

명령추종과 출력측 외란제거를 위한 LQ-Servo 설계

LQ-Servo Design to Command Following and Output-Disturbance Rejection

윤성오, 서병설
(Seong-O Yun and Byung-Suhl Suh)

Abstract : LQ-servo design procedure introduced by Athans is a method using a partial states feedback and an output feedback in order to improve the poor performance robustness of the LQR as well as to maintain its stability robustness. Although the method guarantees good stability robustness, it is not effective in performance robustness as it does not match the singular value at low or high frequencies of the transfer matrix obtained by breaking at the plant output. This paper intends propose of a new method, using the limited behaviour of the control gain introduced by Kwakernaak and Sivan, in order to improve it does it refer to controlga introduced by kwakernaak or the new metho Anblguouls.

Keywords : LQ-servo, output feedback, robustness, loop shaping

I. 서론

모든 시스템 공학자들은, 임의의 플랜트에서 바람직한 출력을 얻기위해 폐환(feedback)을 구성하고 제어이득(control gain)을 구함으로써 그 플랜트를 제어하고자 한다. 이러한 제어문제 중에서 서보 문제(servo problem)는 플랜트의 출력이 기준입력(reference input)을 따라가도록 하는 문제이다. 서보 문제를 해결하기 위하여 많은 시스템 공학자들-특히, Athans[3], Anderson[1], Davison[4] 등-의 연구가 있었다. 그중 LQ-서보 방법은 LQR(linear quadratic regulator) 방법의 결여된 성능-강인성(performance robustness)을 보장할 수 있도록 수정보완된 방법이다. 다시 말하면 LQR은 안정도-강인성(stability robustness)이 Kalman의 주파수역 등가식(Kalman equality)에 의해 완전히 보장될 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러나 이와같은 보장은 완전한 상태폐환(full state feedback)이 존재할 때만 성립한다. 그리고 LQR은 출력폐환(output feedback)이 구성되어 있지 않아 시스템 수행의 주요목표인 명령추종(command following)을 성취할 수 없다. 그래서 안정도-강인성은 물론 명령추종, 외란제거(disturbance rejection), 잡음감소(noise reduction)등의 성능-강인성을 보장시키려는 목적으로, 시스템의 상태를 부분적으로 분리하여 일부의 상태폐환과 출력폐환을 동시에 사용하는 기법인 LQ-서보 설계 방법이 연구되고 있다.

주어진 시스템을 관측 가능한 형태(observable formation)로 변환하면, 출력에 직접 영향을 주는 상태와 그렇지 않은 상태로 나눌 수 있다. 만약 위의 시스템에서 출력에 영향을 주지 않는 상태의 폐환이 가능하다면, 출력에 영향을 주는 상태의 폐환이 가능하지 않다고 하더라도 그 부분의 상태는 출력폐환을 이용하여 완전한 상태폐환이 되는 것처럼 생각할 수 있다. 그러므로 LQR과 같이 안정도-강인성을 보장받게 된다. 또한, 이 시스템에는 출력폐환이 포함되어 있으므로 출력과 기준 입력과의 오차가 폐환되기 때문에 명령추종 및 외란제거 등의 성능-강인성을 보장받을 수 있도록 설계할 수 있을 것이다. 명령추종 및 출력측 외란제거등의 성

능을 효과적으로 개선하기 위해서는 플랜트 출력측-혹은 이와 동등한 오차신호 부분-에서 절단한 루우프 전달함수 $T(s)$ 를 사용하여 특이값 형상으로 설계하여야 한다. 그러나 Athans에 의한 LQ-서보 설계 방법[3]에서는 $T(s)$ 를 사용하는 것이 아니라 플랜트 입력측에서 절단한 루우프 전달함수 $G_{LQ}(s)$ 를 사용하여 특이값 형상으로 설계하기 때문에 안정도-강인성은 보장받을 수 있으나, 성능-강인성은 보장 받을 수 없다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 덧붙임 상태(augmented state) 공간 모델식을 이용한 LQ-서보의 구조를 설명하였고, III장에서는 Kwakernaak과 Sivan이 발표한 제어이득행렬의 극한 거동[7][8]을 이용하여 $T(s)$ 의 특이값 형상을 사용하는 새로운 설계 절차를 제안하고, 이 절차에 의하여 구성된 시스템은 안정도-강인성 및 성능-강인성을 보장받을 수 있음을 이론적으로 입증하였으며, 고주파 잡음에 강한 서보 구조에 대한 고찰을 하였고, IV장에서는 Athans에 의한 설계 방법과 본 논문에서 제안한 방법을 예제를 통하여 비교하였고, 마지막으로 V장에서는 결론 및 추후 연구과제를 설명한다.

II. LQ-서보

LQR 방법은 안정도-강인성을 보장할 수 있는 가장 잘 알려진 제어기 설계방법으로 그 구조는 그림 1과 같다.

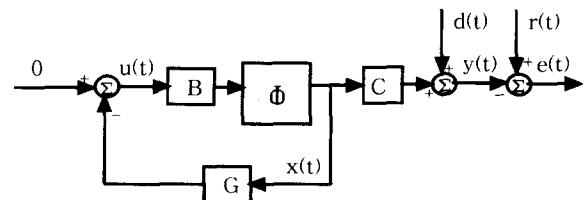


그림 1. LQR의 구조.

Fig. 1. Structure of LQR.

