수(continued fraction)라고 한다[5, 6].

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\cdots}}}}$$

연분수는 지난 2000년 간 수학에서 하나의 예로서 등장하곤 했으므로 그 기원이 언제부터인가를 정확히 말하기는 힘들지만 인도 수학자 아리아바타(Āryabhata)가 그의 저서에서 부정방정식(indeterminate equation)을 풀기 위해 연분수를 사용했으므로 적어도 서기 550년경으로는 거슬러 올라간다. 그러나 유리수 p/q를 연분수로 나타내는 방법은 p와 q의 최대공약수를 구하는 유클리드의 알고리즘과 맞물려 있는 관계이기 때문에, 기원전 300년의 유클리드 알고리즘과 연분수의 기원을 동일하게 보는 사람들도 있다. 아리아바타가 부정방정식의 해를 구하는 특정한 예에서 연분수를 사용했을 뿐 이 방법을 일반화하지는 않았듯이 그리스와 아랍의 수학 책에 나타나는 연분수도 특정한 예에 한정되어 있다.

1530년 이탈리아 수학자 봄벨리(Bombelli)가 $\sqrt{13}$을 순환 연분수로 표현하고, 카탈디(Cataldi, 1548-1626)도 $\sqrt{18}$을 순환 연분수로 나타냈지만 둘 다 연분수의 성질에 관해서 연구하지는 않았다[8].

1655년 월리스(John Wallis, 1616-1703)는 그의 저서 **무한의 수론**(Arithemetica Infinitorium)에서 그의 이름을 딴 다음과 같은 유명한 공식을 유도해내어 π를 최초로 유리수 연산만 포함하는 무한수열의 형태로 나타내었다.

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\cdots$$

한편, 영국 학사원의 초대 총재인 윌리엄 브렁커(William Brouncker, 1620-1684)는 월리스의 공식을 연분수의 형태로 다음과 같이 표현하였다.

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\cdots}}}}$$

브렁커는 더 이상 연분수를 연구하지 않았지만 월리스는 이에 자극을 받아 본격적으로 연분수에 관한 이론을 일반화시키기 시작했으며, 저서 *Opera Mathematica*(1695)에서 연분수의 기본 이론과 성질에 관해 기술해 놓았다. 그러므로 실질적인 수학의 한 분야로서 연분수를 개척한 사람은 월리스라고 할 수 있으며 현재 사용하고 있는 연분수라는 용어도 이 때 처음 사용되었다.

연분수를 실질적인 응용에 처음 사용한 사람은 독일의 수학자이자 천문학자인 호이겐스(Huygens, 1629-1695)로 천문관을 지을 때 필요한 기어의 톱니수의 비에서 최상의 근사 유리수를 얻기 위해 연분수를 이용하는 방법에 대해 연구했다.

월리스와 호이겐스가 연분수에 관한 업적을 내놓은 이후 오일러(Euler, 1707-1783), 람베르트(Lambert, 1728-1777), 그리고 라그랑주(Lagrange, 1736-1813)에 의해 연분수에 관한 이론들이 연구되고 발표되면서부터 연분수는 수학의 한 분야로서 인정받기 시작하였다.

오일러는 월리스와 브렁커의 결과가 같다는 것을 수렴하는 급수를 이용해서 증명하였다(1775). 다음 급수가 수렴한다고 하자.

$$S=a_0+a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+a_1a_2a_3a_4+\cdots$$

그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}S&=a_0+a_1(a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\triangle)\\&=a_0+\cfrac{a_1}{\cfrac{1}{1+a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\triangle}}\\&=a_0+\cfrac{a_1}{\cfrac{1+a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\triangle-(a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\triangle)}{1+a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\triangle}}\end{aligned}$$

$$= a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2(1 + a_3 + a_3 a_4 + \triangle')}{1 + a_2 + a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \triangle}}$$

$$= a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{\cfrac{1 + a_2 + a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \triangle}{1 + a_3 + a_3 a_4 + \triangle'}}}$$

$$= a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{\cfrac{(1 + a_2)(1 + a_3 + a_3 a_4 + \triangle') + a_3(1 + a_4 + a_4 a_5 + \triangle'')}{1 + a_3 + a_3 a_4 + \triangle'}}}$$

$$= a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 + \cfrac{a_3}{\cfrac{1 + a_3 + a_3 a_4 + \triangle'}{(1 + a_4 + a_4 a_5 + \triangle'')}}}}$$

여기서 $\triangle = a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 + \cdots$이고 $\triangle' = \dfrac{\triangle}{a_2}$, $\triangle'' = \dfrac{\triangle}{a_2 a_3}$이다.

