

# 비등방성 원통형 셸의 안정성에 관한 연구

## A Study on the Stability of Anisotropic Cylindrical Shells

박 근 우<sup>1)</sup> · 임 성 순<sup>2)</sup> · 장 석 윤<sup>2)</sup>

*Park Keun Woo Yhim Sung Soon Chang Suk Yoon*

요 약 : 본 연구의 목적은 비등방성 원통형 셸이 원통길이방향으로 압축하중을 받는 경우 면외방향 거동의 안정성에 대한 해석이다. 복합재료로 이루어진 비등방성 원통형 셸의 안정성 해석은 해석적인 방법으로는 해를 얻을 수 없으므로 수치해석 기법중의 하나인 유한차분법을 사용하였다. 원통형 셸은 기하학적 특성상 원통길이방향의 압축하중을 원주방향의 면내거동으로 저항하는 구조형식이므로 원주방향 강성변화에 중점을 두고 연구를 수행하였다. 또한 비등방성 원통형 셸이 원통길이방향으로 압축하중을 받는 경우에 발생하는 거동에 대한 예측이 힘들기 때문에 화이버 보강각도 변화, 곡률변화, 중심각 변화, 형상비 변화에 따른 안정성 문제를 연구하였다. 본 연구의 결과에 의하면 원통길이방향으로 압축하중을 받는 비등방성 원통형 셸은 원주방향 강성에 의하여 안정성에 큰 변화가 있다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 압축하중을 받는 비등방성 원통형 셸은 원주방향에 대하여 보강하는 것이 셸 구조의 안정성을 높일 수 있을 것으로 예측된다.

ABSTRACT : In this paper, stability analysis is carried out for the out of plane behaviors under compressive loads to the direction of the generator in anisotropic cylindrical shells. It is not easy to obtain the analytic solutions about the stability analysis of anisotropic cylindrical shells consisted of composite materials. For solving this problems, this paper used the finite difference method which is one of the numerical methods. Geometrical property of cylindrical shells transforms the compressive loads into the inplane behaviors. This paper studied the change of stiffness in the direction of the circumferential and stability of shells according to change of fiber angle, curvature, subtended angle and aspect ratio. From result of this study, anisotropic cylindrical shells under compressive loads to the direction of the generator vary greatly with respect to the change of the circumferential stiffness. Therefore, it will be more safe to strengthen the circumferential stiffness of anisotropic cylindrical shells under compressive loads.

1) 청석엔지니어링 SOC사업부  
2) 서울시립대 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2000년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

셸 구조에 사용하는 재료는 콘크리트나 강재가 주로 사용되어 왔으나 최근에는 건설기술의 향상과 구조물의 대형화에 따라 경량 재료의 사용이 증가하고 있다. 이러한 경량 재료는 중량이 가볍고 충분한 강성을 가지며 내구성이 우수한데 이 중에서 대표적으로 각광을 받는 재료가 복합재료이다.

복합재료는 두 가지 이상의 재료적 특성 즉, 이방성 재료 특성을 갖는 서로 다른 재료들을 적층시켜 전체적인 강성을 효과적으로 발휘하도록 제작된 구조재료를 말한다. 특히 방향성을 갖는 단일소재만으로 구성된 구조재에 비해 구조적 약점을 갖는 방향을 보강하도록 적층시킨 복합재료는 구조적 효율성이 뛰어난 구조물로 제작할 수 있는 장점을 지니고 있을 뿐만 아니라 손쉽게 제작할 수 있다는 점에서 높이 평가받는 구조재료이다. 그러므로 여러 선진국에서는 경량구조물로 제작이 요구되는 선박, 항공기, 자동차 산업뿐만 아니라 토목, 건축 산업에서도 복합재료를 사용하려는 시도가 최근에 이루어지고 있다. 그러나 복합재료가 자체 중량에 비하여 높은 강성 및 강도를 가지고 있고 내구성도 우수하지만 이론이 복잡하고 어렵기 때문에 토목 구조물에 적용하기 위한 많은 연구와 실험이 지속되고 있다.

