

## Optimal Control of Nonlinear Systems Using Block Pulse Functions

曹永鎬\*·安斗守\*\*

(Young-Ho Cho · Doo-Soo Ahn)

**Abstract** - In this paper, we presented a new algebraic iterative algorithm for the optimal control of the nonlinear systems. The algorithm is based on two steps. The first step transforms nonlinear optimal control problem into a sequence of linear optimal control problem using the quasilinearization method. In the second step, TPBCP(two point boundary condition problem) is solved by algebraic equations instead of differential equations using BPF(block pulse functions). The proposed algorithm is simple and efficient in computation for the optimal control of nonlinear systems. In computer simulation, the algorithm was verified through the optimal control design of Van del pole system and Volterra Predatory-prey system.

**Key Words** : nonlinear system(비선형 시스템), quasilinearization(준선형화), optimal control(최적제어), BPF(블럭펄스 함수)

## 1. 서 론

현대 사회가 산업화됨에 따라 첨단기술이 복합된 시스템들이 운용되기 시작하면서 이들에 포함된 비선형 요소에 대한 정밀한 제어의 필요성이 대두되고 있다. 최근에 비선형 시스템에 대한 이론적인 연구가 많이 이루어지고 있는데 이 중 대표적인 것이 시간영역에 바탕을 둔 최적제어 이론이다. 일반적으로 많이 이용되고 있는 비선형계의 최적제어 기법은 수치해석에 바탕을 둔 준선형화법을 들 수 있다. 기존의 방법은 비선형 해밀토니안 방정식에 준선형기법을 적용하여 방정식의 해를 구하여 최적화 문제를 해결하였다. 그러나 이러한 방법은 어느 한 경계조건으로 시스템의 상태와 상호상태(costate)의 궤적을 추측함으로써 비선형 방정식의 해를 구하게 됨으로 초기 상태와 상호상태의 궤적을 어떻게 추측하느냐에 따라 이 알고리즘의 수렴성이 결정된다. 그러나 시스템의 상태는 제어 시스템 대상의 특성을 고려하여 추측할 수 있으나 상호상태의 궤적은 추측하기가 매우 어려운 것으로 알려져 있다[1]. 또한 비선형 방정식을 풀기 위해 동차해(homogeneous solution)와 비동차해(nonhomogeneous solution)에 대한 궤적을 저장하게 됨으로 많은 컴퓨터 저장 용량을 필요로 하는 문제점을 갖는다[2-3].

시스템의 해석, 간단화, 최적제어 및 설계 등의 연구에 블럭펄스(block pulse)함수 및 월쉬(Walsh), 하알(Haar)함수 등의 직교함수가 널리 이용되고 있다[4-5]. 직교함수를 이용

한 대수적 접근 방식은, 1973년 Corrington 그리고 1975년 Chen과 Hsiao에 의해 적분을 위한 월쉬 연산행렬이 정의된 이후로 널리 이용되기 시작했다. 본 연구에서 블럭펄스 함수를 이용한 이유는 미·적분 방정식 및 비선형 방정식으로 표현되는 시스템의 제반 문제를 대수 연립 방정식으로부터 해결할 수 있고, 계산이 간편하며, 알고리즘 개발이 쉽기 때문이다[4-9].

본 논문에서는 공칭 상태궤적과 공칭 제어입력 중심으로 준선형화 기법을 이용해 평가함수와 비선형 상태방정식을 전개하여 비선형 최적화 문제를 선형 시변 형태로 표현된 최적화문제의 반복 형태로 변환시켰다. 또한 선형 시변 시스템에 대한 최적제어의 구현에 있어서, 행렬 리카티(Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하는 문제를 포함하고 있는데 본 연구에서는 블럭펄스 함수를 도입하여 리카티 방정식의 해를 대수 연립방정식으로부터 결정할 수 있는 알고리즘을 개발·합성하였다. 여기서 얻어진 상태와 입력에 대한 계수 값은 다음 단계의 준선형화 기법으로 평가함수와 비선형 상태방정식을 전개하는데 사용되어진다. 그러므로 예측하기 어려운 상호상태의 궤적을 추측하거나 비선형 해밀토니안 방정식을 풀기 위해 필요했던 메모리 소모를 줄일 수 있는 새로운 비선형 최적제어 알고리즘을 제시하였다.