이런 방법을 계속 적용하면, 수학적 귀납법에 의해 수렴하는 급수 S는 다음과 같이 연분수로 표현된다.

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cfrac{a_4}{1 + a_4 - \cfrac{a_5}{\cdots}}}}}$$

그러므로 이를 다음의 그레고리 급수에 적용하면 다음을 얻는다.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \cfrac{49}{\cdots}}}}}$$

여기서 x를 1로 두면 브렁커의 결과가 나온다. 오일러는 "모든 유리수는 유한한 단순 연분수로 표현할 수 있다."는 정리를 증명하고 e와 $\tan x$를 다음과 같이 연분수로 나타내었다 [2].

$$\frac{1}{2}(e-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{\cdots}}}}},$$

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

이러한 연분수는 람베르트와 르장드르의 연구의 시작점이 되었고, 람베르트는 " x가 유리수이면 e^x와 $\tan x$는 무리수이다."라는 사실을 밝혔다. 또한, 라그랑주는 "계수가 정수인 이차방정식의 모든 실근은 반복적 주기 형태를 가지는 연분수이다."라는 연분수 정리를 증명했다.

19세기는 연분수의 황금시대라고 표현될 정도로 연분수라는 분야를 모든 수학자들이 인지하는 분야가 되었으며, 연분수 이론에 관한 결과들이 폭발적으로 쏟아져 나왔다. 특히, 야코비(Jacobi), 페론(Perron), 에르미트(Hermite), 가우스(Gauss), 코시(Cauchy)와 같은 뛰어난 수학자들의 기여에 힘입어 많은 결과들을 지닌 수학의 한 분야로 크게 성장하였다.

20세기 초 이후부터 연분수는 다른 분야에서 그 모습을 나타내고 있는데 한 예로 푸앵카레(Poincaré), 버코프(Birkhoff)로부터 시작 연구한 카오스적 동력 시스템(chaotic dynamic system) 이론에서 연분수의 이론이 사용되고 있다.

2. 연분수의 성질

앞에서 언급했듯이, 다음과 같이 표현된 수를 연분수라고 한다.

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{\cdots}}}}$$

여기서는 상수들 a_i와 b_j를 정수로 제한한다. 특히, $b_0=b_1=b_2=\cdots=1$인 연분수를 단순연분수(simple continued fraction)라 하고 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$로 표현한다.

정리 1. 모든 실수는 단순 연분수로 표현할 수 있다.

증명. x가 실수일 때, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 하고 f는 다음과 같이 정의된 함수라고 하자.

$$f(x) = \frac{1}{x - [x]} \quad (x \in R)$$

임의의 실수 α가 주어져 있다하면 귀납정리에 의해 다음과 같이 정의되는 함수 $\gamma : N \to R$이 존재한다.

(i) $\gamma(0) = \alpha$

(ii) $\gamma(n+1) = f(\gamma(n)) = \dfrac{1}{\gamma(n) - [\gamma(n)]}$

여기서 $a_n = [\gamma(n)]$이라 두면 $\gamma(n) = a_n + \dfrac{1}{\gamma(n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$이 성립하므로 α는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = [\alpha] + (\alpha - [\alpha]) = a_0 + \frac{1}{\gamma(1)} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\gamma(2)}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\gamma(3)}}}$$

$$= \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

■

유한 개의 항을 가진 단순 연분수 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$를 유한 단순 연분수라 하고 0이 아닌 항을 무한 개 가지고 있는 연분수 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$를 무한 단순 연분수라 한다. 또한 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k]$를 연분수 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ $(k \le n)$와 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$의 k번째 수렴항이라 부른다.

실수를 소수로서 분류하면 유리수는 유한 소수와 순환무한소수로 대응되며 비순환 무한소수는 무리수와 일대일 대응된다. 정리 1에 의해 모든 수는 단순 연분수로 표현될 수 있으므로 이를 유리수에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

정리 2. 유리수는 유한인 단순 연분수로 표현되며 또한 유한인 단순 연분수는 유리수이다.

