Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol.24, NO.3, September, 1998

가변 스트림 및 표본크기 그룹관리도*

Group Control Charts with Variable Stream and Sample Sizes*

이경택** · 배도선***

K.T. Lee** · D.S. Bai***

Abstract

This paper proposes variable stream and sample size(VSSS) group control charts in which both the number of streams selected for sampling and sample size from each of the selected streams are allowed to vary based on the values of the preceding sample statistics. The proposed charts select a small portion of streams and take samples of size n = 1 if both the largest and smallest of sample means fall between the lower and upper threshold limits, and select a large portion of streams and take samples of size n 〉 1 otherwise. A Markov chain approach is used to derive the formulas for evaluating the performances of the proposed charts. Numerical comparisons are made between the VSSS and fixed stream and sample size(FSSS) group control charts.

1. 서 론

통계적 기법이 품질관리에 활용되기 시작하던 초기에는 완성된 제품의 품질검사가 큰 비중을 차지하였으나, 최근에는 공정을 직접 검사하여 불량품이 생산되지 않도록 미리 예방활동을 하는 통계적 공정관리의 체계적인 활용이 강조되고 있다. 통계적 공정관리의 중요한 목적중의 하나는 공정에 이상이 발생했을 때 가능한 한 이를 빨리 탐지하여 수정조치를 취함으로써 불량제품의 발생을 가급적 억제하자는 것이다. 이러한 목적으로 사용되는 가장 대표적인 기법이 관리도(control chart)이다.

관리도란 중심선(center line)과 관리한계선(control limits)이 있는 그래프에 품질의 변동상황을 나타낸 것으로, 표본으로부터 계산한 타점통계량의 값들을 관리도상에 타점하여 공정의 이상유무를 판단한다. 즉, 모든 점들이 관리한계선 안에 놓이고 점들의 행태를 볼 때 공정에 이상이 있다고 할 만한 별다른 징후가 발견되지 않으면 공정이 관리상태(in-control)에 있다고 보고, 만약 한 점이라도 관리한계선을 벗어나거나 점들이 비정상적인 행태를 보이면 이상상태(out-of-

* 이 논문은 과학기술부에서 시행한 1997년도 특정연구개발사업의 연구결과임

** 고등기술연구원 생산기술연구실

*** 한국과학기술원 산업공학과

control)라고 판단하여 공정을 면밀히 조사하게 된다.

일반적인 관리도들은 공정으로부터 일정한 시간간격마다 동일한 크기의 표본을 채취하여 운영되며, 이러한 관리도들을 고정 표본채취빈도(fixed sampling rate : FSR) 관리도라 한다. FSR 관리도는 사용상의 편의성 때문에 산업현장에서 널리 이용되고 있다. 그런데 최근에는 FSR 관리도의 효율을 높이기 위하여 타점통계량의 결과에 따라 표본채취시점들간의 표본간격이나 각각의 표본채취시점에서의 표본의 크기를 변화시켜주는 가변 표본채취빈도(variable sampling rate : VSR) 관리도에 관한 연구가 활발히 이루어지고 있다. VSR 관리도 중 가변 표본간격(variable sampling interval : VSI) 관리도는 현재의 타점통계량이 관리한계선 근처에 타점 되면 공정에 이상이 있을 가능성이 높다고 판단하여 다음 표본채취시점까지의 표본간격을 짧게 하고, 타점통계량의 값이 중심선 근처에 타점되면 공정이 관리상태에 있을 가능성이 높다고 판단하여 표본간격을 늘려주는 관리도이다. 이와 유사하게 가변 표본크기(variable sample size : VSS) 관리도에서는 현재의 타점통계량의 값이 관리한계선 근처에 타점되면 다음 표본채취시점에서의 표본의 크기를 크게 하고, 타점 통계량의 값이 중심선 근처에 타점되면 표본의 크기를 작게 한다. VSR 관리도에 관한 기존 연구로는 Reynolds 등[12, 13], Runger와 Pignatiello[16], Runger와 Montgomery[15], Amin과 Miller[1], Prabhu 등[8], Costa[4], Baxely[2], Reynolds[10, 11], Prybutok 등[9] 등이 있으며, 이들 연구들은 모두 VSR 관리도를 사용하는 것이 FSR 관리도를 사용하는 것보다 공정모수의 변화를 더 빨리 탐지할 수 있음을 보였다.

관리도들은 주로 하나의 공정을 그 대상으로 한다. 따라서 관리해야할 공정의 수가 많을 경우 각 공정별로 관리도를 작성한다면 관리도 운영을 위한 시간 및 비용이 커져서 효율적인 공정관리가 어려워진다. 이에 대한 대안으로 다수의 동일한 공정들을 하나의 관리도만을 이용하여 관리할 수 있는 그룹관리도(group control chart) 기법이 제안되었다. 그룹관리도에서는 동일한 제품을 생산하는 각각의 공정인 스트림(stream)으로부터 표본을 채취하여 표본평균들을 계산하고 이들 중 최대값과 최소값만을 관리도상에 타점한다. 만약 두 점 모두가 관리한계선 안에 타점되면 다른 모든 스트림의 표본평균들도 관리한계선 안에 있을 것이므로 공정이 관리상태에 있다고 판정한다. 반면 최대값이나 최소값 중 한 값이라도 관리한계선을 벗어나면 하나 이상의 스트림에 이상이 발생했을 가능성이 있다고 본다. 이렇듯 표본평균들 중 일부만을 관리도에 타점하는 그룹관리도를 이용하면 관리도의 수를 줄일 수 있어서 관리도 운영에 따른 시간 및 비용이 감소되고 관리도의 해석도 용이해지는 이점이 있다. 그룹관리도에 관한 기존의 연구로는 Boyd[3], Nelson[6], Mortell과 Runger[5], Nelson과 Stephenson[7], Runger 등[14] 등이 있다.