## 2. 블럭펄스 함수

블럭펄스 함수는 연속계를 이산계로 변환하는데 편리하며, 컴퓨터 연산에 직접 적용할 수 있는 계산상의 잇점이 있다. 블럭펄스 함수  $\Psi_k(t)$ 는 구간  $0 \leq t < t_f$ 에서 식(2.1)과 같이 정의되며, 식(2.2), (2.3)을 만족하는 직교함수이다[4-9].

\* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 博士課程

\*\* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 教授 · 工博

接受日字 : 1999年 7月 30日

最終完了 : 2000年 2月 3日

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 & (k-1)\frac{t_f}{m} \leq t < k\frac{t_f}{m} \\ 0 & \text{그 외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

단,  $k=1, 2, \dots, m$

$$\Psi_k(t) \Psi_l(t) = \begin{cases} \Psi_k & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{t_f} \Psi_k(t) \Psi_l(t) dt = \begin{cases} \frac{t_f}{m} & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.3)$$

블럭펄스 함수  $\Psi_k(t)$ 는  $k$ 번째 세부구간에서만 +1 값을 갖고, 나머지 구간에서는 모두 0이므로 절대 적분 가능한 임의의 함수  $x(t)$ 는 블럭펄스 함수로 다음과 같이 유한급수 전개된다.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^m X_k \Psi_k(t) \quad (2.4)$$

$$X_k = \frac{m}{t_f} \int_0^{t_f} x(t) \Psi_k(t) dt = \frac{m}{t_f} \int_{(k-1)\frac{t_f}{m}}^{k\frac{t_f}{m}} x(t) dt \\ \cong \frac{1}{2} [x(k\frac{t_f}{m}) + x((k-1)\frac{t_f}{m})] \quad (2.5)$$

단,  $k=1, 2, \dots, m$

블럭펄스 함수의 정방향 적분과 역방향 적분은 다음과 같이 주어진다[4][7].

$$\text{정방향적분} : \int_0^t \Psi(\tau) d\tau \cong P \Psi(t) \quad (2.6)$$

$$\text{역방향적분} : \int_t^{t_f} \Psi(\tau) d\tau \cong \hat{P} \Psi(t) \quad (2.7)$$

여기서 블럭펄스 함수의 정방향 적분 연산행렬 및 역방향 적분 연산행렬은 다음과 같고  $\hat{P} = -P^T$ 의 관계가 있다.

$$P = \frac{t_f}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\hat{P} = \frac{t_f}{m} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

이와 같은 블럭펄스 함수의 특성을 이용하면 미분방정식을 그에 상응한 대수 방정식으로 변환할 수 있는데 선형 시변 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \quad (2.9)$$

$$x(t_0) = x_0$$

단,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $A(t)$ 와  $B(t)$ 는 적절한 차수를 갖는다.

식(2.9)의 상태방정식에 블럭펄스 함수의 특성을 적용하면 반복적인 연산 과정에 의해 다음과 같은 상태방정식의 해를 얻을 수 있다[7].

$$X_1 = [I - \frac{t_f}{2m} A_1]^{-1} [X_0 + \frac{t_f}{2m} B_1 U_1] \quad (2.10)$$

$$X_{k+1} = [I - \frac{t_f}{2m} A_k]^{-1} [(I + \frac{t_f}{2m} A_k) X_k + \frac{t_f}{2m} (B_k U_k + B_{k+1} U_{k+1})] \quad (2.11)$$

단,  $k=1, 2, 3, \dots, m-1$

여기서,  $A_k, B_k, X_k, U_k$ 는 각각  $A(t), B(t), x(t), u(t)$ 의  $(k-1)\frac{t_f}{m}$ 과  $k\frac{t_f}{m}$  구간의 평균값으로 블럭펄스 함수의 계수벡터이다.