증명. α가 유리수 $\alpha = \dfrac{p}{q}$와 같이 서로 소인 정수의 비로 나타난다고 하면 p와 q에 다음

과 같이 유클리드 알고리즘을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} p &= a_1 q + r_1, & 0 \le r_1 \le q \\ q &= a_2 r_1 + r_2, & 0 \le r_2 \le r_1 \\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3, & 0 \le r_3 \le r_2 \\ &\vdots & \vdots \\ r_{n-3} &= a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & 0 \le r_{n-1} \le r_{n-2} \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1} + 0 \end{aligned}$$

위의 식들을 차례로 식 $\alpha = \frac{p}{q}$에 대입하면 다음과 같이 α에 대한 유한 단순 연분수 형태를 얻는다.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1 q + r_1}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 r_1 + r_2}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \cdots = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

역으로 α가 n개의 항을 가지는 유한 단순 연분수 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$로 표현된다고 하면 수학적 귀납법에 의해 이것은 유리수임을 알 수 있다. 즉 $k(k \le n)$개의 항을 가지는 모든 연분수는 유리수라 가정하면 $(k+1)$개의 항을 가지는 유한 연분수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k]}$$

여기서 가정에 의해 k개의 항을 가지는 연분수 $[a_1;, a_2, \cdots, a_k]$는 유리수이므로

$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k]} = [a_0; a_1, \cdots, a_k]$ 도 유리수이다. ■

따름 정리. 두 정수 p와 q에 대한 유클리드 알고리즘이 정리 2의 증명과 같이 주어져 있으면 p와 q의 최대공약수는 r_{n-2}이다.

모든 실수는 정리 1에 의해 단순 연분수로 표현 가능하고 유리수는 정리 2에 의해 유한인 단순 연분수로 표현되며, 역으로 유한인 단순 연분수는 유리수이므로 정리 2의 대우를 취하면 무리수도 단순 연분수에 의해 다음과 같이 특징지어질 수 있다.

정리 3. 어떤 실수가 무리수일 필요충분조건은 그것이 무한 단순 연분수의 형태로 표현될 수 있는 것이다.

정리 4[4]. 실수 α가 $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\cdots]$으로 표현된다면 다음은 α에 수렴하는 유리수 수열이다.

$$[a],\ [a_0;a_1],\ [a_0;a_1,a_2],\ [a_0;a_1,a_2,a_3],\ [a_0;a_1,a_2,a_3,a_4],\ \cdots$$

위 성질로 인해 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_k]$를 $[a_0;a_1,a_2,a_3,\cdots]$의 k번째 수렴항이라 부른다. 이 때 k값을 크게 하면 실제의 값 α와 유리수 근사값 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_k]$의 오차를 원하는 만큼 줄일 수 있으므로 기어의 두 톱니바퀴의 톱니 수를 정할 때나 태양력에서 윤달을 정할 때 유용하게 이용된다.

3. 연분수의 활용

(1) 태양력에서의 치윤법

태양력이란 지구가 해를 한 바퀴 도는 동안을 일년으로 하는 달력으로 1태양년은 365.242196일이다. 1년을 365일로 정한다면 1년에 0.242196일이 남으므로 이것이 누적되면 계절과 맞지 않게 된다. 그러므로 일정한 간격마다 윤일을 두어 실제의 태양년과 오차가 생기지 않도록 조절해야 하는데, 몇 년에 몇 번의 윤달을 두어야 하는가 하는 문제를 해결하기 위해 정리 1에 나타난 방식으로 0.242196을 연분수로 표현하면 다음과 같다.

$$0.242196=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}$$

$=[4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 11,\ \cdots]$

여기서 0.242196에 수렴하는 유리수 수열을 구하면 다음과 같다.

$$[4]=\frac{1}{4}=0.25,$$

$$[4,7]=\frac{1}{4+\frac{1}{7}}=\frac{7}{29}=0.24,$$

$$[4,7,1]=\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{1}}}=\frac{8}{33}=0.242424,$$

$$[4,7,1,3]=\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=\frac{29}{120}=0.241667,$$