그룹관리도에서는 모든 스트림으로 부터 표본을 채취하므로, 각 스트림으로 부터 다수의 관측치를 얻기 어렵고 표본채취에 따른 시간과 비용 등을 고려할 때 각 스트림에서의 표본의 크기를 1로 하는 것이 보통이다. 그러나 통계적 가설검정 문제에서 표본의 크기가 작으면 검정능력이 떨어지는 것과 마찬가지로 표본의 크기를 1로 하는 그룹관리도를 사용하게 되면 공정모수의 변화를 빨리 탐지하지 못하는 단점이 있다. 이에 대한 대안으로 모든 스트림으로 부터 표본을 뽑는 대신, 공정이 관리상태일 가능성이 높은 경우에는 일부 스트림에서 1개씩의 관측치를 얻고, 공정이 이상상태일 가능성이 높은 경우에는 대다수의 스트림으로 부터 2개 이상의 관측치를 얻는 VSR 기법을 적용한다면 샘플링 검사 비용의 증가없이 그룹관리도의 효율을 상당히 높일 수 있을 것이다.

이러한 점에 근거하여 이 연구에서는 현 표본채취시점의 타점통계량의 값에 따라 다음번 표본채취시점에서 선택할 스트림의 수(스트림 크기)와 각 스트림에서 뽑는 관측치의 수(표본 크기)를 변화시키는 가변 스트림 및 표본크기(varaible stream and sample sizes : VSSS) 그룹관리도를 제안한다. 즉, 이 논문은 그룹관리도의 효율을 높이기 위하여 스트림의 크기와 표본의 크기를 변화시키는 VSR 기법의 적용에 관한 것이다. 제안하는 VSSS 그룹관리도에서는 현재의 표본평균들의 최대값과 최소값이 모두 중심선 근처에 타점되는 경우 다음번 표본채취시점에서 일부 스트림으로 부터 한개씩의 관측치를 얻고, 둘 중 한 값이라도 관리한계선 근처에 타점되면 대부분의 스트림으로 부터 2개 이상의 관측치를 얻는다. 마아코프 연쇄(Markov chain)를 이용하여 제안된 관리도의 수행도를 평가하는 식들을 유도하고, VSSS 그룹관리도를 기존의 고정 스트림 및 표본크기(fixed stream and sample sizes : FSSS) 그룹관리도와 비교한다. 이 논문에서 사용되는 기

호는 부록의 A.1에 정리되어 있다.

2. VSSS 그룹관리도

총 스트림의 수가 M개이고 j번째 스트림의 관측치가 평균이 μ_j, $j=1,\cdots,M$,이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, 공정목표치 μ_0으로 부터의 μ_j의 변화를 탐지하기 위하여 그룹관리도를 사용하고자 한다. i번째 표본채취시점에서 M_i개의 스트림을 선택하여 선택된 스트림으로 부터 n_i개 씩의 관측치들을 얻는다. Ψ_i를 i번째 표본채취시점에서 선택된 스트림의 집합이라 하고 $\bar{X}_{ij}$를 j번째 스트림의 표본평균이라고 할 때, 타점통계량 $Z_1(M_i,n_i)=\min_{j\in\Psi_i}\{\sqrt{n_i}(\bar{X}_{ij}-\mu_0)/\sigma\}$ 와 $Z_2(M_i,n_i)=\max_{j\in\Psi_i}\{\sqrt{n_i}(\bar{X}_{ij}-\mu_0)/\sigma\}$ 중 어느 하나라도 관리한계선 $\pm k_1$밖에 타점되면 하나 이상의 스트림에 이상이 발생했다고 판단하여 공정을 중지시키고 이상원인을 찾는다.

기존의 FSSS 그룹관리도에서는 모든 표본채취시점에서의 M_i와 n_i가 각각 M과 n으로 상수이다. 따라서 각 스트림별로 4~5개 정도의 관측치만을 검사한다고 하더라도 전체적으로는 표본 채취 및 검사에 많은 시간 및 비용이 필요하고, 이러한 점 때문에 일반적인 그룹관리도에서는 각 스트림에서의 표본의 크기를 1로 하는 것이 보통이다. 그러나 통계적 가설검정 문제에서 표본의 크기가 작으면 검정능력이 떨어지는 것과 마찬가지로 $n=1$인 그룹관리도를 사용하게 되면 표 1.에서 보는 바와 같이 공정평균의 변화를 빨리 탐지하지 못하는 단점이 있다. 표 1.은 공정시작시점 부터 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때까지의 표본채취시점의 수의 평균인 평균 런의 길이(average run length : ARL)를 이용하여 $n=1$인 FSSS 그룹관리도의 성능을 평가한 것으로, $M=5, 10, 20$ 각각에 대하여 관리상태에서의 ARL이 350이 되도록 관리한계선을 조정한 후 M개 중 하나의 스트림에서의 공정평균이 μ_0에서 $\mu_0+\delta\sigma$만큼 증가한 경우의 ARL값을 계산한 것이다. 이 표에 의하면 기존의 그룹관리도를 사용할 경우 공정평균의 변화를 빨리 탐지해내지 못하고, 특히 M이 클 경우 그 영향이 더욱 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