서보 문제에 있어서 LQR은 성능-강인성에 대한 최적 제어법칙을 수행하지 못한다. 즉, 서보 문제-기준입력을 추적하는 문제-에 있어서 LQR은 그림 1에 보는 바와 같이 출력측 외란 $d(t)$ 및 시스템의 출력 $y(t)$ 와 기준입력 $r(t)$ 과의 오차가 폐환되지 않기 때문에 명령추종의 성능-강인성 문

제는 만족스런 결과를 얻을 수 없다. 다시 말해서 그림 1의 LQ-서보의 최적해 $u_{opt}(t)$ 는 외란 $d(t)$ 와 기준입력 $r(t)$ 의 미래값에 의해 결정되기 때문에 실질적으로 최적해를 구할 수 없다[4]. 이를 해결하기 위하여 출력변수를 제한할 상태 변수에 (1)과 같이 포함시켜야 한다. 여기서 $x_r(t)$ 은 출력에 영향을 주지 않는 상태이다.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= [y_p(t) \ x_r(t)]^T \\ x_r(t) &\in \mathbb{R}^m, \ y_p(t) \in \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned} \quad (1)$$

또한, 출력측 외란에 의한 정상상태 오차를 제거하기 위해서는 피드 포워드 루프(feed forward loop)에 적분제어요소를 포함한 구조가 되어야 하므로, 출력의 적분값에 해당하는 상태 $z_p(t)$ 를 포함하는 덧붙임 상태(augmented state)공간 모델을 아래와 같이 구성해야 한다.

$$\dot{z}_p(t) = I y_p(t) \quad (2)$$

$$x(t) = [z_p(t) \ x_p(t)]^T, \ x(t) \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C_p = [I_{m \times m} \ 0_{m \times (n-m)}], \quad (6)$$

$$D_p = [0_{(n-m) \times m} \ I_{(n-m) \times (n-m)}]$$

이때 제어법칙은 (7)과 같이 되며, 제어이득을 편이상 (8)과 같이 분해하면 그림 2와 같이 LQ-서보의 구조를 나타낼 수 있다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (7)$$

$$G = [G_z \ G_y \ G_r] \quad (8)$$

$$\Phi_p(s) = (sI - A_p)^{-1} \quad (9)$$

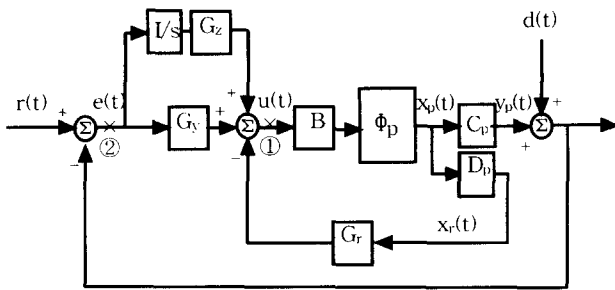


그림 2. 출력제한과 자유적분요소를 포함하는 LQ-servo 구조.

Fig. 2. Structure of LQ-servo with an output feedback and a free integral element.

III. LQ-서보 시스템 설계

앞장에서 설명한 출력제한과 적분 제어 요소를 포함한 LQ-서보 시스템은 안정도-강인성을 보장 할 뿐만 아니라, 서보 시스템에서 무엇보다도 중요시 되는 명령추종 및 외란의 성능-강인성을 보장할 수 있도록 설계 되어야 한다. 그러기 위해서는 (4)의 구속 조건을 갖고 (10)의 가격함수 J를 최소화하는 G_z, G_y, G_r 의 최적해를 구하여야 한다. 이들은 가격함수에 포함되어 있는 설계 매개변수 N, ρ 를 먼저 결정한후 (11)의 Riccati 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10)$$

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1} B^T K = 0 \quad (11)$$

(10)과 (11)에서 $Q = N^T N$ 이고 $R = \rho I$ 이다.

1. Athans의 방법

출력제한과 적분제어요소를 포함한 LQ-서보(그림 2)는 설계 매개변수를 선정할 때 여유자유도를 갖고 있다는 장점이 있다. Athans 방법[2][3]에서는 이 여유자유도를 저주파 및 고주파에서 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 모든 방향에서 특이값을 일치시킬 수 있도록 설계 매개변수를 선정한다. $G_{LQ}(j\omega)$ 와의 설계 매개변수 N는 다음과 같고 (12)의 G 및 A, B는 (8), (5)와 같다.

$$G_{LQ}(j\omega) = G(sI - A)^{-1} B \quad (12)$$

$$N = [N_L \ N_H] \quad (13)$$

저주파 부분, 즉 $s \rightarrow 0$, 고주파 부분, 즉 $s \rightarrow \infty$ 일 경우 (14)의 Kalman 주파수역 등가식은 (15)과 (16)으로 근사될 수 있다.

$$\sigma_i [I + G_{LQ}(s)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2 [N(sI - A)^{-1} B]} \quad (14)$$

$$\sigma_i [G_{LQ}(0)] \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i [N_L C_p (-A_p)^{-1} B_p] \quad (15)$$

$$\sigma_i [G_{LQ}(\infty)] \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i [N_H B_p] \quad (16)$$

저주파 부분 및 고주파 부분에서 모든 방향의 특이값을 일치 시키기 위해서는 (17)과 (18)이 성립해야 하므로, 설계 매개변수 $[N_L \ N_H]$ 은 (19)로 결정된다[9].

$$N_L C_p (-A)^{-1} B_p = I \quad (17)$$

$$N_H B_p = I \quad (18)$$

$$N = [N_L \ N_H] = [(C_p (-A_p)^{-1} B_p)^{-1} \ (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T] \quad (19)$$