$$[4,7,1,3,6]=\frac{31}{128}=0.24218,$$

$$[4,7,1,3,6,1]=\frac{194}{801}=0.242197,$$

$$[4,7,1,3,6,1,11]=\frac{2669}{11020}=0.242196$$

여기서 $[4]$는 4년에 윤일을 1일 두어야 함을 뜻하고 $[4,7]$은 29년에 윤일을 7일, $[4,7,1]$은 33년에 윤일을 8일 두어야 함을 의미한다. 이와 같이 k가 커질수록 k번째 수렴항 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}]$은 실제값 0.242196에 가까워진다. k번째 수렴항은 유리수이므로 $\frac{n}{m}$으로 표현하면 이는 m년 동안 윤일을 n일 두어야 함을 의미한다. k항이 클수록 실제값에 더 가까운 정확한 값이 되기도 하지만 윤일을 두는 방법이 복잡해지므로 현재 우리가 쓰고 있는 그레고리력은 400년에 97번의 윤일을 두고 있다. 이는 0.242196의 6번째 수렴항인 $\frac{194}{801}$ 대신 근사값인 $\frac{194}{800}=\frac{97}{400}=0.2425$를 택한 것으로 1태양년을 365.2425로 조절하여 사용하고 있는 것이다.

(2) 태음태양력에서의 치윤법

연분수는 서로 다른 주기를 가진 사건들 사이에 공통으로 사용할 수 있는 근사 동일 단위를 찾을 때 유용하게 사용된다. 달이 지구를 한 바퀴 도는 데 걸린 시간인 1삭망월은

29.53059일이고 태양이 지구를 한 바퀴 도는 시간인 1태양년은 365.2422일로 태양과 달은 뚜렷한 주기 운동을 하고 있다. 역법 가운데 태양과 달의 운동을 모두 고려한 것이 태음 태양력으로 이는 현재 우리가 사용하고 있는 음력을 말한다[9].

실제 계절의 변화는 태양의 위치에 의해 결정되므로 태음력에 윤달의 개념을 삽입하여 태양력과 계절의 불일치를 다소 해소하여 조정한 것이 태음태양력이다. 우리가 채택하고 있는 1태양년은 365.2425일이고 달의 주기 운동인 1삭망월은 29.53059이므로 태음태양력에서 몇 번의 윤달을 두느냐 하는 문제는 이 둘을 공통으로 잴 수 있는 공동단위를 찾는 문제로 귀결된다.

$\frac{365.2425}{29.53059}$를 연분수로 표현하고 8번째 수렴항까지 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{365.2425}{29.53059} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

$$= [12; 2, 1, 2, 1, 1, 18, 1, \cdots],$$

$$[12; 2] = \frac{25}{2} = 12.5,$$

$$[12; 2, 1] = \frac{37}{3} = 12.3\dot{3},$$

$$[12; 2, 1, 2] = \frac{99}{8} = 12.375,$$

$$[12; 2, 1, 2, 1] = \frac{136}{11} = 12.\dot{3}\dot{6},$$

$$[12; 2, 1, 2, 1, 1] = \frac{235}{19} = 12.368421,$$

$$[12; 2, 1, 2, 1, 1, 18] = \frac{4366}{353} = 12.368272,$$

$$[12; 2, 1, 2, 1, 1, 18, 1] = \frac{4601}{372} = 12.368276$$

여기서 실제값 $\frac{365.2425}{29.53059} = 12.368276$의 근사값으로 6번째 수렴항을 채택한 것이 현재 쓰고 있는 태음태양력이며 오차는 0.003, 즉 다음과 같다.

19년(태양력)=235개월(태음력)
19년(태양력)=228개월(태양력)

그러므로 태양력과 태음력을 맞추기 위해서는 19년 동안 태음태양력에서는 7번의 윤달을 둔다. 실제로, 19년간의 태양년의 총 일수는 다음과 같다.

$$365.2422 \times 19 = 6939.6882(\text{일})$$

그런데 태음력의 235개월의 일수는 다음과 같으므로, 거의 일치한다.

$$29.5306 \times 235 = 6939.6882(\text{일})$$

오래 전부터 사람들은 19태양년이 235삭망월과 거의 일치한다는 것을 알고 있었다. 그리스에서는 기원전 432년 메톤(Meton)이란 사람이 이것을 발견했다고 해서 메톤 주기라 부르고 있고[10], 중국에서는 이미 기원전 600년경 춘추전국시대에 장(章)법으로 공포되어 있었다.

(3) 기어에서의 톱니수

기어에서 하나의 톱니바퀴의 속도를 다른 톱니바퀴에 비해 $\sqrt{2}$배로 더 빨리 회전하게 만들고 싶을 때 두 톱니바퀴의 톱니 수를 결정하는 방법은 $\sqrt{2}$에 되도록 근사한 유리수를 잡는 것이다.