표 1. $n=1$인 FSSS 그룹관리도의 이상상태 하의 ARL
(관리상태 하의 ARL = 350)

δ	$M=5$	10	20
0.5	253.816	288.263	312.485
1.0	104.970	145.725	190.796
1.5	35.531	52.043	75.020
2.0	13.087	18.435	26.093
2.5	5.736	7.577	10.125
3.0	3.031	3.745	4.691

이와 같은 FSSS 그룹관리도의 문제점을 개선할 수 있는 방법으로 이 연구에서 제안하는 VSSS 그룹관리도는 공정이 관리상태일 가능성이 높은 경우에는 M개의 스트림 중 일부($M_{(2)}$개)만을 랜덤하게 선택하여 각 스트림으로 부터 적은 수($n_{(2)}$개)의 관측치들을 얻고, 공정이 이상상태일 가능성이 높은 경우에는 대다수($M_{(1)}$개)의 스트림으로 부터 많은 수($n_{(1)}$개)의 관측치들을 채취한다. 이 때 $M_{(1)}$, $M_{(2)}$, $n_{(1)}$, $n_{(2)}$는 관리도 사용시 미리 정해두어야 하는 값으로, 이들 간에는 $2\le M_{(2)} < M_{(1)} \le M$, $n_{(2)} < n_{(1)}$의 관계가 만족되어야 한다. $M_{(1)}$, $M_{(2)}$, $n_{(1)}$, $n_{(2)}$의 결정에 대해서는 4절에서 다룬다. 관리한계선 사이를 다음과 같이

$$I_1 = (-k_1, -k_2] \cup [k_2, k_1), \tag{1}$$

$I_2 = (-k_2, k_2)$,

로 나누자. 이때 k_2 는 스트림의 크기와 표본의 크기를 결정하기 위한 경계한계선(threshold limit)이고, $k_2 < k_1$ 이다. 그러면 $(i+1)$ 번째 표본채취시점에서의 스트림 및 표본의 크기는 $Z_1(M_i, n_i)$ 및 $Z_2(M_i, n_i)$ 의 값에 따라 다음과 같이 결정된다:

① $Z_1(M_i, n_i)$ 와 $Z_2(M_i, n_i)$ 가 모두 I_2 에 타점되면 $(M_{i+1}, n_{i+1}) = (M_{(2)}, n_{(2)})$로 한다.
② $Z_1(M_i, n_i)$ 와 $Z_2(M_i, n_i)$ 중 한 값이라도 I_1 에 타점되면 $(M_{i+1}, n_{i+1}) = (M_{(1)}, n_{(1)})$ 로 한다.

$(i+1)$ 번째 표본채취시점의 스트림 및 표본의 크기를 결정하기 위해서는 i 번째 표본채취시점에서의 타점통계량의 값들이 필요한데, 공정의 시작시점에서는 아무런 정보도 갖고있지 않으므로 첫번째 표본채취시점에서의 스트림 및 표본의 크기는 결정할 수 없다. 이를 위하여 이 연구에서는 공정 초기에 존재할 지도 모르는 이상원인을 조기에 발견하기 위하여 $M_1 = M_{(1)}$ 과 $n_1 = n_{(1)}$ 로 가정한다.

3. 수행도 평가척도

관리도의 성능을 평가하는 수행도 평가 척도들 중 널리 쓰이는 것으로는 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때까지의 표본채취시점의 수의 평균인 ARL과 이상신호가 발생될 때까지 뽑는 총 관측치 수의 평균(average number of observations to signal : ANOS) 등이 있다. FSSS 그룹관리도에서는 매 표본채취시점에서 얻게 되는 관측치의 수가 $n \cdot M$ 으로 동일하므로 ANOS = ARL $\cdot n \cdot M$ 의 관계가 성립하여 ARL만으로 관리도의 성능을 평가할 수 있다. 그러나 관측치의 수를 변화시키는 VSSS 그룹관리도에서는 매 표본채취시점에서의 관측치의 수가 서로 동일하지 않으므로 ARL 뿐만아니라 ANOS도 관리도의 성능을 평가하는 중요한 척도가 된다. 이러한 수행도 평가 척도들의 특징을 살펴보면, 공정이 관리상태일 경우의 ARL인 ARL_0 은 클수록 좋고, 공정이 이상상태일 경우의 ARL인 ARL_1 은 작을수록 좋다. 또한 다른 조건이 동일하다면 ANOS는 작을수록 좋다.