본 연구는 복합 적층 원통형 셸 구조를 해석대상으로 하여 원통길이 방향으로 면내 압축력을 받을 때 좌굴해석을 수행함으로써 적층 원통형 셸 구조의 좌굴거동 특성을 분석함을 연구 목적으로 한다. 이를 위하여 선형이론에 의한 강도매트릭스와 기하학적 비선형 강도매트릭스를 계산하여 고유치문제로 이상화한 후 좌굴하중을 결정하였다. 특히 본 연구에서는 공식화하기 쉽게 각종 구조물에 적절히 사용할 수 있는 수치해석법 중 유한차분법을 사용하여 셸의 기하학적 조건과 복합재료의 사용에 따른 다양한 좌굴거동 특성을 분석하고자 한다. 복합 적층 원통형 셸에 대한 처

짐해석은 기존의 여러 논문에서 연구 발표되었으나 좌굴해석은 아직까지 미비한 상태이다. 특히, 복합 적층 원통형 셸은 비등방성 구조물이므로 해석적인 방법으로는 처짐해석에 대한 해를 얻기가 어렵고 좌굴해석은 거의 불가능하므로 본 연구에서는 수치해석기법 중 기본방정식을 유도하여 기본방정식에 직접 적용하여 해를 얻는 유한차분법을 사용하였다. 또한 셸 구조는 기하학적 특성상 압축력에 대하여 곡면 방향의 면내거동으로 저항하는 구조형식이므로 기하학적 형상에 따른 면내거동의 영향에 대하여 집중적인 연구가 필요하다.

그러므로 본 연구에서는 셸 구조의 기하학적 형상 변화, 복합 재료의 적층형식과 복합재료의 재료축을 변화시키면서 좌굴거동 특성을 분석하였다. 또한 셸 구조의 좌굴거동 특성을 지배하는 중요한 다른 조건은 셸 구조의 반경과 원통길이 방향 길이와 반경의 비인 형상비이다. 따라서 본 연구에서는 셸 구조의 반경을 고정시키고 원통길이 방향의 길이변화에 따른 좌굴거동 특성에 대한 분석을 하고자 한다.

## 2. 기본이론

본 연구에서는 Vinson<sup>(7)</sup>이 제시한 전단변형 효과를 고려하여 비등방성 부분 원통형 셸의 안정성 해석을 하였다. 그림 1은 해석모델의 미소 요소에 대한 좌표계 및 단면력을 나타낸 것이다.

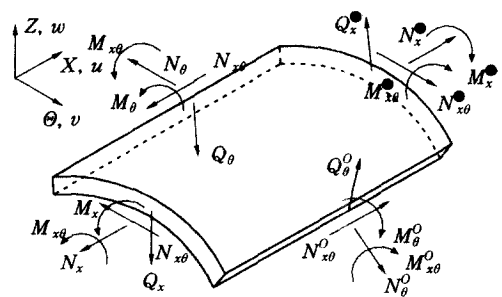


그림 1. 셸의 미소 요소의 좌표계 및 단면력

비등방성 부분 원통형 쉘의 안정성 해석에 사용된 자유도는 그림 1에 나타난  $X, \theta, Z$ 축 방향의 변위인  $u, v, w$ 와  $\theta, X$ 축에 대한 회전각인  $\phi_x, \phi_\theta$ 이다.

비등방성 부분 원통형 쉘의 단면력 및 휨모멘트와 변형도의 관계는 식 (1)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{x\theta} \\ \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (1)$$

여기서,  $(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=0}^N \int_{z_{k-1}}^z (1, z, z^2) C_{ij}^{(k)} dz$ 이고,  $A_{ij}$ 는 면내력 강도이고,  $B_{ij}$ 는 휨-면내력 강도,  $D_{ij}$ 는 휨강도를 의미한다. 또한  $C_{ij}^{(k)}$ 는  $k$ 번째 층에서의 강성계수를 나타낸다.

$Z$ 방향 전단변형에 의해 발생하는 전단력  $Q_i$ 는 식(2)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $A_{ij} = K_{ij} \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(k)} dz$  ( $i, j = 4, 5$ )가 되고,  $K_{ij}$ 는 전단보정계수이다.

비등방성 부분 원통형 쉘의 미소요소인 그림 1에 정의된 단면력 및 모멘트로 원통형 쉘의 평형방정식을 얻을 수 있다. 미소요소에서 정의된 힘과 모멘트의 평형조건을 사용하여 일반적인 원통형 쉘의 평형방정식을 나타내면 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + N_{cr} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial x} - Q_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $R$ 은 원통형 쉘의 직경이고,  $N_{cr}$ 은 원주 방향으로 작용하는 하중, 즉 좌굴하중을 의미한다. 단면력과 모멘트의 항으로 표현된 식 (3)에 식 (1)을 대입하고 변형률과 변위의 관계식을 대입하여 정리하면 식 (4)와 같이 변위에 대한 미분항으로 표현되는 기본방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A_i^k u_{i,xx} + B_i^k u_{i,xy} + C_i^k u_{i,yy} \\ + D_i^k u_{i,x} + E_i^k u_{i,y} + F_i^k u_i = O_i^k u_{i,xx} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $u_i = [u \ v \ w \ \phi_x \ \phi_y]$ 이고 아래첨자는 아래첨자에 대한 미분을 의미한다. 변위에 대한 계수 ( $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ )는 부록에 수록하였다.