$\sqrt{2}$을 연분수로 표현하면 $\sqrt{2}$은 1과 2 사이에 있는 수이므로 정수 부분은 1이다. 그래서 $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$로 표현하면 $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$이므로 분모를 유리화시킨 다음 $\sqrt{2}$을 대입하면 $x=\sqrt{2}+1=1+\frac{1}{x}+1=2+\frac{1}{x}$이다. 재귀적인 방법으로 x대신 $2+\frac{1}{x}$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$x=2+\frac{1}{x}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}$$

$$=\cdots=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

여기서 $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$이므로 이를 대입하면 $\sqrt{2}$는 다음과 같은 연분수로 표현된다.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}=[1;2,2,2,\cdots]$$

그러므로 $\sqrt{2}$에 수렴하는 유리수 근사수열은 다음과 같다.

$$[1],\ [1;2],\ [1;2,2],\ [1;2,2,2],\ [1;2,2,2,2],\ [1;2,2,2,2,2],\cdots$$

따라서 이를 분수로 나타내면 다음을 얻는다.

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\cdots$$

실제값은 $\sqrt{2}=1.414135$이므로 $\sqrt{2}$의 근사값으로 $\frac{41}{29}$을 택하는 경우, 즉 톱니수를 41개와 29개로 하는 경우는 오차가 0.042%이고 99개와 70개를 하는 경우는 오차가 0.007%밖에 되지 않는다.

(4) 이차방정식과 연분수

이차방정식에서 계수가 정수인 이차방정식의 무리근은 순환하는 무한 연분수이다(라그랑주의 연분수 정리). 예를 들면 a가 정수일 때 이차방정식 $x^2-ax=1$은 우리가 일반적으로 푸는 근의 공식에 의하면 $x=\frac{1\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$이므로 양수인 무리근은 $\frac{1+\sqrt{a^2+4}}{2}$이다. 이때의 양의 무리근은 이차방정식을 다른 방법으로 풀면 연분수로 나타낼 수 있다. 즉 $x^2-ax+1=0$은 $x^2=ax+1$이므로 x로 나누면 $x=a+\frac{1}{x}$이고, 따라서 재귀적 방법으로 표현하면 다음과 같다.

$$x=a+\frac{1}{x}=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}}$$

$$=\cdots=[a;a,a,a,\cdots]$$

그러므로 $x=\frac{1+\sqrt{a^2+4}}{2}=[a;a,a,a,\cdots]$이다.

4. 자연에서 발견할 수 있는 존재하는 무리수

식물에서 생장점들은 가지 끝에 있으며 이곳에서 새로운 가지들이 뻗어 나가고 또 각각의 가지의 끝에 생장점이 있어 새로운 세포들이 다시 형성된다. 한번 형성된 세포는 점점 자라게 되므로 새로운 생장점은 위로 올라가기 마련이다. 줄기가 나선형으로 자라듯이 이러한 세포도 일정한 각을 지키면서 나선형으로 자란 다음 새로운 세포가 돌아가면서 자꾸자꾸 생겨난다. 이러한 세포는 새 가지나 잎이 되기도 하고 꽃에서는 꽃잎이나 수술이 되기도 한다.

(1) 식물에서의 최적의 배열

거의 모든 식물들은 자신의 환경에서 될 수 있으면 최적의 상태를 유지하려고 하는 것이 생존의 본성으로 잎이나 씨앗들의 배열에서도 이 같은 현상을 찾아볼 수 있다. 그렇다면 어떤 것이 그들에게 최적의 상태인지를 알아본다.

잎들의 배열에 있어서는 새로이 생겨나는 잎은 되도록 많은 햇빛과 비에 노출되면서 이미 생긴 잎을 최대한 가리지 않는 위치에서 생겨나려고 할 것이다.

씨들의 배열에 있어서 새로운 씨들은 생장점에서 자꾸 생겨나야 할 터이고, 이미 생겨난 씨앗은 일정한 크기까지 자랄 수 있도록 성장이 유지되어야 할 것이며, 되도록 많은 씨들을 포함할 것이다. 씨앗은 중심에서 생겨나므로 중심 부분에서는 느슨하고 많은 씨를 포함하도록 가장자리로 감에 따라 촘촘한 형태가 이상적일 것이다. 또한 비바람에 잘 견딜 수 있도록 역학적인 힘을 가진 형태여야 할 것이다.