VSSS 그룹관리도의 ARL과 ANOS를 계산하는 식들을 유도하기 위하여 필요한 몇가지 확률들을 구하면 다음과 같다. M 개의 스트림 중 r 개의 스트림의 공정평균이 목표치 μ_0 으로 부터 $\delta\sigma$ 만큼 증가하였을 경우의 $Z_1(M_i, n_i)$ 와 $Z_2(M_i, n_i)$ 의 결합밀도함수는

$$g_r(z_1, z_2; M_i, n_i) = \sum_{l=0}^{min(M_i, r)} \frac{\binom{r}{l}\binom{M-r}{M_i-l}}{\binom{M}{M-i}} \cdot f(z_1, z_2 | l) \tag{2}$$

이고, 여기서

$$f(z_1, z_2 | l) = \begin{cases} M_i(M_i-1)A_0B_0^{M_i-2}C_0, & l=0\text{인 경우}, \\ (M_i-1)B_0^{M_i-3}[A_0B_0C_0+A_1B_0C_0+(M_i-2)A_0B_1C_0], & l=1\text{인 경우}, \\ (M_i-l)A_0B_0^{M_i-l-2}B_1^{l-1}[lB_0C_1+(M_i-l-1)B_1C_0] & \\ \quad +lA_1B_0^{M_i-l-1}B_1^{l-2}[(M_i-l)B_1C_0+(l-1)A_1B_0C_1], & 2 \le l \le M_i-2\text{인 경우}, \\ (M_i-1)B_1^{M_i-3}[A_0B_1C_1+A_1B_1C_0+(M_i-2)A_1B_0C_1], & l=M_i-1\text{인 경우}, \\ M_i(M_i-1)A_1B_1^{M_i-2}C_1 & l=M_i\text{인 경우}, \end{cases}$$

$A_0 = \phi(z_1)$, $A_1 = \phi(z_1 - \delta\sqrt{n_i})$, $B_0 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, $B_1 = \Phi(z_2 - \delta\sqrt{n_i}) - \Phi(z_1 - \delta\sqrt{n_i})$, $C_0 = \phi(z_2)$, $C_1 = \phi(z_2 - \delta\sqrt{n_i})$ 이며, $\phi(\cdot)$ 와 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수이다. 식 (2)의 유도과정은 부록의 A.2에 정리되어 있다.

$q_S^{(r)}(M_i, n_i)$ 를 M 개 중 r 개 스트림의 공정평균이 목표치 μ_0 으로 부터 $\delta\sigma$ 만큼 증가했을 때 관리도에 의해 이상신호가 발생할 확률이라 하고, $q_{(1)}^{(r)}(M_i, n_i)$ 와 $q_{(2)}^{(r)}(M_i, n_i)$ 를 다음 표본채취시점에서의 스트림 및 표본의 크기가 각각 $(M_{(1)}, n_{(1)})$ 과 $(M_{(2)}, n_{(2)})$ 가 될 확률이라고 하자. 그러면

$$
\begin{aligned}
q_S^{(r)}(M_i, n_i) &= 1 - \int_{-k_1}^{k_1} \int_{z_1}^{k_1} g_r(z_1 z_2; M_i, n_i) dz_2\, dz_1, \\
q_{(2)}^{(r)}(M_i, n_i) &= \int_{-k_2}^{k_2} \int_{z_1}^{k_2} g_r(z_1, z_2; M_i, n_i) dz_2\, dz_1, \\
q_{(1)}^{(r)}(M_i, n_i) &= 1 - q_{(2)}^{(r)}(M_i, n_i) - q_S^{(r)}(M_i, n_i)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

이다.

VSSS 그룹관리도의 수행도 평가를 위한 식들은 마아코프 연쇄를 이용하여 구할 수 있다. R_i 를 $R_i = (M_i, n_i)$ 로 정의하면, $\{R_i, i \geq 1\}$ 는 $\{(M_{(1)}, n_{(1)}), (M_{(2)}, n_{(2)})\}$ 인 두 개의 일시상태(transient state)와 관리도에 의해 이상신호가 발생되는 경우에 해당하는 하나의 흡수상태(absorbing state)를 갖는 마아코프 연쇄가 된다. p_{m_1, m_2} 를 상태 m_1 에서 상태 m_2 로 옮아갈 추이확률(transition probability)이라 하고 P 를 일시상태들 간의 추이확률행렬이라 하면, P 는

$$
\mathrm{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{(1)}^{(r)}(M_{(1)}, n_{(1)}) & q_{(2)}^{(r)}(M_{(1)}, n_{(1)}) \\ q_{(1)}^{(r)}(M_{(2)}, n_{(2)}) & q_{(2)}^{(r)}(M_{(2)}, n_{(2)}) \end{bmatrix} \tag{4}
$$

가 된다.