### 3. 유한차분법

본 연구에서는 지금까지 수치해석방법으로 제시된 여러 가지 기법들 중에서 해석하고자하는 구조물의 기본방정식에 직접 적용할 수 있는 유한차분법을 사용하였다. 유한차분법은 변위의 미분항을 차분식으로 나타내는데 있어서 항의 수를 증가시킴으로서 해의 정확도를 향상시킬 수 있는 장점을 가지고 있으며, 또한 해석 구조체의 분할 수를 증가시킴으로써 보다 정확한 해를 얻을 수 있는 장점을 가지고 있다. 식 (4)와 같이 변위 미분항으로 유도된 비등방성 부분 원통형 쉘의 기본방정식에 유한차분법을 적용하면 미분방정식이 연립방정식의 형태로 바뀌게 되므로 이 연립방정식을 컴퓨터 프로그램화하면 해석이 용이하게 된다. 따라서 본 연구에서는 처짐의 항으로 표현된 기본 방정식에 유한차분법을 적용하여 해석적인 방법으로는 해석이 어려운 비등방성 원통형

셸의 좌굴거동 특성에 대하여 해석을 수행하였다. 셸 구조의 내부점에서는 중앙차분법을 사용하였고, 단순지지 경계에서는 가상점이 발생하므로 경계조건을 이용하여 가상점을 소거하여 셸 구조의 내부점으로 치환하였다. 부분 원통형 셸의 임의의  $j$ 선상에서 모든  $i$ 점에 대하여 차분식으로 표현하면 식 (5)와 같다. 식 (5.a)는 경계선상에서 차분식을 적용하여 정리한 것이고, 식 (5.b)는 내부점에서 차분식을 적용하여 정리한 것이다.

$$\begin{aligned} & [A^e]\{X_{j-1}\} + [B^e]\{X_j\} + [C^e]\{X_{j+1}\} \\ & = [A_g^e]\{X_{j-1}\} + [B_g^e]\{X_j\} + [C_g^e]\{X_{j+1}\} \end{aligned} \quad (5.a)$$

$$\begin{aligned} & [A]\{X_{j-1}\} + [B]\{X_j\} + [C]\{X_{j+1}\} \\ & = [A_g]\{X_{j-1}\} + [B_g]\{X_j\} + [C_g]\{X_{j+1}\} \end{aligned} \quad (5.b)$$

식 (5)에서 계수 매트릭스는  $i-1, i, i+1$ 점에서 각각의 자유도에 대한 값을 나타낸다. 그러므로 부분 원통형 셸에 차분식을 적용하여 전체 구조에 대하여 매트릭스 형태로 나타내면 식 (6)과 같다.

$$[K_S]\{X\} = \lambda [K_G]\{X\} \quad (6)$$

여기서  $[K_S]$ 는 비등방성 부분 원통형 셸 구조물의 시스템 매트릭스이고,  $[K_G]$ 는 기하학적 매트릭스,  $\lambda$ 는 셸 구조물의 고유치인 좌굴하중이고,  $\{X\}$ 는 고유벡터로 셸 구조물의 처짐 및 회전각을 의미한다. 식 (6)에서 고유치인  $\lambda$ 를 구하기 위해서는 식 (7)과 같이 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\det |[K_S] - \lambda [K_G]| = 0 \quad (7)$$

유한차분법으로 구성되는 시스템 매트릭스와 기하학적 매트릭스는 비대칭 매트릭스 형태를 가

지게 된다. 이런 비대칭 매트릭스의 고유치를 구하는 방법으로는 IMSL의 Householder법을 이용하였다. Householder방법은 비대칭 매트릭스 뿐만 아니라 공학적인 고유치 문제 해석에 널리 사용되고 있다. 이 방법은 시스템 매트릭스를 삼각대각선형태로 축약하여 반복적으로 역행렬 계산을 통해 삼각대각선 매트릭스의 고유벡터를 계산하게 된다. 이 벡터를 우리가 구하고자 하는 시스템 매트릭스의 고유벡터로 변환하여 임계좌굴하중을 계산하게 된다.