### 3. 비선형 최적제어

본 절은 준선형화 기법을 이용하여 비선형 최적화문제를 반복적인 선형 최적화 문제로 변환하는 과정을 기술하고자 한다. 다음과 같은 일반적인 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$

위와 같은 시스템을 구속조건으로 최소화할 평가 함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (3.2)$$

단,  $Q \geq 0, R > 0$

평가함수와 상태방정식을 각각 공칭 상태계적( $x^h$ )과 제어 입력( $u^h$ )을 중심으로 준선형화 기법을 적용하면 다음과 같은 연속적인 선형 시스템 형태의 최적화 문제로 바뀐다. 즉 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}^{(h+1)}(t) = A(t) x^{(h+1)}(t) + B(t) u^{(h+1)}(t) + G(t) \quad (3.3)$$

$$x^{(h+1)}(0) = x_0$$

$$\text{여기서, } G(t) = f(x^h, u^h, t) - A(t) x^h(t) - B(t) u^h(t) \quad (3.4)$$

$$A(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x(t)} \Big|_{x^h, u^h} \quad (3.5)$$

$$B(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u(t)} \Big|_{x^h, u^h} \quad (3.6)$$

$h$ 는 반복횟수를 나타낸다.

또한 평가함수는 다음과 같다.

$$J^{h+1} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^{(h+1)T}(t) Q x^{(h+1)}(t) + u^{(h+1)T}(t) R u^{(h+1)}(t)) dt \quad (3.7)$$

$h$ 번째 상태계적과 최적 입력은 공칭 계적이므로 식(3.3)의 시스템은 선형 시변 시스템이지만 비선형 항인  $G(t)$ 가 시변 형태로 포함되어 있다. 이 항은 명령신호로 선형 시스템에 영향을 줌으로 비선형 특성을 추종하게 한다. 식(3.3)~식(3.7)의 형태로 표현된 시스템의 최적제어 입력을 결정하는 필요조건은 Euler-Lagrange 방정식에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{x}^{(h+1)}(t) = A(t)x^{(h+1)}(t) + B(t)u^{(h+1)}(t) + G(t) \quad (3.8)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx^{(h+1)}(t) - A^T(t)\lambda(t) \quad (3.9)$$

$$u^{(h+1)}(t) = -R^{-1}B^T(t)\lambda(t) \quad (3.10)$$

여기서  $x(0) = x_0, \lambda(t_f) = 0$ 이다.

식(3.8)~식(3.10)을 이용하여 해밀토니안 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{(h+1)}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B^T(t) \\ -Q & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(h+1)}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

식(3.11)과 같이 주어진 2점 경계치 문제(two point boundary condition problem)를 풀어서 한시적인 최적입력인 식(3.10)을 구할 수 있다. 얻어진 최적상태와 입력이 다음과 같은 오차 식을 만족하면 비선형 시스템의 최적 상태와 제어입력으로 간주한다.

$$\text{Error} = \|x^{(h+1)} - x^{(h)}\| \leq \text{given error} \quad (3.12)$$

만약 식(3.12)의 오차 식을 만족하지 않으면 얻어진 상태와 입력을 다음 단계의 공칭계적으로 갱신한다. 그래서 새롭게 갱신된 공칭계적을 이용하여 다음 단계의 준선형화 기법에 적용하여 새롭게 갱신된 선형 시변 형태의 상태방정식 식(3.3)을 만든다. McGill과 Kenneth는 식(3.1)이 연속이고, 식(3.5)와 식(3.6)이 Lipschitz조건을 만족하며 초기 추측 값이 실제 해에 충분히 가깝다면 식(3.12)의 오차는 수렴함을 증명하였다[1].

#### 4. 블럭펄스 함수를 이용한 최적제어

앞 절에서 선형 시변 시스템에 대한 최적 상태와 입력을 얻기 위해서는 식(3.11)과 같은 2점 경계치 문제를 해결해야 한다. 그러므로 본 절에서는 블럭펄스 함수의 역방향 적분 행렬을 이용해 간단한 대수 반복 연산만으로 2점 경계치 문제를 해결할 수 있는 일반화된 반복 알고리즘을 제시하고자 한다. 반복 횟수를 표시하는 첨자  $h$ 는 표기상 간편을 위해 생략하고 전개한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

여기서  $L = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B^T(t) \\ -Q & -A^T(t) \end{bmatrix}$ 이다.