N_m, $m = 1, 2,$ 을 마아코프 연쇄의 초기상태가 m 인 경우 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때 까지의 표본채취시점의 수라 하면, 마아코프 연쇄의 기본성질에 의하여 N_m 의 기대값은

$$
E(N_m) = e_m^{\mathrm{T}} \cdot (\mathrm{I} - \mathrm{P})^{-1} \cdot 1 \tag{5}
$$

이 된다. 이때 e_m^{T} 는 상태 m 에 해당되는 원소의 값만 1이고 나머지 원소의 값은 0인 벡터이고, I는 차원이 2인 단위행렬(identity matrix)이며, $1^{\mathrm{T}} = (1, 1)$ 이다. 그런데 2절에서 첫번째 스트림과 표본의 크기를 각각 $M_{(1)}$ 과 $n_{(1)}$ 로 가정하였으므로 ANSS는 $E(N_1)$ 이 된다.

w_m, $m = 1, 2,$ 을 특정 표본채취시점에서의 마아코프 연쇄의 상태가 m 인 경우의 관측치의 수라 하고, O_m 을 초기상태가 m 인 경우 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때 까지 뽑는 총 관측치의 수라 하자. 그러면

$$
w_m = \begin{cases} n_{(1)} \cdot M_{(1)}, & m\text{=1인 경우,} \\ n_{(2)} \cdot M_{(2)}, & m\text{=2인 경우} \end{cases} \tag{6}
$$

이고, $w^{\mathrm{T}} = (w_1, w_2)$ 라 할 때

$$
E(O_m) = e_m^{\mathrm{T}} \cdot (\mathrm{I}\text{-}\mathrm{P})^{-1} \cdot w \tag{7}
$$

이며 ANOS는 $E(O_1)$ 이 된다.

4. FSSS 그룹관리도와 VSSS 그룹관리도의 비교

이 절에서는 기존의 FSSS 그룹관리도와 이 연구에서 제안하는 VSSS 그룹관리도를 ARL과 ANOS면에서 비교한다. FSSS 그룹관리도의 수행도를 평가하는 식들은 3절에서 구한 식들에 $M_{(1)} = M_{(2)} = M$ 과 $n_{(1)} = n_{(2)} = n$ 을 대입하면 쉽게 구할 수 있다.

두 관리도는 동일한 조건에서 비교되어져야 한다. 이를 위하여 이 절에서는 두 관리도의 ARL_0 과 $ANOS_0$ 을 동일하게 맞추어준 후, ARL_1 과 $ANOS_1$ 을 이용하여 비교한다. 이 경우 이상상태에서의 ARL 값이 작은 관리도가 더 좋은 관리도라 할 수 있고, 두 관리도의 ARL값들이 유사한 경우 ANOS 값이 더 작은 관리도가 더 효율적이라 할 수 있다.

표 2.~표 5.는 $M = 10$ 일 때 $n = 1$ 인 FSSS 그룹관리도와 $(M_{(2)}, n_{(2)}) = (2, 1)$, $(4, 1)$, $(M_{(1)}, n_{(1)}) = (5, 4)$, $(10, 2)$, $(5, 8)$, $(10, 4)$인 VSSS 그룹관리도의 ARL_0 과 $ANOS_0$ 이 각각 350과 3500이 되도록 관리한계선 k_1 및 경계한계선 k_2를 조정해 준 후, $r = 1, 3$, $\delta = 0.5(0.5)3.0$ 인 경우의 ARL_1 과 $ANOS_1$ 값들을 계산한 것이다. 이들 표로부터 다음의 내용을 알 수 있다:

1. 제안된 VSSS 그룹관리도를 사용할 경우 기존의 FSSS 그룹관리도 사용시 보다 공정평균의 변화를 훨씬 더 빨리 탐지할 수 있다. 예를 들어, $M = 10$, $r = 1$ 이고 $\delta = 1.0$ 인 경우, FSSS 그룹관리도의 ARL은 145.73으로 $\{(M_{(2)}, n_{(2)}), (M_{(1)}, n_{(1)})\} = \{(2, 1), (10, 4)\}$ 인 VSSS 그룹관리도의 29.93보다 여덟배 정도 큰 값이다.
2. 공정평균의 변화가 아주 큰 경우를 제외하고는 VSSS 그룹관리도의 ANOS 값이 FSSS 그룹관리도의 ANOS 값보다 작다.

표 2. FSSS 그룹관리도와 VSSS 그룹관리도의 ARL과 ANOS

($M = 10$, $r = 1$, $ARL_0 = 350$, $ANOS_0 = 3500$, $(M_{(2)}, n_{(2)}) = (2, 1)$ 인 경우)

	δ	FSSS	VSSS $(M_{(1)}, n_{(1)})$: (5, 4)	(10, 2)	(5, 8)	(10, 4)
ARL	0.5	288.26	189.97	236.70	141.00	187.03
	1.0	145.73	33.64	65.43	15.99	25.01
	1.5	52.04	8.06	13.96	5.50	3.65
	2.0	18.44	3.84	4.16	4.17	1.40
	2.5	7.58	2.93	1.94	3.74	1.05
	3.0	3.75	2.70	1.29	3.42	1.00
ANOS	0.5	2882.63	2028.66	2518.30	1618.88	2132.95
	1.0	1457.25	413.91	826.32	246.32	438.49
	1.5	520.43	109.64	218.72	98.52	111.07
	2.0	184.34	54.33	76.34	80.69	54.07
	2.5	75.77	42.04	37.96	76.33	42.12
	3.0	37.45	39.14	25.63	72.00	40.17

표 3. FSSS 그룹관리도와 VSSS 그룹관리도의 ARL과 ANOS

($M = 10$, $r = 3$, $ARL_0 = 350$, $ANOS_0 = 3500$, $(M_{(2)}, n_{(2)}) = (2, 1)$ 인 경우)