위와 같은 방법으로 설계 매개변수 N을 선정하였을 때 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값 형상은 저주파 및 고주파 부분이 잘 일치됨을 알 수 있다. 또한, 설계 매개변수 $R = \rho I$ 는 특이값 형상의 모양새에 영향을 주지 않고 단지 상하 평행이동시키는 역할을 하기 때문에, 명령추종 및 외란의 장벽과 센서잡음 장벽을 고려하여 명령추종 및 외란 장벽의 경계값 Ω_c 와 센서잡음 장벽의 경계값 Ω_n 사이에 교차 주파수 ω_c 가 존재하도록 (20)과 같이 설계 매개변수 ρ 를 결정한다[9].

$$\frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_c^2} \quad (20)$$

서보 시스템에서 무엇보다도 중요시하는 것은 명령추종과 외란제거의 성능-강인성이므로 이를 보장하기 위해서는 그림 2의 플랜트 출력 측에서 절단한 ② 점에서의 루우프 전달함수 $T(s)$ 의 특이값 형상으로 설계하여야 한다. 그러나 Athans의 방법은 플랜트 입력 측에서 절단한 ① 점에서의 루우프 전달함수 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값 형상으로 설계하였기 때문에 명령추종의 성능-강인성을 보장받을 수 없다. 이러한 점을 해결하기 위해서 본 논문에서는 $T(s)$ 의 특이값 형상으로 설계 매개변수를 결정하는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

2. 본 논문에서 제안된 방법

2.1 이론적 배경

LQ-서보의 성능-강인성을 보장하기 위해서는 T(s)의 특이값 형상으로 설계하여야 한다는 것을 앞절에서 설명하였다. 이 T(s)는 (21)와 같이 구하여진다.

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{I}{s} G_z) \quad (21)$$

저주파수 및 고주파수 부분에서 T(s)의 특이값을 일치시키기 위하여 Kwakernaak Sivan이 발표한 제어 이득행렬 G의 극한거동에 관한 [정리 1]을 이용한다[7].

정리 1 : $N\Phi(s)B$ 가 최소위상 플랜트이면 제어 이득행렬 G의 극한거동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = WN \quad (22)$$

여기서, W는 일원행렬 (unitary matrix) 로 $W^T W = I$ 이다.

증명 : 참고문헌 [7] 참조

LQ-서보에서 제어 이득행렬 G와 설계 매개변수 N은 (23), (24)와 같으므로 정리 1은 다음 (25), (26), (27)과 같이 확장될 수 있다.

$$G = [G_z \quad G_y \quad G_r] \quad (23)$$

$$N = [N_z \quad N_y \quad N_r] \quad (24)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_z = WN_z \quad (25)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_y = WN_y \quad (26)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_r = WN_r \quad (27)$$

여기서, N_z, N_y, N_r 은 설계 매개변수이므로 W가 단위행렬이 되도록 하는 $\bar{N}_z, \bar{N}_y, \bar{N}_r$ 이 존재한다. 그러면 (25), (26), (27)은 (28), (29), (30)과 같이 된다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_z = \bar{N}_z \quad (28)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_y = \bar{N}_y \quad (29)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_r = \bar{N}_r \quad (30)$$

그러면 LQ-서보의 성능-강인성을 보장하기 위하여 T(s)의 특이값을 저주파수, 고주파수 부분에서 각각 일치시켜 보자.

2.2 저주파수 부분에서 T(s)의 특이값 일치

저주파수 부분에서는 $s \rightarrow 0$ 이므로 T(s)는 아래(31)과 같이 근사되고 (32)와 같이 변형된다.

$$T(s) \approx C_p(-A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p \frac{I}{s} G_z \quad (31)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \sqrt{\rho} G_r D_p)^{-1} B_p \sqrt{\rho} G_z \quad (32)$$

여기서 플랜트가 최소위상 일때, $\rho \rightarrow 0$ 에서 (28), (30)이 성립하므로 이를 이용하면 (32)은 (33)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_r D_p)^{-1} B_p \bar{N}_z \quad (33)$$

한편, 플랜트 식 A_p 와 B_p 를 다음과 같이 분해하자.

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

n을 플랜트의 상태 차원(state dimension), m을 입력 및 출력의 차원이라 하면, A_{11} 은 $[m \times m]$, A_{12} 는 $[m \times (n-m)]$, A_{21} 은 $[(n-m) \times m]$, A_{22} 는 $[(n-m) \times (n-m)]$ 행렬이며, B_1 은 $[m \times m]$, B_2 은 $[(n-m) \times m]$ 행렬이다. 그러면 T(s)의 역행렬부분은 (34)와 (6)에 의해 다음과 같이 변형된다.

$$-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_r D_p = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_r \\ -A_{21} & -A_{22} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_2 \bar{N}_r \end{bmatrix} \quad (35)$$

만약 다음 (36)이 성립한다면, (35)의 역행렬은 (37)과 같이 된다.

$$-A_{12} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_r = 0 \quad (36)$$

$$(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_r D_p)^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{11} & 0 \\ -A_{21} - A_{22} + B_2 B_1^{-1} A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \quad (37)$$

여기서 $-A_{22} + B_2 B_1^{-1} A_{12} = L$ 이라하면, (37)은 역행렬공 [6]에 의해 (38)로 변형된다.

$$(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_r D_p)^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & 0 \\ -L^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & L^{-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