식(4.1)의 해를 구하기 위해서 상태전이 행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

이 상태전이 행렬은 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t)L \quad (4.3)$$

$$\Phi(t_f, t_f) = I \quad (4.4)$$

상태전이 행렬을 이용하여 식(4.1)의 해를 다음과 같이 얻을

수 있다.

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\text{단, } \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \quad (4.6)$$

경계조건을 이용하면 식(4.5)에서 상호상태의 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t)\Phi_{21}(t_f, t)x(t) \\ &\quad -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t)V_2(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

위에서 구한 식을 식(4.1)에 대입하면

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + Z(t) \quad (4.8)$$

단,

$$F(t) = A(t) + B(t)R^{-1}B^T(t)\Phi_{22}^{-1}(t_f, t)\Phi_{21}(t_f, t)$$

$$Z(t) = B(t)R^{-1}B^T(t)\Phi_{22}^{-1}(t_f, t)V_2(t) + G(t) \quad (4.9)$$

이고, 여기서  $F(t)$ 는 궤환이득 행렬이고  $Z(t)$ 는 명령신호로써 시스템의 파라미터와 비선형항  $G(t)$ 에 영향을 받는다. 상태전이 행렬과  $V_2(t)$ 를 구해서 식(4.8)의 해를 구함으로써 최적제어 입력을 구할 수 있다. 본 연구에서는 블럭펄스 함수를 이용하여 이를 수행하고자 한다.

식(4.3)의 해를 얻기 위해  $\Phi(t_f, t)$ 을 블럭펄스 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k \Psi_k \quad (4.10)$$

$$\text{단, } \varphi_k = \begin{bmatrix} \varphi_{11k} & \varphi_{12k} \\ \varphi_{21k} & \varphi_{22k} \end{bmatrix}$$

식(4.3)에 블럭펄스 함수를 적용하여 역방향 적분을 취하면 다음과 같은 일반화된 반복 알고리즘으로부터 상태전이 행렬을 구할 수 있다.

$$\varphi_m = [I - (\frac{t_f}{2m})L]^{-1} \quad (4.11)$$

$$\varphi_k = \varphi_{k+1} [I + (\frac{t_f}{2m})L] [I - (\frac{t_f}{2m})L]^{-1}$$

단,  $k = m-1, m-2, \dots, 1$

$G(t)$ 와  $V_2(t)$ 를 블럭펄스 함수로 전개하면

$$G(t) = \sum_{k=1}^m g_k \Psi_k(t) \quad (4.12)$$

$$V_2(t) = \sum_{k=1}^m v_{2k} \Psi_k(t) \quad (4.13)$$

이고, 식(4.6)에 블럭펄스 함수를 적용하여 역방향 적분을 이용하면 다음과 같은 대수 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$v_{2m} = \frac{t_f}{2m} \phi_{22m} g_m \quad (4.14)$$

$$v_{2k} = v_{2k+1} + \frac{t_f}{2m} (\phi_{22k} g_k + \phi_{22k+1} g_{k+1})$$

단,  $k = m-1, m-2, \dots, 1$

$F(t), Z(t), A(t)$  그리고  $B(t)$ 를 각각 블럭펄스 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(t) = \sum_{k=1}^m f_k \Psi_k(t) \quad (4.15)$$

$$Z(t) = \sum_{k=1}^m z_k \Psi_k(t) \quad (4.16)$$

$$A(t) = \sum_{k=1}^m a_k \Psi_k(t) \quad (4.17)$$

$$B(t) = \sum_{k=1}^m b_k \Psi_k(t) \quad (4.18)$$

식(4.9)에 블럭펄스 함수를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$f_k = a_k + b_k R^{-1} b_k^T \phi_{22k}^{-1} \phi_{21k} \quad (4.19)$$

$$z_k = g_k + b_k R^{-1} b_k^T \phi_{22k}^{-1} v_k \quad (4.20)$$

결국 식(4.8)의 해는 다음과 같은 일반화된 반복 알고리즘으로부터 얻을 수 있다.