	δ	FSSS	VSSS $(M_{(1)}, n_{(1)})$ (5, 4)	(10, 2)	(5, 8)	(10, 4)
ARL	0.5	213.24	90.86	135.19	51.09	80.97
	1.0	67.46	9.21	19.55	3.20	5.05
	1.5	19.56	2.31	4.17	1.38	1.36
	2.0	6.70	1.34	1.68	1.22	1.02
	2.5	2.92	1.17	1.12	1.18	1.00
	3.0	1.66	1.13	1.01	1.16	1.00
ANOS	0.5	2131.41	1095.30	1609.32	766.82	1183.09
	1.0	674.57	151.00	326.61	94.46	165.79
	1.5	195.58	42.84	81.74	47.93	54.19
	2.0	67.02	25.54	33.57	43.69	40.72
	2.5	29.22	22.28	22.39	43.21	40.01
	3.0	16.56	21.71	20.22	42.83	40.00

표 4. FSSS 그룹관리도와 VSSS 그룹관리도의 ARL과 ANOS

($M = 10$, $r = 1$, $ARL_0 = 350$, $ANOS_0 = 3500$, $(M_{(2)}, n_{(2)}) = (4, 1)$ 인 경우)

	δ	FSSS	VSSS $(M_{(1)}, n_{(1)})$ (5, 4)	(10, 2)	(5, 8)	(10, 4)
ARL	0.5	288.26	214.77	249.20	181.35	218.77
	1.0	145.73	41.94	75.28	21.64	35.59
	1.5	52.04	9.35	16.05	6.16	4.66
	2.0	18.44	4.13	4.53	4.19	1.50
	2.5	7.58	2.97	2.01	3.51	1.07
	3.0	3.75	2.64	1.30	3.04	1.01
ANOS	0.5	2882.63	2254.68	2610.31	1989.87	2387.11
	1.0	1457.25	499.06	907.47	312.03	542.44
	1.5	520.43	124.87	237.70	109.23	124.84
	2.0	184.34	58.24	80.30	83.43	56.38
	2.5	75.77	43.07	38.99	75.97	42.54
	3.0	37.45	38.69	25.95	69.24	40.21

제안된 관리도를 사용하기 위해서는 사전에 $M_{(1)}$, $M_{(2)}$, $n_{(1)}$, $n_{(2)}$를 결정해야 한다. 표 2.~표 5.를 보면 $n_{(2)} \cdot M_{(2)}$는 가급적 작게 하고 $n_{(1)} \cdot M_{(1)}$은 크게 하는 것이 좋음을 알 수 있다. 또한 표본 채취에 따른 시간 및 비용 등으로 인하여 n(1) · M(1)에 상한이 있는 경우에는 관심이 있는 공정평균의 변화량이 큰 경우 가급적 스트림의 수를 늘리고 관측치의

표 5. FSSS 그룹관리도와 VSSS 그룹관리도의 ARL과 ANOS

(M = 10, r = 3, ARL_0 = 350, $ANOS_0$ = 3500, $(M_{(2)}, n_{(2)})$ = (4, 1) 인 경우)

	δ	FSSS	VSSS $(M_{(1)}, n_{(1)})$ (5, 4)	(10, 2)	(5, 8)	(10, 4)
ARL	0.5	213.24	112.99	150.74	77.98	110.48
	1.0	67.46	11.40	60.97	4.10	6.93
	1.5	19.56	2.53	9.32	1.43	1.45
	2.0	6.70	1.38	1.73	1.21	1.02
	2.5	2.92	1.17	1.13	1.17	1.00
	3.0	1.66	1.13	1.01	1.14	1.00
ANOS	0.5	2131.41	1301.85	1722.83	1032.20	1432.40
	1.0	674.57	177.20	809.68	110.09	195.18
	1.5	195.58	46.19	166.38	49.40	57.33
	2.0	67.02	26.18	34.56	43.83	40.99
	2.5	29.22	22.37	22.61	43.09	40.01
	3.0	16.56	21.62	20.25	42.52	40.00

수를 줄이는 것이 좋고, 그 반대의 경우 스트림의 수를 줄이고 관측치의 수를 늘리는 것이 좋음을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 공정에 이상이 발생했을 가능성이 높은 경우에는 대부분의 스트림으로 부터 $n>1$ 인 표본을 채취하고, 그렇지 않은 경우에는 전체 스트림 중 비교적 적은 수의 스트림으로 부터 $n=1$ 인 표본을 채취하는 VSSS 그룹관리도를 제안하였다. 제안된 그룹관리도의 ARL과 ANOS를 계산하는 식들을 마아코프 연쇄방법을 이용하여 유도하였다. VSSS 그룹관리도를 FSSS 그룹관리도와 비교해 본 결과, 제안된 가변 표본채취빈도 기법을 적용하면 표본채취 및 검사비용의 증가없이 기존 그룹관리도의 효율을 상당히 높일 수 있음을 알 수 있었다.