## 4. 해석 예 및 결과분석

### 4.1 해석모델

본 연구에서는 원통길이방향은 단순지지되고 원주방향은 고정지지된 부분 원통형 셸이 원통길이방향으로 압축하중을 받고 있는 경우에 대한 안정성 해석을 수행하였다. 그림 2는 본 연구의 해석 모델을 나타낸 것이다.

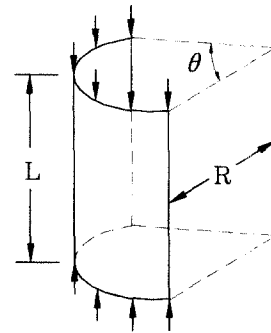


그림 2. 부분 원통형 셸의 해석 모델

본 연구에서는 재료의 기본적인 역학적 성질은 carbon fiber가 epoxy matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 경우로  $E_1=4000$ ,  $E_2=100$ ,  $\nu_{12}=0.25$ ,  $G_{12}=G_{13}=60$ ,  $G_{23}=50$ 이며, 4개의 층을 같은 두께로 적층시켜 해석을 수행하였다. 결과분석 및 비교의 편리성을 위하여 모든 계

수는 무차원화하였다.

#### 4.2 Reddy의 해석해와 비교

본 연구 프로그램에 대한 정확도를 검증하기 위하여 Reddy가 Lévy의 해석적인 해를 이용하여 구한 비대칭 판과 비교하였다. 그림 3은 좌굴 하중 결과를 비교한 것이다.

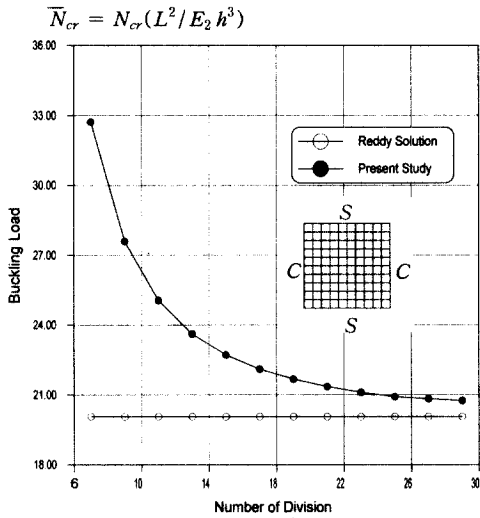


그림 3. Reddy의 판과 좌굴하중의 비교

부분 원통형 쉘의 반경을 크게하고 중심각을 아주 작게 하면 판이 되므로 판에 대한 Reddy의 해석해와 비교하면 본 연구에서 사용한 프로그램은 그림 3에 나타난 것과 같이 29×29에서 97%의 정확도를 보여주고 있다.

#### 4.3 화이버 보강각도 변화

그림 4는 원통형 쉘의 원통길이방향 길이와 반경의 비인 형상비가 0.5, 1.0, 1.5이고 중심각이 60°인 부분 원통형 쉘에 화이버 보강각도를 0°(원통길이방향)~90°(원주방향)까지 10°씩 증가시키면서 좌굴하중의 변화를 분석한 것이다. 좌굴하중은 형상비가 커지고 화이버가 원주방향으

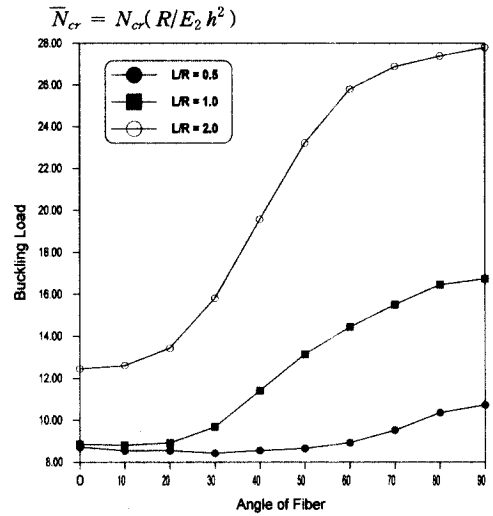


그림 4. 부분 원통형 쉘의 형상비와 화이버 보강각도에 따른 좌굴하중

표 1. 앵글 플라이로 보강된 경우의 좌굴하중

보강각도	$[\theta/\theta/\theta/\theta]$	$[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$	$[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$
0°	8.84790	8.84790	8.84790
10°	8.81412	8.99162	8.78479
20°	8.91195	9.24409	9.04641
30°	9.67664	10.24511	10.12937
40°	11.40013	12.50024	12.40963
50°	13.12681	15.83506	15.77225
60°	14.43514	21.09415	21.08847
70°	15.50994	23.35435	24.15763
80°	16.44904	20.34753	20.39032
90°	16.72687	16.72687	16.72687

로 보강됨에 따라 커진다는 것을 알 수 있다. 이는 원통길이방향으로 작용하는 압축하중을 원주방향의 면내거동으로 저항하므로 원주방향의 강성이 증가하면 보다 큰 하중을 견딜 수 있다는 것을 의미한다. 표 1은 화이버가 앵글플라이로 보강된 경우 좌굴하중의 변화를 나타낸 것이다. 화이버가 앵글플라이로 보강된 경우에는 원주방향보다 20°~30°정도 적은 보강각도에서 좌굴하중이 가장 크게 나타난다.