$$X_1 = \left[ I - \frac{t_f}{2m} f_1 \right]^{-1} \left[ X_0 + \frac{t_f}{2m} z_1 \right] \quad (4.21)$$

$$X_{k+1} = \left[ I - \frac{t_f}{2m} f_{k+1} \right]^{-1} \left[ \left( I + \frac{t_f}{2m} f_k \right) X_k + \frac{t_f}{2m} (z_k + z_{k+1}) \right] \quad (4.22)$$

단,  $k=1, 2, \dots, m-1$

식(4.21),(4.22)로부터  $x(t)$ 의 해를 구할 수 있고 여기에서 잠정적인 최적제어 벡터  $u(t)$ 를 구할 수 있게 된다. 이 상에서와 같이 잠정적인 최적제어 입력이 비선형 시스템의 최적제어 입력인가는 식(3.12)의 오차 식을 이용하여 판별한다.

### 5. 모의 실험

앞 절에서 유도한 비선형 최적제어 알고리즘을 Van del pol 시스템과 Volterra Predatory-prey 시스템에 적용함으로써 그 유용성을 입증하여 보자.

#### 5.1 Van del pol 시스템

Van del pol시스템은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) + u(t) & x_2(0) &= 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

이때, 최소화할 평가함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \quad (5.2)$$

위 시스템에 대한 선형화 행렬  $A(t)$ ,  $B(t)$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$A(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1(t)x_2(t) & 1 - x_1^2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$B(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

그리고 비선형 항인  $G(t)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1^2(t)x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

그림 1과 그림 2는 샘플링 주기를  $m=50$ , 오차 한계 값은  $1.0 \times 10^{-3}$ 로 설정하여 제안된 알고리즘을 이용해 시뮬레이션 한 결과이다. 이때 그림 1은 최적상태 궤적을 나타낸 것이고 그림 2는 최적제어 입력의 궤적이다. 이와 같은 Van del pol 시스템은 여러 논문에서 다루어지고 있는데 표 1에

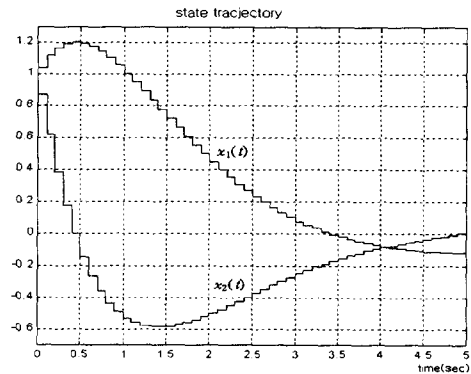


그림 1 최적 상태 궤적  
Fig. 1 Optimal state trajectory

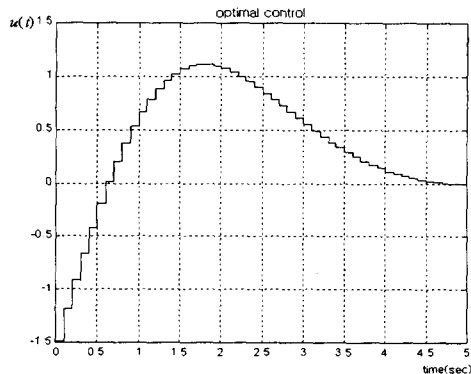


그림 2 최적 제어 입력  
Fig. 2 Optimal control input

있듯이 [10]에서는 평가함수 값이 2.6188, [11]에서는 2.5941을 얻었다. 본 연구 방법으로는 2.5605을 얻어 제안한 알고리즘을 이용하게 되면 개선된 평가함수 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 표 2는 준선형화 기법의 반복 계산 횟수와 오차의 수렴정도를 나타낸 것인데 5번의 반복에 의해 원하는 허용 오차 안에 수렴함을 알 수 있다.

표 1 평가함수 값 비교  
Table 1 Comparison of performance index J

방 법	평가함수 J
Pearson[10]	2.6188
Mahmoud[11]	2.5941
본 연구방법	2.5605

표 2 오차의 수렴정도  
Table 2 Convergence of error

반복 횟수	오차 값
1	57.9645
2	23.2887
3	2.0814
4	0.0330
5	8.5380E-04

5.2 Volterra Predatory-prey 방정식

다음의 Volterra Predatory-prey 방정식으로 표현되는 비선형 2차 시스템을 고려하자.