제안된 VSSS 그룹관리도를 사용하면 공정에 이상원인이 발생하였을 경우 이를 빨리 탐지할 수는 있으나, 이상신호가 발생했을 때 실제로 어떤 스트림에 이상원인이 발생했는가에 대해서는 알 수 없다. 즉, 이상신호가 발생되면 모든 스트림을 조사해보아야 한다. 따라서 관리도에 의해 이상신호가 발생되었을 때 어떤 스트림 부터 조사해야 하는가에 대한 연구가 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

[1] Amin, R. W. and Miller, R. W., "Robustness Study of $\bar{X}$ Charts with Variable Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 36-44, 1993.

[2] Baxley, R. W., Jr., "An Application of Variable Sampling Interval Control Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, pp. 275-282, 1995.

[3] Boyd, D. F., "Applying The Group Chart for $\bar{X}$ and R", *Industrial Quality Control*, Vol. 7, pp. 22-25, 1950.

[4] Costa, A. F. B., "$\bar{X}$ Charts with Variable Sample Size" *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 155-163, 1994.

[5] Mortell, R. R. and Runger, G. C., "Statistical Process Control of Multiple Stream Processes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, pp. 1-12, 1995.

[6] Nelson, L. S., "Control Chart for Multiple Stream Processes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 255-256, 1986.

[7] Nelson, P. R. and Stephenson, P. L., "Runs Tests for Group Control Charts", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 25, pp. 2739-2765, 1996.

[8] Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B., "An Adaptive Sample Size $\bar{X}$ Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 2895-2909, 1993.

[9] Prybutok, V. R., Clayton, H. R. and Harvey, M. M., "Comparison of Fixed versus Variable Sampling Interval Shewhart $\bar{X}$ Control Charts in the Presence of Positively Autocorrelated Data", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 26, pp. 83-106, 1997.

[10] Reynolds, M. R. Jr., "Shewhart and EWMA Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 199-212, 1996.

[11] Reynolds, M. R. Jr., "Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times", *IIE Transactions*, Vol. 28, pp. 497-510, 1996.

[12] Reynolds, M. R., Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C. and Nachlas, J. A., "$\bar{X}$ Charts with Variable Sampling Intervals", *Technometrics*, Vol. 30, pp. 181-192, 1988.

[13] Reynolds, M. R., Jr., Arnold, J. C. and Baik, J. W., "Variable Sampling Interval $\bar{X}$ Charts in The Presence of Correlation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 12-30, 1996.

[14] Runger, G. C., Alt, F. B. and Montgomery, D. C., "Controlling Multiple Stream Processes with Principal Components", *International Journal of Production Research*, Vol. 34, pp. 2991-2999, 1996.

[15] Runger, G. C. and Montgomery, D. C., "Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts", *IIE Transactions*, Vol. 25, pp. 41-51, 1993.

[16] Runger, G. C. and Pignatiello, J. J., Jr., "Adaptive Sampling for Process Control", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 135-155, 1991.

[17] Vaughan, R. J. and Venables, W. N., "Permanent Expressions for Order Statistics Densities", *Journal of Royal Statistical Society-Ser. B*, Vol. 34, pp. 308-310, 1972.

98년 2월 최초 접수, 98년 8월 최종 수정

A. 부 록

A.1 기 호

M	총 스트림의 개수
μ_j	j번째 스트림의 공정평균, $j=1,\cdots,M$
μ_0	공정 목표치
σ	공정표준편차
$\overline{X}_{ij}$	i번째 표본채취시점와 j번째 스트림의 표본평균, $i=1,2,\cdots$, $j=1,\cdots,M$
δ	σ단위로 표현된 공정평균의 변화량
M_i	i번째 표본채취시점에서 선택된 스트림의 수, $i=1,2,\cdots$
n_i	i번째 표본채취시점에서 선택된 각각의 스트림으로 부터 뽑는 관측치의 수, $i=1,2,\cdots$
k_1	관리한계선 상수
k_2	경계한계선 상수
Ψ_i	i번째 표본채취시점에서 선택된 스트림의 집합
$Z_1(M_i,n_i)$	M_i개의 표준화된 표본평균들 중의 최소값 ;$\min_{j\in\Psi_i}\{\sqrt{n_i}(\overline{X}_{ij}-\mu_0)/\sigma\}$
$Z_2(M_i,n_i)$	M_i개의 표준화된 표본평균들 중의 최대값 ;$\max_{j\in\Psi_i}\{\sqrt{n_i}(\overline{X}_{ij}-\mu_0)/\sigma\}$
$M_{(2)}$, $M_{(1)}$	작은 스트림크기 및 큰 스트림크기; $2\le M_{(2)}<M_{(1)}\le M$
$n_{(2)}$, $n_{(1)}$	작은 표본크기 및 큰 표본크기; $n_{(2)}<n_{(1)}$
$q_S^{(r)}(M_i,n_i)$	M개 중 r개의 스트림에서의 공정평균이 목표치 μ_0에서 $\delta\sigma$만큼 증가하였을 때 관리도에 의하여 이상신호가 발생할 확률
$q_{(\zeta)}^{(r)}(M_i,n_i)$	M개 중 r개의 스트림에서의 공정평균이 목표치 μ_0에서 $\delta\sigma$만큼 증가하였을 때 다음번 표본채취시점에서의 스트림과 표본의 크기가 각각 $M_{(\zeta)}$와 $n_{(\zeta)}$가 될 확률, $\zeta=1,2$
R_i	마아코프 연쇄의 상태변수
p_{m_1,m_2}	상태 m_1에서 상태 m_2로 옮아갈 추이확률
P	일시상태들 간의 추이확률행렬
I	단위행렬
e_m	상태 m에 해당되는 원소의 값이 1이고 나머지 원소의 값은 0인 벡터
1	모든 원소의 값이 1인 벡터
N_m	초기상태가 m인 경우, 공정시작시점부터 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때까지의 표본채취시점의 수
O_m	초기상태가 m인 경우, 공정시작시점부터 관리도에 의해 이상신호가 발생될 때까지 뽑는 관측치의 수
w_m	특정 표본채취시점에서의 마아코프 연쇄의 상태가 m인 경우의 관측치의 수
$\phi(\cdot)$	표준정규분포의 확률밀도함수
$\Phi(\cdot)$	표준정규분포의 누적분포함수