그러므로, (33)은 (6)과 (38)을 이용하면 아래와 같이 정리 된다.

$$\begin{aligned} T(s) &\approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} [I \quad 0] \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & 0 \\ -L^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \bar{N}_z \\ &= -\frac{1}{s\sqrt{\rho}} A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_z \end{aligned} \quad (39)$$

최종적으로 저주파 부분에서 T(s) 특이값을 일치시키기 위해서는 (41)을 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수 \bar{N}_z 는 (42)와 같이 결정된다.

$$\sigma_i [T(s)] = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i [A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_z] \quad (40)$$

$$A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_z = I \quad (41)$$

$$\therefore \bar{N}_z = B_1^{-1} A_{11} \quad (42)$$

또한 앞에서 언급한 선제조건(36)을 만족하기 위해서는 설계 매개변수 \bar{N}_y 은 (43)와 같이 결정되어야 한다.

$$\therefore \bar{N}_y = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \quad (43)$$

2.3 고주파수 부분에서 T(s)의 특이값 일치

고주파 부분에서는 $s \rightarrow \infty$ 이므로 T(s)는 (44)와 같이 근사되어 (45)와 같이 된다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s} C_p B_p G_y = \frac{1}{s} [I \quad 0] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} G_y = \frac{1}{s} B_1 G_y \quad (44)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \sqrt{\rho} G_y \quad (45)$$

또한, $\rho \rightarrow 0$ 이고 최소위상 플랜트라는 가정하에 (29)가 성립하므로 이를 이용하여 (45)을 (46)과 같이 근사시킨다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_y \quad (46)$$

특이값을 일치시키기 위하여 (48)을 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수 \bar{N}_y 는 (49)와 같이 결정된다.

$$\sigma_i [T(s)] = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i [B_1 \bar{N}_y] \quad (47)$$

$$B_1 \bar{N}_y = I \quad (48)$$

$$\therefore \bar{N}_y = B_1^{-1} \quad (49)$$

위의 설계 과정은 B_1 이 정칙행렬이어야 한다. 그러나 LQ-서보 시스템은 성능오차(performance error)를 제한시키기 위하여 출력궤환을 사용한다. G. Gu[5]의 출력 궤환시의 최적 조건 정리 2에 따라, 서보 시스템의 최적해가 존재 하려면 B_1 은 정칙행렬이어야 한다.

정리 2 : 출력제한에 있어서 가격함수 (10)을 최소화 하는 입력 $u(t) = -Gx(t)$ 가 존재하려면 아래 두 조건을 만족해야 한다. 또한 그 역으로 아래 두조건이 만족되지 않으면 최적해 $u(t)$ 가 존재하지 않는다.

- i) $\det(CB) \neq 0$
- ii) 개루우프 플랜트 전달함수 $N(sI - A)^{-1}B$ 가 최소 위상 플랜트이어야 한다.

증명 : 참고문헌 [5] 참조

본 연구의 목표인 서보 문제를 출력제한을 이용하여 해결하기 위해서는 정리 2의 두 조건을 만족하여야 한다. 다시말해서 B_1 이 정칙행렬이 아니거나, 플랜트가 비최소위상이면 출력제한을 이용하는 본 논문에서 제안한 설계방법으로는 최적해를 구할 수 없다.

2.4 설계 매개변수 ρ 의 결정

저주파 및 고주파 부분에서 $T(s)$ 의 특이값을 일치시키기 위해서는 설계 매개변수 WN 은 (49)과 같이 되어야 한다.

$$WN = [\bar{N}_z : \bar{N}_y : \bar{N}_r] \tag{50}$$

$$= [B_1^{-1}A_{11} : B_1^{-1} : \sqrt{\rho} B_1^{-1}A_{12}]$$

그런데 위와 같이 WN 을 결정하려면 설계 매개변수 ρ 의 결정이 선행되어야 한다. ρ 의 결정은 Athans의 방법과 마찬가지로 $T(s)$ 의 특이값 형상에서 명령추종 및 외란의 장벽과 센서 잡음 장벽을 고려하여 선정한다. 이때 저주파 영역의 특이값이 일치된 $T(s)$ 의 이득은 근사적으로 (51)와 같이 되며 교차주파수 ω_c 는 (52)과 같이 구하여진다.

$$\sigma_{|T(j\omega)} \approx \frac{1}{\omega\sqrt{\rho}} \tag{51}$$

$$\frac{1}{\omega_c\sqrt{\rho}} = 1 \tag{52}$$

$$\therefore \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

설계 사양으로 주어지는 명령추종 및 외란의 장벽의 경계값 Ω_r 과 센서잡음 장벽의 경계값 Ω_n 사이에 교차주파수 ω_c 가 존재하도록 (53)와 같이 결정한다.

$$\Omega_r < \omega_c < \Omega_n$$

$$\Omega_r < \frac{1}{\sqrt{\rho}} < \Omega_n$$

$$\therefore \frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_r^2} \tag{53}$$

2.5 성능-강인성과 안정도-강인성

본 논문에서 제안된 제안된 방법으로 설계 매개변수를 결정하면, LQ-서보 시스템은 LQR에서와 마찬가지로 성능-강인성식 (54)와 안정도-강인성식 (55)을 만족한다는 것을 증명하자.