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + u_1(t) \quad x_1(0) = 1.0 \quad (5.6)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -x_2(t)x_1(t) + x_2 + u_2(t) \quad x_2(0) = 0.5$$

최소화할 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \quad (5.7)$$

블럭펄스 함수의 전개 항수 (m)를 50항 오차 한계값을  $1.0 \times 10^{-3}$ 로 설정하여 시뮬레이션 하였다. 그림 4와 그림 5

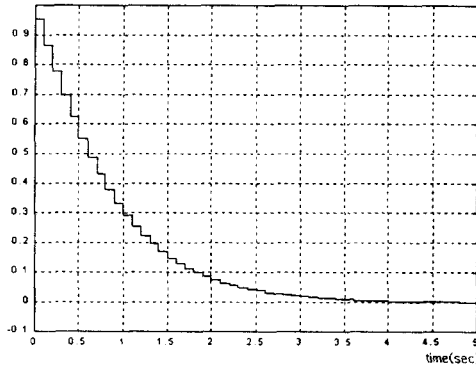


그림 3 최적 상태궤적  $x_1(t)$   
Fig. 3 Optimal state trajectory  $x_1(t)$

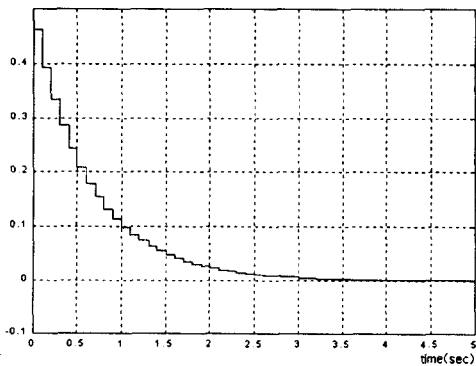


그림 4 최적 상태궤적  $x_2(t)$   
Fig. 4 Optimal state trajectory  $x_2(t)$

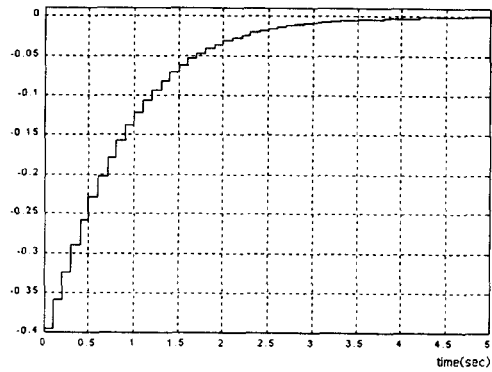


그림 5 최적 제어 입력  $u_1(t)$   
Fig. 5 Optimal control input  $u_1(t)$

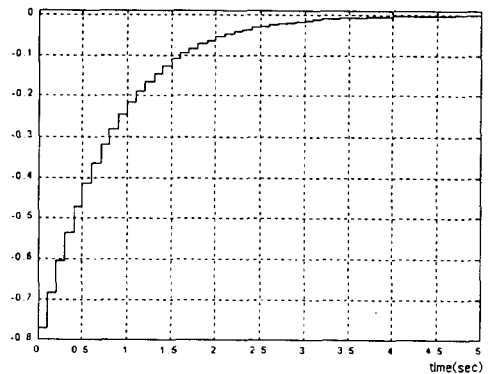


그림 6 최적 제어 입력  $u_2(t)$   
Fig. 6 Optimal control input  $u_2(t)$

는 최적 상태를 나타낸 것이고 그림 6과 그림 7은 최적 입력이다. 제안된 알고리즘을 이용해 평가함수는 0.4367의 값을 얻었다.

표 3은 준선형화 기법의 반복 횟수와 오차의 수렴정도를 나타낸 것인데 5번만에 주어진 오차에 만족시킴을 알 수 있다.