A.2 식 (2)의 유도과정

L, $L=0,\cdots,\min(M_i,r)$,을 i번째 표본채취시점에서 선택한 M_i개 스트림 중 공정평균이 증가한 스트림의 개수라 하

고, $f(z_1,z_2|L)$ 을 L 이 주어진 경우의 $Z_1(M_i,n_i)$ 와 $Z_2(M_i,n_i)$ 의 조건부 확률밀도함수라 하자. 그러면 L 은 모수가 M, M_i 와 r 인 초기하 분포를 따르고, $Z_1(M_i,n_i)$ 와 $Z_2(M_i,n_i)$ 의 결합밀도함수는

$$g_r(z_1, z_2; M_i, n_i) = \sum_{l=0}^{min(M_i,r)} \Pr(L=l) \cdot f(z_1, z_2|l)$$

$$= \sum_{l=0}^{min(M_i,r)} \frac{\binom{r}{l}\binom{M-r}{M_i-l}}{\binom{M}{M-i}} \cdot f(z_1, z_2|l) \tag{A1}$$

이 된다.

θ_i 를 전체 스트림 중에서 공정평균이 변한 스트림의 집합이라 하자. 또한 $\xi_0(\cdot)$ 와 $\Xi_0(\cdot)$ 를 $j \notin \theta_i$ 인 $Z_{ij} = \sqrt{n_i}(\overline{X}_{ij} - \mu_0)/\sigma$ 의 확률밀도함수와 누적분포함수라 하고, $\xi_1(\cdot)$ 와 $\Xi_1(\cdot)$ 를 $j \in \theta_i$ 인 Z_{ij} 의 확률밀도함수와 누적분포함수라 하자. 그러면 $Z_1(M_i,n_i)$ 와 $Z_2(M_i,n_i)$ 는 $\xi_1(\cdot)$ 로 부터 뽑는 크기 l 인 확률표본과 $\xi_0(\cdot)$ 로 부터 뽑는 크기 (M_i-l) 인 확률표본으로 부터의 순서통계량이다. 확률표본들의 모집단의 분포가 동일하지 않은 경우의 순서통계량인 $Z_1(M_i,n_i)$ 와 $Z_2(M_i,n_i)$ 의 결합밀도함수는 Vaughan 과 Venables[17]의 결과에 따라

$$f(z_1, z_2|l) = \frac{1}{(M_i-2)!} \times {}^{+}\left|\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} A_0 & \cdots & A_0 \\ B_0 & \cdots & B_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0 & \cdots & B_0 \\ C_0 & \cdots & C_0 \end{matrix}}^{M_i-l\text{ 개}} & \overbrace{\begin{matrix} A_1 & \cdots & A_1 \\ B_1 & \cdots & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 & \cdots & B_1 \\ C_1 & \cdots & C_1 \end{matrix}}^{l\text{ 개}} \end{matrix}\right|^{+} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (M_i-2)\text{ 줄} \tag{A2}$$

이다. 여기서 $A_0 = \xi_0(z_1)$, $A_1 = \xi_1(z_1)$, $B_0 = \Xi_0(z_2) - \Xi_0(z_1)$, $B_1 = \Xi_1(z_2) - \Xi_1(z_1)$, $C_0 = \xi_0(z_2)$, $C_1 = \xi_1(z_2)$ 이고, $^{+}|A|^{+}$ 는 행렬 A 에 대한 행렬식(determinant)의 정의에서 음의 기호를 모두 양의 기호로 대체한 퍼머넌트(permanent)이다.

결국, 식 (A2)의 $f(z_1,z_2|l)$ 을 식 (A1)에 대입하여 정리하면 식 (2)를 구할 수 있다. 이때 $j \notin \theta_i$ 인 경우의 Z_{ij} 는 표준정규분포를 따르고 $j \in \theta_i$ 인 경우의 Z_{ij} 는 평균이 $\delta\sqrt{n_i}$ 이고 분산이 1인 정규분포를 따르므로, $A_0 = \phi(z_1)$, $A_1 = \phi(z_1 - \delta\sqrt{n_i})$, $B_0 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, $B_0 = \Phi(z_2 - \delta\sqrt{n_i}) - \Phi(z_1 - \delta\sqrt{n_i})$, $C_0 = \phi(z_2)$, $C_1 = \phi(z_2 - \delta\sqrt{n_i})$ 이다.