$$\sigma_{\min}[I + T(s)] \geq 1 \tag{54}$$

$$\sigma_{\min}[I + T^{-1}(s)] \geq \frac{1}{2} \tag{55}$$

LQ-서보 시스템에서의 성능-강인성을 조사하기 위해서는 그림 2에서 표시된 플랜트 출력측에서 절단한 ②점에서 구한 루우프 전달함수 $T(s)$ 를 고려하여야 한다. 그런데 $\rho \rightarrow 0$ 인 경우, 본 논문에서 제안된 제안된 방법으로 설계 매개변수 N 를 결정하면 $T(s)$ 의 식은 (56)과 같이 스칼라 배의 단위행렬이 되므로 (57)을 만족한다. $\omega\sqrt{\rho}$ 은 항상 양수 이므로 (54)의 성능-강인성식을 만족하게 된다.

$$T(s) \approx \frac{1}{\omega\sqrt{\rho}} I \tag{56}$$

$$\sigma_{|I + T} = \sigma_{|I + \frac{1}{s\sqrt{\rho}} I} \tag{57}$$

$$= 1 + \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \geq 1$$

이것은, 본 논문에서 제안한 설계 방법을 이용하면 ρ 를 작은 값으로 설정함에 따라 $T(s)$ 가 성능-강인성 식을 만족하는 방향으로 구하여 진다는 것을 의미한다.

한편, LQ-서보의 안정도-강인성을 조사하기 위해서는 그림 2에서 표시된 플랜트 입력측에서 절단한 점 ①에서의 전달함수 $G_{LQ}(s)$ 를 구해야 한다. 그림 2에서의 두개의 제한 루우프를 아래 (58)과 같이 나타내면, (59)와 같이 LQR 구조로 생각할 수 있다.

$$G = (\frac{1}{s}G_r + G_p)C_p + G_rD_p \tag{58}$$

$$G_{LQ}(s) = G(sI - A)^{-1}B \tag{59}$$

$$= G\Phi(s)B$$

그러므로 안정도-강인성 문제는 LQR에서와 동일하게 생각하여 다음의 안정도-강인성식 (60), (61)를 얻을 수 있다.

$$C_{LQ}(s) = G_{LQ}(s)[I + G_{LQ}(s)]^{-1} \tag{60}$$

$$\sigma_{\max}[C_{LQ}(s)] \leq 2 (\approx 6 \text{ dB}) \tag{61}$$

이것은 실제 시스템이 모든 주파수에서 $\sigma_{\max}[E(s)] \leq 0.5$ 인 곱셈형 모델링 오차에 대하여 안정도-강인성을 보장할 수 있음을 의미한다.

3. 본 논문에서 제안하는 방법을 사용한 고주파 잡음에 강한 서보 구조※

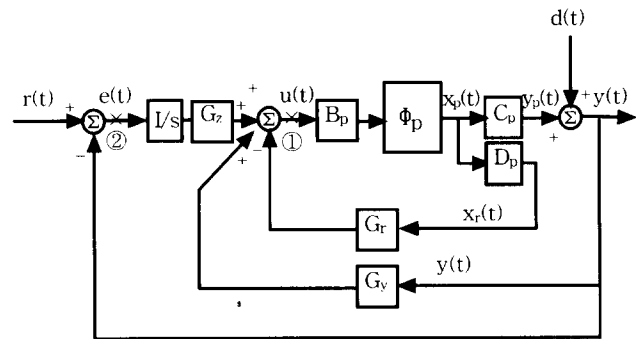


그림 3. 고주파잡음에 강한 LQ-서보 구조.
Fig. 3. Structure of the LQ-servo guaranteed good performance under the high frequency noise.

플랜트 입력 u 가 (62)과 같이 주어져 LQ-servo의 구조가 그림 3과 같이 되는 경우를 고려해보면, $T(s)$ 는 (63)과 같이 표현된다.

$$u = [r - y] \frac{1}{s} G_z - [G_y \ G_r] \begin{bmatrix} y \\ x_r \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p + B_p G_y D_p)^{-1} B_p \frac{1}{s} G_z \tag{63}$$

이 경우 $s \rightarrow \infty$ 됨에 따라서 $T(s) \propto \frac{1}{s}$ 되므로 그림 2 구조의 $T(s) \propto \frac{1}{s}$ 보다 고주파 잡음에 더 좋은 성능을 갖게 된다. 그러나 그림 3의 경우에도 설계 매개변수인 Q, R 을 구하기 위하여 Athans의 방법과 같이 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값을 일치시키는 방법을 사용한다면 이 역시 성능-강인성식 (54)를 만족하지 못하는 결과가 나온다. 왜냐하면, $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값을 일치시키는 방법으로 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값 형상이 명령추종 장벽과 센서잡음에 대한 장벽사이에 위치하도록 설계한다고 하여도 LQ-서보의 구조적 특성상 $G_{LQ}(j\omega)$ 와 $T(s)$ 의 전달함수식이 같지 않기 때문에 $T(s)$ 의 특이값 형

상이 명령추종 장벽 또는 센서잡음 장벽을 침범할 수 있기 때문이다. 만약 그림 3의 경우에 있어서도 2절에서 제안된 방법과 같이 $T(s)$ 의 특이값을 일치시킬 수 있다면 성능-강인성식 (54)를 만족하면서 고주파 잡음에 더 좋은 성능을 보이는 제어기 설계가 가능할 것이다.

그림 3의 구조를 본 논문에서 제안하는 방법인 $T(s)$ 의 특이값을 일치시키는 방법을 적용하기 위해서, 2절의 방법과 유사한 절차로 설계매개변수 $Q = N^T N$ 와 $R = \rho I$ 를 구하면 다음과 같다.