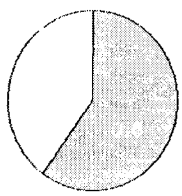
꽃잎들의 배열에 있어서도 꽃의 번식과 수정을 위해 곤충들을 불러모으고 유인할 수 있도록 최대한 아름다운 자신의 꽃잎들을 노출시키려고 할 것이다.

꽃잎들의 배열이나 잎의 배열, 씨들의 배열을 자세히 살펴보면 이들은 일정한 회전각을 유지하고 있는 것처럼 보인다. 실제로, 이들의 배열에서 식물이 어떻게 성장하고 있든지 간에 최적의 상태를 만족시켜주는 것은 이 일정한 회전각이다. 이러한 일정한 회전각이 식물이 얼마만큼 성장했느냐에 상관없이 일정한 배열을 만들어 낸다는 것은 1993년 프랑스의 수학자 듀아디(Douady)와 꾸데르(Couder)에 의해 증명되었다.

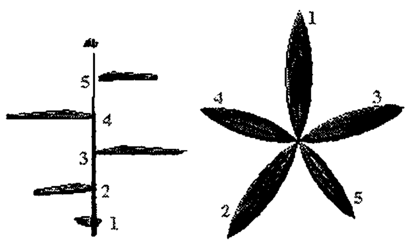
그렇다면 이러한 회전각의 크기로는 어떤 값이 적당한지를 살펴본다.

(2) 연속된 잎들의 회전각과 유리수

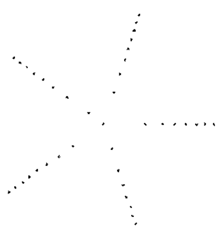
먼저 회전각이 유리수인 경우를 생각한다. 예를 들면 그림 1, 그림 2와 같이 회전각의 크기가 0.6이면 잎이 난 후 그 잎과 일직선이 되는 잎 사이의 잎의 수는 다섯 개이다. 그러나 여섯째 잎은 다시 아래의 잎과 겹치는 곳에 나므로 아래 잎이 쪼일 빛과 비를 가리게 된다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

씨앗의 배열에서도 회전각이 360°의 유리수 비율 $\frac{q}{p}$이면 p개의 팔을 가진 직선 배열의 씨주머니가 된다. 그런데 그림 3에서 보다시피, 직선 배열의 씨주머니는 원형 모양의 씨주머니보다 비바람에 견딜 수 있는 역학적인 힘이 더 약하고 많은 씨를 포함하지 못한다. 실제로, 일정한 가장자리의 둘레로 최대면적을 가지는 도형은 원으로 원형모양의 배열은 역학적인 힘도 강하고 촘촘한 배열이 되어 많은 씨를 포함한다.

이와 같이 유리수는 식물들의 회전각으로는 부적당하므로 무리수를 회전각으로 취하는 것이 더 많은 씨앗이나 잎을 계속해서 가지기 위해서는 더 적당하다.

(3) 회전각과 무리수

대표적인 무리수는 e, π, ϕ, $\sqrt{2}$ 등이 있다. 여기서 e는 약 2.71818…로 2바퀴를 회전한 후 0.71818…의 각이다. 그래서 위에서 보면 나타나는 다음 잎의 위치는 0.71818…인 경우와 같아지므로 이 때 회전각의 중요 부분은 1 이하의 소수 부분이다. 그런데 0.71818…은 무한 순환소수 $0.\overline{714285}=\frac{5}{7}$와 아주 가까우므로 7개의 팔을 가진 씨앗 배열이 되어 부적당하다.

그리고 원주율 $\pi=3.14159\cdots$도 이것의 소수부분인 $0.14159\cdots$가 유리수 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$과 아주 가까운 수이므로 7개의 팔을 가진 씨앗 배열과 거의 일치해 버린다.

이와 같이, 식물의 잎이나 씨앗의 회전각으로 적당한 무리수는 매우 오랫동안 유리수의 근사에 안주하지 않는 무리수이므로 이러한 성질을 가지는 무리수를 무한 연분수를 이용해 찾고자 한다.

(4) 가장 좋은 무리수

정리 3에서 무한 연분수는 모두 무리수라 했으므로 쉽사리 유리수에 의해 근사되지 않는 무리수는 찾기 위해 가장 간단한 무한 연분수부터 살펴보기로 한다. 무한 연분수 중 가장 간단한 형태는 $[1;1,1,1,\cdots]$로 이것의 값을 구하면, 다음과 같다.