#### 4.4 중심각 변화에 따른 결과분석

비등방성 부분 원통형 셸의 중심각 변화에 따른 안정성 해석을 위해 원통길이방향길이  $L$ 과 반경  $R$ 을 같게 하고 중심각을  $15^\circ \sim 180^\circ$ 까지  $15^\circ$  간격으로 증가시키면서 좌굴하중의 변화를 해석하였다. 원통형 셸의 중심각을 변화시킨 경우 중심각이  $60^\circ$  이상에서는 좌굴하중이 일정한 값에

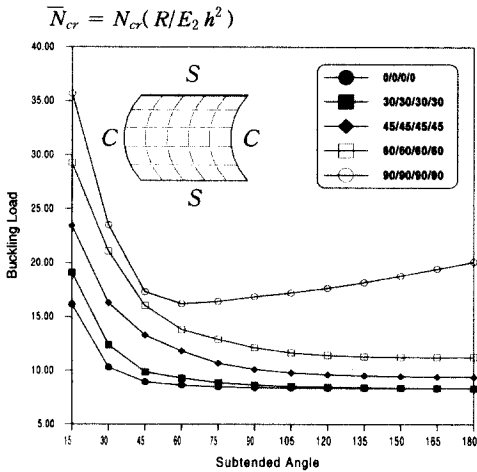


그림 5. 중심각 변화에 따른 좌굴하중 (화이버가 한 방향으로 보강된 경우)

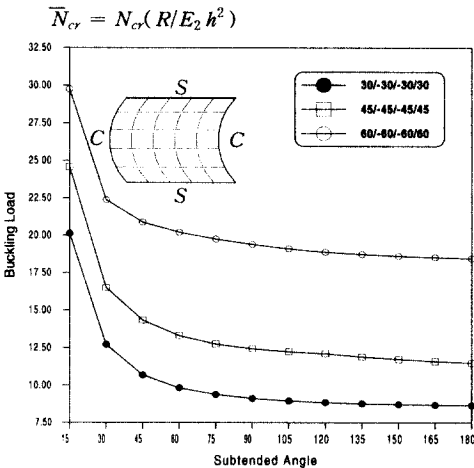


그림 6. 중심각 변화에 따른 좌굴하중 (화이버가 대칭 앵글 플라이로 보강된 경우)

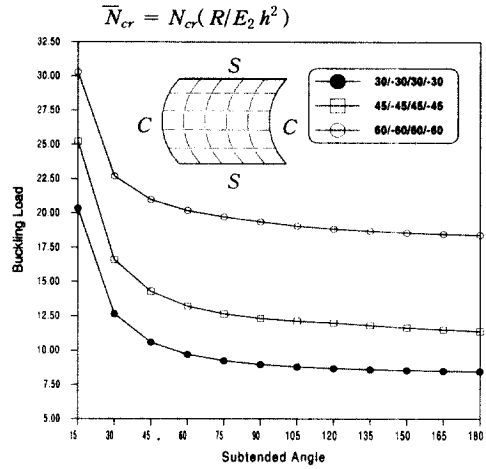


그림 7. 중심각 변화에 따른 좌굴하중 (화이버가 역대칭 앵글 플라이로 보강된 경우)

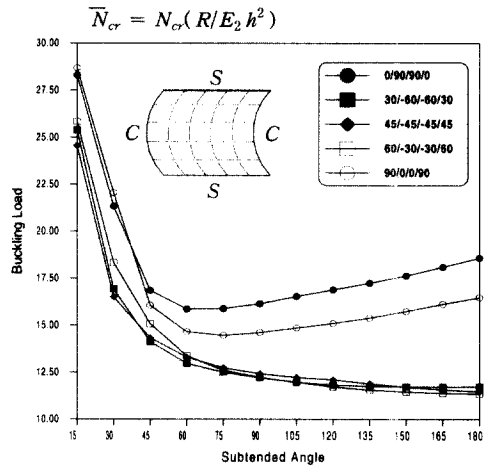


그림 8. 중심각 변화에 따른 좌굴하중 (화이버가 크로스 플라이로 보강된 경우)

수렴하는 하게 된다. 그러나 원주방향으로 보강된 경우에는  $60^\circ$  이상이 되면서 좌굴하중이 증가하는 특성을 보여주고 있다.