그림 3의 구조에 대한 $T(s)$ 의 (63)은 저주파 부분과 고주파 부분에서 (64), (65)와 같이 근사할 수 있다.

$$s \rightarrow 0, \quad T(s) = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_z D_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_z D_p)^{-1} B_p \bar{N}_z \quad (64)$$

$$s \rightarrow \infty, \quad T(s) = \frac{1}{s^2 \sqrt{\rho}} C_p B_p \bar{N}_z \quad (65)$$

따라서, 본 논문에서 제안한 방법인 2절과 같은 절차에 의하여 설계매개변수 $Q = N^T N$ 는 다음과 같이 정할 수 있다.

$$N = [N_z \ N_y \ N_r] \quad (66)$$

$$N_z = B_1^{-1} \quad (67)$$

$$N_y = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{11} \quad (68)$$

$$N_r = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \quad (69)$$

또한, $R = \rho I$ 를 선정하기 위하여 교차주파수를 계산하는데 있어서 저주파 영역 부분인 (64)로 근사하여 계산하는 경우와 고주파 영역 부분인 (65)으로 근사하여 계산하는 경우가 다르므로 이 두 경우의 범위를 고려하여 선정해야 한다. 교차주파수를 저주파 영역에 가까운 것으로 간주하여 계산하는 경우는 (53)와 동일하게 되며, 교차주파수를 고주파 영역에 가까운 것으로 간주하여 계산하는 경우는 (65)와 같이 된다.

$$\frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_r^2} \quad (70)$$

이렇게 하여 그림 3의 구조에 본 논문의 설계절차를 적용하게 되면, $T(s)$ 의 교차주파수를 주어진 Ω_r 과 Ω_n 사이에 위치하도록 할 수 있다. 이는 Athans의 방법과는 달리 $T(s)$ 의 특이값을 일치시켰으므로 $T(s)$ 의 교차주파수가 ρ 에만 영향을 받기 때문에 ρ 만을 조정하여 $T(s)$ 의 교차주파수가 위치하도록 할 수 있는 것이다. 물론 그림 3의 구조의 경우 고주파 부분이 40dB로 떨어지므로 그림 2이 20dB로 떨어지는 것에 비하여 고주파 잡음에 대해서는 우수하다고 이야기할 수 있으나, 교차주파수를 설계사양으로 주어지는 Ω_r 과 Ω_n 사이에 위치하도록 하기 위하여 필요로 하는 ρ 값이 본 논문의 설계절차를 적용하는 경우에 대하여 그림 2의 구조보다 그림 3의 구조가 적은 값을 요구하므로 더욱 큰 제어이득이 필요로 하여 실제 구현함에 있어 많은 어려움이 발생할 수 있다. 따라서 고주파 잡음이 20dB보다 크지 않는 경우에는 그림 2의 구조가 유리하며, 20dB이상 40dB이하의 고주파 잡음에 대해서는 그림 3의 구조가 유리할 것이므로 설계사양에 따라 보다 유리한 구조로 LQ-서보를 본 논문에서 제안한 방법으로 설계할 수 있다.

IV. 예제 및 고찰

1. 예제

이 예제는 Athans의 연구에서 보인 것으로, 본 논문에서 제안하는 방법과 Athans 방법의 비교를 쉽게 하기 위해 선택하였다.

(상태 공간 모델식)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.4600 & 0.0000 & 2.4276 \\ 0.1643 & -0.4000 & -0.3788 \\ 0.3107 & 0.0000 & -2.2300 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.2026 \\ 0.3921 & -0.1245 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

(설계 사양)

① 안정도-강인성 : $E_{\max}^{-1}(\omega) = \frac{10^2}{\omega}$

② 성능-강인성 :

명령추종 및 외란 장벽의 경계값, $\Omega_r = 10$

센서 잡음 장벽의 경계값, $\Omega_n = 10^2$

2. Athans 방법의 결과

Athans 방법으로 설계하면, (19), (20)에 의해 설계 매개변수 N 은 다음과 같이 구하여 진다.

$$N = \begin{bmatrix} -0.2558 & 1.1289 & 0.0170 & 0.9377 & 1.2056 \\ 0.2626 & -0.2291 & 0.1908 & -0.0787 & -0.0944 \end{bmatrix}$$

$\rho = 0.001$ 일때의 최적 이득 행렬 G 를 Riccati 방정식에 의해 구하면 다음과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} -8.1801 & 38.6222 & 0.6867 & 30.5549 & 35.2799 \\ 8.2165 & -6.8230 & 5.9885 & -2.3751 & -1.8747 \end{bmatrix}$$

3. 새로운 방법의 결과

설계사양 중 안정도-강인성부분에 나타나는 고주파 잡음 정도가 20dB를 넘지 않으므로 그림 2의 구조를 사용한다. 만약 이 경우 그림 3의 구조를 사용하게 되면, 그림 2구조를 사용하는것과 비교하여 볼 때, 비슷한 성능을 갖게되나 $0.0001 > \rho > 0.00000001$ 을 선택해야 하므로 훨씬 많은 제어이득을 요구하게 되므로 본 예제에 있어서는 바람직하지 않다. 그러므로 그림 2의 구조를 사용하여 본 논문에서 제안하는 설계절차를 적용한다.