표 3 오차의 수렴정도  
Table 3 Convergence of error

반복 횟수	오차 값
1	43.1990
2	9.7604
3	0.1887
4	0.0014
5	5.2022E-04

6. 결 론

본 연구에서는 준선형화 기법에 블럭펄스 함수를 적용하여 비선형 시스템에 대한 새로운 최적제어 알고리즘을 제안했는데 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 기존의 방법은 상태  $x(t)$ 와 상호상태  $\lambda(t)$ 를 예측해야 한다. 그러나 시스템의 상태는 물리적인 조건을 고려하여 예측할 수 있지만 상호상태를 예측하기는 상당히 힘들다는 단점을 갖고 있다. 제안된 방법은 상호상태 대신 제어입력을 초기에 예측함으로 준선형화 기법이 가지는 초기 추측에 의한 발산을 감소시킬 수 있었다.
- (2) 모의 실험에서 Van del Pol 시스템의 경우 제안한 알고리즘이 다른 방법에 비해 평가함수 값이 개선되었음을 알 수 있어 본 알고리즘의 우수성을 확인하였다.
- (3) 본 연구는 최적제어 입력을 구하는 과정에 있어서 발생하는 비선형 미분 방정식과 적분 방정식을 쉽게 구할 수 있는 반복적 형태의 변환된 대수방정식으로부터 직접 제어 입력을 결정할 수 있는 장점이 있다.
- (4) 기존의 방법은 해밀토니안 방정식에 대해 일반 해와 특별 해를 구하여 값을 저장하는데 반해 본 연구방법은 블럭펄스 함수를 이용하여 직접 해를 구할 수 있으므로 컴퓨터 저장용량을 감소시킬 수 있다.
- (5) 블럭펄스 함수는 다른 직교함수들과는 달리 전개 항수에 제한을 받지 않는 장점을 갖는다. 그러나 정확한 해를 얻기 위해서는 블럭펄스 함수의 전개 항수를 늘려야만 했는데 이에 비례하여 연산 시간이 길어지므로 적절한 전개 항수에 대한 해석적인 선정방법은 앞으로 연구해야 할 과제로 남는다.

참 고 문 헌

- [1] D. E. Kirk, Optimal Control Theory, Prentice-hall Inc., 1970.
- [2] M. F. Hassan and M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part I. Generalisation of the Method of Takahara", Large Scale Systes, VOL. 2, pp. 65-79, 1981.
- [3] M. F. Hassan and M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part II. Algorithms Based on Costate C-ordination ", Large Scale Systems, VOL. 2, pp. 81-95, 1981.
- [4] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, Springer-verlag, 1992.
- [5] K. B. Datta & M. Mohan, Orthogonal Functions in Systems and Control, Word Scientific Publishing Co., 1995.
- [6] N. S. Hsu and B. Cheng, "Analysis and Optimal Control of time-varying linear systems Via block-pulse functions", Int. J. Control, Vol. 33, No. 6,

pp. 1123-1133, 1981.

- [7] 이한석, 조영호, 이명규, 안두수, "블럭펄스 함수에 의한 비선형계의 2계층 최적제어", 대한전기학회 논문지, 47권 4호, pp. 494-502, 1998.
- [8] W. Shienyu, "Convergence of block pulse series approximation solution for optimal control problem", Int. J. Systems Sci. Vol. 21, No. 7, pp. 1355-1368, 1990.
- [9] A. Deb, G. Sarkar, M. Bhattacharjee and S. K. Sen, "All-integrator Approach to Linear SISO Control System Analysis using Block Pulse Functions (BPF)", J. Franklin Inst., Vol. 334B, No. 2, pp. 319-335, 1997.
- [10] J. D. Pearson, "Approximation methods in optimal control", J. Electron Control, Vol. 13, pp. 435-469, 1962.
- [11] M. S. Mahmoud, "Closed-loop multilevel Control of large nonlinear systems via invariant imbedding techniques", Comput. Elect. eng. Vol. 4, pp. 3-23, 1977.

저 자 소 개



조 영 호 (曹 永 鎬)

1973년 8월 1일생. 1996년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업. 2000년 동 대학원 전기전자 컴퓨터공학부 박사수료. 현재 (주)광명제어 연구원

Tel : 0331-290-7167, Fax : 0331-290-7101  
E-mail : choyh@ece.skku.ac.kr



안 두 수 (安 斗 守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1991년~1992년 당학회 부회장 역임. 1997~1998년 Univ. of British Columbia 교환교수. 현재 성균관대 공대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 0331-290-7167, Fax : 0331-290-7101  
E-mail : dsahn@nature.skku.ac.kr