그림 5~8은 비등방성 부분 원통형 셸의 중심각을 변화시키고 화이버의 보강각도를 변화시키면서 좌굴하중의 변화를 그래프로 나타낸 것이다.

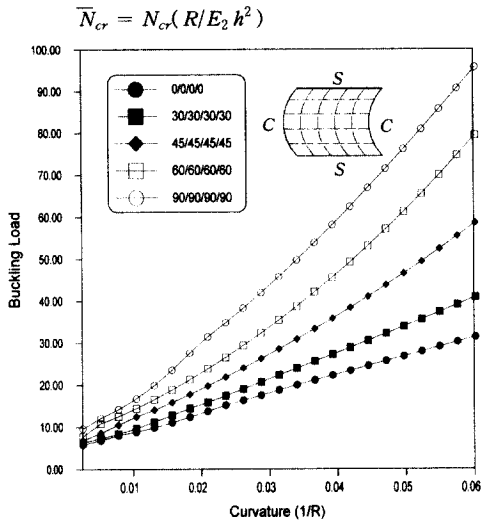


그림 9. 곡률변화에 따른 좌굴하중(화이버가 한 방향으로 보강된 경우)

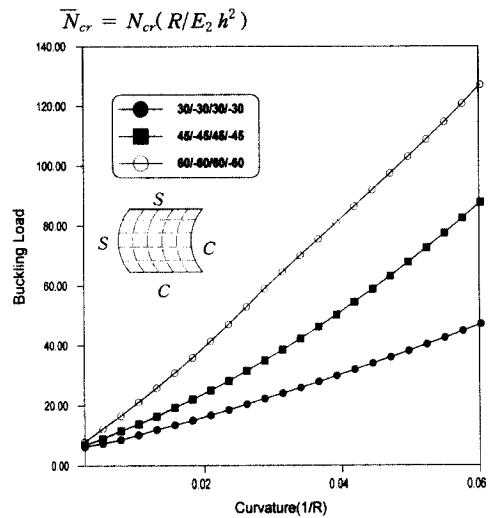


그림 11. 곡률변화에 따른 좌굴하중(화이버가 역대칭 앵글 플라이로 보강한 경우)

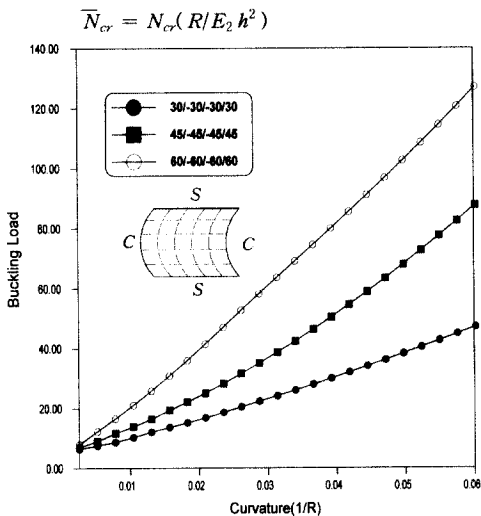


그림 10. 곡률변화에 따른 좌굴하중(화이버가 대칭 앵글 플라이로 보강된 경우)

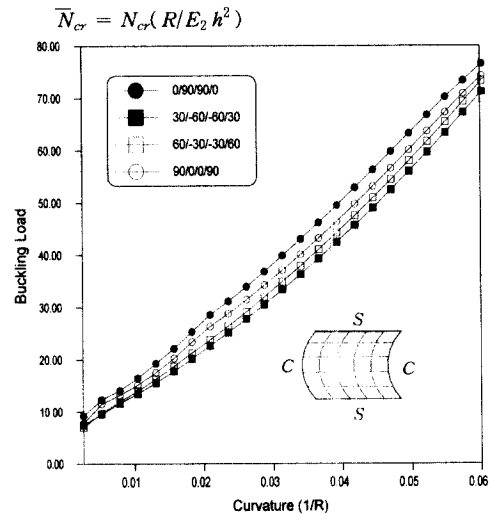


그림 12. 곡률변화에 따른 좌굴하중(화이버가 크로스 플라이로 보강된 경우)

#### 4.5 곡률변화에 따른 결과분석

비등방성 부분 원통형 셸의 곡률변화에 따른 안정성 해석을 위해 원통길이방향길이와 원주방향 길이비를 같게 하고 곡률을 변화시키면서 좌굴하중의 변화를 분석하였다.