설계절차에 따라, 설계 매개변수 N 을 구하기 앞서 ρ 를 결정한다. 설계사양의 명령추종 및 외란의 경계값 Ω_r 과 센서잡음 장벽의 경계값 Ω_n 에 의해 다음과 같이 ρ 값의 선택 범위가 결정 된다.

$$\frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_r^2}$$

$$\therefore 0.0001 < \rho < 0.01$$

ρ 를 구하는 방법은 Athans의 방법과 동일하므로 Athans의 방법에서와 똑같은 $\rho = 0.001$ 을 선택하여 (42), (43), (49)에 의해 설계 매개변수 N 을 결정하고 최적 G 를 구하면 다음과 같다.

$$N = \begin{bmatrix} -0.3217 & 0.9948 & 0.0595 & 2.4869 & -0.0252 \\ 0.3065 & -0.0800 & 0.1874 & -0.1999 & 0.0168 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -10.0741 & 31.4296 & 1.9274 & 78.5741 & -1.4941 \\ 9.7952 & -2.8489 & 5.9171 & -7.1223 & 1.0174 \end{bmatrix}$$

4. 결과 및 고찰

예제에 대하여 Athans 방법과 본 논문에서 제안된 방법을 비교하여 보자. Athans의 방법은 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값을 일치시키는 방법이므로 그림 4의 (a)에서 보이는 바와 같이 $G_{LQ}(j\omega)$ 의 특이값은 저주파 고주파 영역에서 어느정도 일치되고 있으나 그림 5의 (a)에 보이는 것과 같이 $T(j\omega)$ 의 특이값은 일치되지 않고 있다. 특히 $T(j\omega)$ 의 특이값은 저주파 부분에서 큰 값으로 벌어져 있기 때문에, 설계사양이 바뀌거나 상태공간 식이 달라지면 '명령추종 및

외란 장벽'을 침범하여 성능-강인성을 보장 하지 못함을 알 수 있다. 이에 반하여 본 논문에서 제안된 방법은 그림 5의 (b)에서 보이는 바와 같이, $T(s)$ 특이값이 근사적으로 일치 되어 직선에 가까운 꼴을 보이고 있으므로, 설계사양이 바뀌거나 비최소위상 플랜트를 제외한 임의의 플랜트에 대하여도 그에 따른 적당한 ρ 값을 결정하게 되면 명령추종 및 외란 장벽 및 센서잡음 장벽 모두 침범하지 않는다. 그림 6과 그림 7을 보면 본 논문에서 제안한 방법만이 근사적으로 성능-강인성식 (54)와 안정도-강인성식 (55)를 만족시킬 $r_1(t) = [1 \ 0]^T$ 수 있음을 알 수 있다. 그림 5는 기준입력에 대한 시간응답이고, 그림 6은 기준입력 $r_2(t) = [0 \ 1]^T$ 에 대한 시간응답이다. 여기에서도 Athans의 방법보다 본 논문에서 제안된 방법이 응답속도와 안정 시간이 상대적으로 우수함을 알 수 있다.

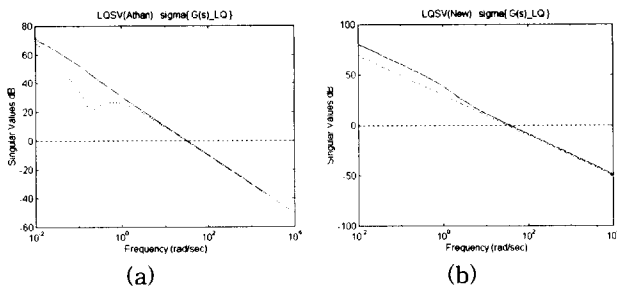


그림 4. $G(j\omega)_{LQ}$ 의 특이값 형상 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 4. Singular value plots of $G(j\omega)_{LQ}$: (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

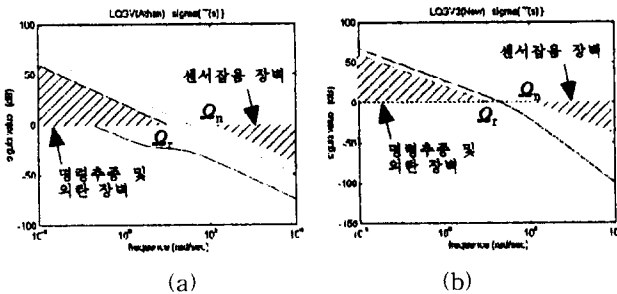


그림 5. $T(j\omega)$ 의 특이값 형상 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 5. singular value plots of $T(j\omega)$: (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

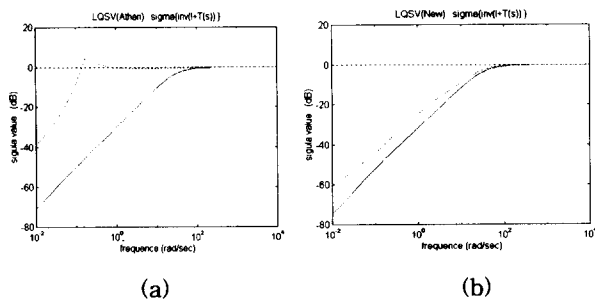


그림 6. 성능 강인성 형상 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 6. shapes of the performance robustness : (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