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} = [1;1,1,1,\cdots]$$

그러므로 $x=1+\frac{1}{x}$이 성립한다. 이것을 이차방정식 $x^2-x-1=0$으로 고친 다음 이것의 근을 구하면 $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$로서 양수만 취하면 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 즉 x는 황

금비이다. 유리수를 만들기 가장 어려운 수는 연분수로 표현했을 때 가장 작은 수들을 항으로 가지고 있는 수이기 때문에 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 최상의 무리수(the most irrational number)라고 한다. 여기서 $\phi=[1,1,\cdots]$에 수렴하는 유리수 근사 수열을 구하면 다음과 같다.

$$[1]=1,$$

$$[1;1]=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$[1;1,1]=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$[1;1,1,1]=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},$$

$$[1;1,1,1,1]=\frac{8}{5},$$

$$[1;1,1,1,1,1]=\frac{13}{8},$$

$$[1;1,1,1,1,1,1]=\frac{18}{13}$$

그래서 ϕ에 접근하는 유리수 근사 수열은 다음과 같다.

$$[1],[1;1],[1;1,1],[1;1,1,1],[1;1,1,1,1],[1;1,1,1,1,1],\cdots$$

즉, $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\frac{89}{55},\cdots$인 피보나치 수열이다. 이와 같이 무한을 최적의 상태로 추구하는 자연에서는 피보나치 수열과 황금비가 나타나기 마련인 것 같다.

5. 결론

연분수들의 사칙연산은 까다롭기 때문에 계산하기에는 부적당하나 정수가 아닌 실수의 성질을 알아볼 때 연분수 표현법은 많은 정보를 제공해 준다. 중・고등학교 교육 과정에서 다루는 무리수는 다항식의 무리근이거나, 원주율 π, e, 황금비 ϕ 등으로 한정되어 있을 뿐 아니라, 이러한 것들도 문제를 푸는 과정에서 수라기보다는 기호 정도로 인식하고 있다. 그러나 비순환 무한 소수로 표현되는 무리수들을 연분수로 표현하면 다음과 같이 이 수가 본래 지니고 있는 패턴의 아름다움을 감상할 기회를 제공해 준다.

$$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\cdots]$$

$$\phi=[1;1,1,1,\cdots]$$

$$\sqrt{2}=1.414213\cdots=1+\frac{1}{2.414213}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{414213}}=\cdots$$

그리고 해석학의 "모든 실수는 수렴하는 유리수 수열을 가지고 있다."라는 정리에서 이 실수에 대한 연분수 표현법은 구체적으로 수렴하는 유리수 수열의 예를 보여줄 수 있다.

또한 연분수는 자연에서 무리수인 황금비와 이에 수렴하는 유리수 수열인 피보나치 수열이 매우 자주 나타나는 현상을 설명 가능하게 한다. 무한을 추구하는 자연계는 유리수보다는 무한 개념에 더 적당한 무리수를 선호하기 마련이고 그 중에서도 가장 간단한 형태의 무리수인 황금비를 선택하므로 그 과정에서 피보나치 수열이 나타날 수밖에 없는 것이다.

이와 같이 나름대로의 효용가치를 지닌 연분수를 사장할 것이 아니라 학생들에게 적당한 학습 제재로 개발하여 수학적 아름다움을 느낄 수 있는 기회가 되도록 하면 좋을 것 같다.

참고 문헌

1. 김용운 · 김용국, **재미있는 수학여행 ① 수의 세계**, 김영사, 1990.
2. Beckmann, Petr/김인수 역, **π의 역사**, 민음사, 1995.
3. 호리바 요시카즈/임승원 역, **무리수의 불가사의**, 전파과학사. 1994.
4. Baker, A., *A Concise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1984.
5. Burton, D.M., *Elementary Number Theory*, Allyn and Bacon, Inc., 1980.
6. Courant, R. and H. robbins, *What is Mathematics?*, Oxford Univ. Press, Inc.,1996.
7. Johnsonbaug, R. and W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.
8. http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/history.html
9. http://phys.suwon.ac.kr/~kdh/sst/sst09.htm
10. http://www.arval.org.ve/metonic.htm
11. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knoff/Fibonacci/cfINTRO.html
12. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knoff/Fibonacci/fibnat.html