그림 9~12는 부분 원통형 셸의 곡률을 증가시키면서 좌굴하중의 변화를 나타낸 것이다. 곡률변화에 의한 좌굴거동은 구조형식이 판 구조형식에서 셸 구조형식으로 변함에 따라 좌굴하중이 증가하게 된다. 그러므로 판 구조보다는 셸 구조가 구조적으로 안정하며, 보다 큰 압축하중을 견

될 수 있는 구조형식이 됨을 나타내고 있다.

#### 4.6 부분 원통형 셀의 좌굴거동 형상

비등방성 부분 원통형 셀의 좌굴거동을 예측하기란 그리 쉽지 않다. 다음 그림은 중심각이  $60^\circ$  인 비등방성 부분 원통형 셀의 좌굴거동 형상을 나타낸 것이다.

그림 13~18은 비등방성 부분 원통형 셀에 화이버를 한방향으로 보강한 경우와 크로스 플라이로 보강한 경우에 대한 좌굴거동 형상을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있는 것처럼 화이버의 강축방향을 따라서 좌굴거동이 발생하는 것을 알 수 있다.



## 5. 결 론

본 연구에서는 원통길이방향은 단순지지되고 원주방향은 고정지지된 비등방성 부분 원통형 쉘의 안정성 문제를 수치해석 기법중의 하나인 유한차분법을 사용하여 해석하였다. 비등방성 부분 원통형 쉘의 안정성 해석은 형상비, 중심각 변화, 곡률 변화, 화이버 보강각도 변화등 다양하게 수행하였다.

원통길이방향 길이와 반경을 같게 하고 중심각을 변화시킨 경우 중심각이 커짐에 따라 좌굴하중은 감소하나 중심각이 60°부터 좌굴하중이 수렴하는 양상을 보여주고 있다. 중심각을 변화시키면서 화이버 보강각도를 변화시킨 경우에는 화이버가 원주방향으로 보강된 경우의 좌굴하중이 가장 크게 나타난다. 이는 원통형 쉘의 구조적 특성상 모든 작용하중을 원주방향의 면내거동으로 저항하는 구조형식이기 때문이다. 원주방향의 강성이 크면 원통길이방향의 강성이 큰 경우보다 큰 하중을 견딜 수 있는 원통형 쉘 구조가 된다.

비등방성 부분 원통형 쉘의 원통길이방향과 원주방향 길이를 같게 하면 부분 원통형 쉘의 곡률이 증가함에 따라 좌굴하중이 커지게 된다. 이는 구조형식에 있어서 판 구조보다 쉘 구조형식이 구조적으로 안정하고 보다 큰 작용하중에 대하여 저항 능력이 크다는 것을 알 수 있다. 또한 곡률을 증가시키면서 화이버 보강각도를 변화시킨 경우, 화이버가 원주방향으로 보강된 경우의 좌굴하중이 가장 크게된다. 이는 앞서 말한 것과 같이 원통형 쉘은 작용하중을 대부분 원주방향의 면내거동으로 저항하기 때문이다.

본 연구의 결과로부터 원통길이방향으로 압축하중을 받는 비등방성 부분 원통형 쉘의 안정성은 원주방향의 강성을 키움으로써 커질 수 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 같은 크기의 압축하중을 받는 경우에 있어서도 쉘 구조는 판 구조보다 안정성이 커지게 되며 원주방향의 강성을 보강함으로써 안정성을 더욱 높일 수 있을 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- (1) 이원홍, 윤석호, 한성천, "고차전단변형을 고려한 복합 적층판 및 쉘 구조의 좌굴해석," 한국강구조학회지 9권 제1호 1997, pp. 3~11.
- (2) 이상열, 임성순, 장석윤, "비등방성 복합 적층판의 임계좌굴하중 및 모드 수치해석," 한국강구조학회지 10권 제3호 1998, pp. 451~461.
- (3) 장석윤, "전단변형을 고려한 비등방성 원통형 쉘의 해석," 한국강구조학회지 11권 제 4호 1999, pp. 373~384
- (4) Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory," Prentice-hall, inc. 1974.
- (5) Wilhelm Flügge, "Stress in Shells," Second Edition, Springer-Verlag New York Heidelberg Bdrlin, 1973.
- (6) S. P. Timoshenko and J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability," Second Edition, Mcgraw-Hill 1961.
- (7) J. R. Vinson and Tsu-Wei Chou "Composite Materials and Their Use in Structures," Applied Science Publishers Ltd, 1975.
- (8) L. H. Sobel, T. Weller and B. L. Agarwal, "Buckling of Cylindrical Panels under Axial Compression," Computers & Structures, Vol. 6, pp. 29-35. Pergamon Press, 1976.
- (9) P. K. Sinha and A. K. Rath, "Vibraion and Buckling of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells," Aeronautical Auarterly, pp. 211-218. 1975.
- (10) E. Ramm, "Buckling of Shells," Springer-Verlag, 1982.