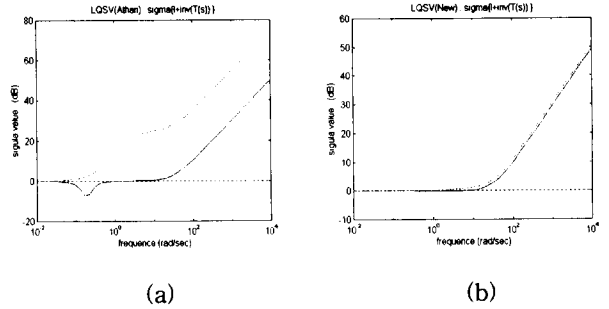


그림 7. 안정도 강인성 형상 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 7. shapes of the stability robustness: (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

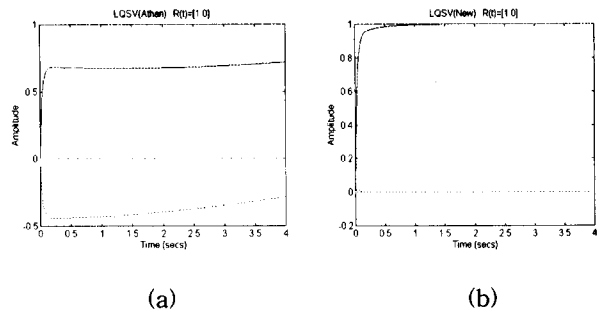


그림 8. 기준입력 $r_1(t)$ 에 대한 시간응답 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 8. time response for the reference input $r_1(t)$: (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

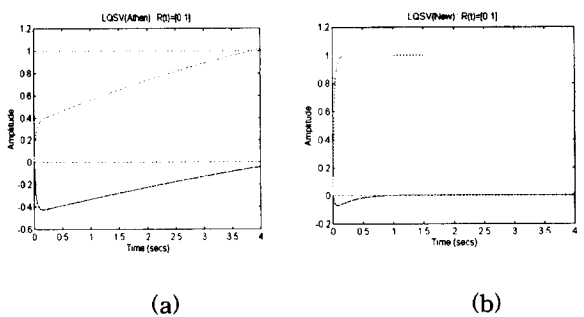


그림 9. 기준입력 $r_1(t)$ 에 대한 시간응답 : (a) Athans의 방법, (b) 본 논문에서 제안된 방법.
Fig. 9. time response for the reference input $r_1(t)$: (a) Athans' method, (b) the method proposed in this paper.

V. 결론

Athans의 방법으로 설계되어진 LQ-서보 시스템은 플랜트 입력측에서 절단한 루우프 전달함수 $G_{LQ}(s)$ 를 사용하여 특이값 형상으로 설계하기 때문에 안정도-강인성은 보장받을 수 있으나, 명령추종 및 외란제거 등의 성능-강인성을 보장받지는 못한다. 본 논문에서는 플랜트의 출력 측에서 절단한 루우프 전달함수 $T(s)$ 의 특이값을 저주파 및 고주파 부분에서 일치시킴으로써, 안정도-강인성과 성능-강인성을 동시에 보장받을 수 있는 새로운 LQ-서보 시스템 설계 방법을 제시하였다. 이 방법은 설계 사양에서 결정되어지는

ρ 값에 대하여 성능-강인성을 만족하도록 제어 루우프가 결정되어지므로 기존의 방법보다 명령추종 및 응답속도 면에서 우수할 것으로 생각된다. 또한 출력 제한을 사용하기 때문에 출력 측 외란에 대해서도 강인함을 보인다.

그러나, 본 논문에서는 Kwakernaak Sivan의 극한 거동식을 도입하였기 때문에 충분히 작지 않은 ρ 값에서는 정확한 특이값 일치에 이루어지지 않는다는 문제점이 있다. 이는 제어 이득이 커져야 하는 문제(high gain problem)와도 부합되는 문제로 앞으로 연구가 진행되어야 할 것이며, 출력 제한시 최적해의 존재 조건에 따라 본 논문에서 제안하는 방법은 최소위상 플랜트에만 적용될 수 있다. 따라서 본 논문의 방법을 비최소 위상 플랜트에 적용할 수 있도록 하는 문제 역시 더욱 연구가 진행되어야 할 것이다.

※ 고주파 잡음에 강한 서보 구조에 대한 고찰은 심사자의 의견에 기초한 것임을 밝혀둠.

참고문헌

- [1] B. D. O. Anderson, J. A. Gibson, "Phase lag and lead weighting in linear-quadratic control," *Optimal Control Application & Methods*, vol. 6, pp. 249-263, 1985.
- [2] M. Athans, *Lecture Notes on Multivariable Control Systems*, M.I.T. Ref. no. 840418/6232, 1984.
- [3] M. Athans, *Lecture Notes on Multivariable Control Systems*, M.I.T. Ref. no. 860224/6234, 1986.
- [4] E. T. Davison and B. M. Scherzinger, "Perfect control of the robust servomechanism problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 689-702, 1987.
- [5] G. Gu, "On the existence of linear optimal control with output feedback," *SIAM. J. Control and Optimization*, vol. 28, pp. 711-719, 1990.
- [6] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [7] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, pp. 79-86, 1972.
- [8] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [9] 김 종 식, 선형제어 시스템 공학, 청문각, 1991.



윤 성 오

1991년 한양대학교 전자통신공학과 졸업. 한양대학교 대학원 전자통신공학과 석사(1994). 1997 -현재 한양대학교 대학원 전자통신공학과 박사과정, (주)에스원 기술연구소 전임연구원. 관심분야는 제어이론, LMI, 강인제어, H_{∞} 제어.

서 병 설

제어·자동화·시스템공학회 논문지 제 2권, 제 1호 25쪽 참조.