## 부 록

다음은 식 (2-7)에 표현된 7개의 계수( $A_i^k$ ,  $B_i^k$ ,  $C_i^k$ ,  $D_i^k$ ,  $E_i^k$ ,  $F_i^k$ ,  $O_i^k$ )값을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned}
A_i^1 &= [ A_{11} \ A_{16} \ 0 \ B_{11} \ B_{16} ] \\
A_i^2 &= [ A_{16} \ A_{66} \ 0 \ B_{16} \ B_{66} ] \\
A_i^3 &= [ 0 \ 0 \ A_{55} \ 0 \ 0 ] \\
A_i^4 &= [ B_{11} \ B_{16} \ 0 \ D_{11} \ D_{16} ] \\
A_i^5 &= [ B_{16} \ B_{66} \ 0 \ D_{16} \ B_{66} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_i^1 &= [ 2A_{16} \ A_{12} + A_{16} \ 0 \ 2B_{16} \ B_{12} + B_{66} ] \\
B_i^2 &= [ A_{12} + A_{16} \ 2A_{16} \ 0 \ B_{16} + B_{66} \ 2B_{26} ] \\
B_i^3 &= [ 0 \ 0 \ 2A_{45} \ 0 \ 0 ] \\
B_i^4 &= [ 2B_{16} \ B_{12} + B_{66} \ 0 \ 2D_{16} \ D_{12} + D_{66} ] \\
B_i^5 &= [ B_{12} + B_{66} \ 2B_{26} \ 0 \ D_{12} + D_{66} \ 2D_{26} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_i^1 &= [ A_{66} \ A_{26} \ 0 \ B_{66} \ B_{26} ] \\
C_i^2 &= [ A_{26} \ A_{22} \ 0 \ B_{26} \ B_{22} ] \\
C_i^3 &= [ 0 \ 0 \ B_{26} \ 0 \ 0 ] \\
C_i^4 &= [ B_{66} \ B_{26} \ 0 \ D_{66} \ D_{26} ] \\
C_i^5 &= [ B_{26} \ B_{22} \ 0 \ D_{26} \ D_{22} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i^1 &= [ 0 \ 0 \ 0 \ A_{12}/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
D_i^2 &= [ 0 \ 0 \ 0 \ (A_{26} + A_{45})/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
D_i^3 &= [ -A_{12}/R \ -(A_{26} + A_{45})/R \ 0 \ A_{55} - B_{12}/R \ A_{45} - B_{26}/R ] \\
D_i^4 &= [ 0 \ 0 \ -A_{35} + B_{12}/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
D_i^5 &= [ 0 \ 0 \ -A_{45} + B_{26}/R \ 0 \ 0 \ 0 ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_i^1 &= [ 0 \ 0 \ A_{26}/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
E_i^2 &= [ 0 \ 0 \ (A_{22} + A_{44})/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
E_i^3 &= [ -A_{26}/R \ -(A_{22} + A_{44})/R \ 0 \ A_{45} - B_{26}/R \ A_{44} - B_{22}/R ] \\
E_i^4 &= [ 0 \ 0 \ -A_{45} + B_{26}/R \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
E_i^5 &= [ 0 \ 0 \ -A_{44} + B_{22}/R \ 0 \ 0 \ 0 ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ] \\
F_i^2 &= [ 0 \ -A_{44}/R \ 0 \ A_{45}/R \ A_{44}/R ] \\
F_i^3 &= [ 0 \ 0 \ -A_{22}/R^2 \ 0 \ 0 ] \\
F_i^4 &= [ 0 \ A_{45}/R \ 0 \ -A_{55} \ -A_{45} ] \\
F_i^5 &= [ 0 \ A_{44}/R \ 0 \ -A_{45} \ -A_{44} ]
\end{aligned}$$

$$O_i^1 = O_i^2 = O_i^4 = O_i^5 = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$$

$$O_i^3 = [ 0 \ 0 \ N_{cr} \ 0 \ 0 ]$$

(접수일자 : 2000년 1월 31일)