

시변 섭동의 안정범위에 관한 연구

A Study on Stability Bounds of Time-varying Perturbations

김 병 수, 한 형 석, 이 장 규
(Byung Soo Kim, Hyung Seok Han, Jang Gyu Lee)

Abstract : The stability robustness problem of linear discrete-time systems with time-varying perturbations is considered. By using Lyapunov direct method, the perturbation bounds for guaranteeing the quadratic stability of the uncertain systems are derived. In the previous results, the perturbation bounds are derived by the quadratic equation stemmed from Lyapunov method. In this paper, the bounds are obtained by a numerical optimization technique. Linear matrix inequalities are proposed to compute the perturbation bounds. It is demonstrated that the suggested bound is less conservative for the uncertain systems with unstructured perturbations and seems to be maximal in many examples. Furthermore, the suggested bound is shown to be maximal for the special classes of structured perturbations.

Keywords : stability, robustness, bound, discrete-time, time-varying, LMI

I. 서론

실제 시스템의 수학적 표현에서 기인된 모델 불확실성(uncertainty)으로 인하여 플랜트의 성능이 심각하게 저하될 수 있으므로, 제어기 설계 시에는 기준(nominal) 시스템에 대한 성능 향상 방안과 함께 견실성(robustness)에 고려가 필요하다. 불확실한 시스템의 견실성 해석에 관한 연구는 최근 매우 활발하게 진행되고 있으며 문제 해결을 위한 여러 가지 접근 방법이 제안되었다. 본 논문에서는 불확실성이 시변 섭동(time-varying perturbation)으로 표현되는 경우에 대하여 견실 안정성(robust stability)이 보장되는 불확실성의 크기를 찾는 문제를 다루고자 한다. 불확실성이 비 구조화된 섭동(unstructured perturbation)으로 표현되는 이산 시스템(discrete system)의 견실 안정범위는 주로 Lyapunov 안정성 해석 방법을 이용하여 유도되며, 최근의 연구결과는 [1-5]에 나타난다. 이들 논문에서는 섭동의 안정범위를 2차 방정식의 근으로 표시하기 위하여 제한적인 부등식을 이용하므로 실제로 구해지는 안정범위가 매우 좁게 나타나는 단점이 있다. 그러나, Yaz와 Niu[1]의 안정범위는 최적화의 개념을 도입하여 다른 결과보다 개선된 조건을 제시한다. Halicka와 Rosinová[5]는 다양한 안정범위들을 해석적으로 비교하고 Yaz와 Niu[1]의 조건이 다른 조건에 비하여 향상된 결과를 준다는 것을 증명하였다. 그러나, Yaz와 Niu[1]가 제안한 안정범위를 구하기 위해서는 정해진 구간 안의 모든 실수 값에 대하여 계산 과정을 반복해야 한다. 본 논문에서는 비 구조화된 시변 섭동의 안정범위를 최적화 기법을 이용하여 계산하는 방법을 제시한다. 여기서 필요한 목적 함수(object function)는 준볼록(quasi-convex) 함수가 된다. 따라서, 볼록 함수의 최소화를 위한 수치 알고리즘을 적용하여 최적의 해를 구할 수 있다[6,7]. 특히, 본 논문의 최적화 문제는 선형행렬부등식(linear matrix inequality)을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제(generalized eigenvalue problem)로 표현되므로 다른 최적화 방법을 사용한 경우보다 계산 시간과 신뢰성에서 잇점을 가지게 된다 [8].

불확실성이 구조화된 섭동으로 표현되는 시스템의 안정 범위에 대해서는 많은 논문에서 연구 결과가 제시되었다

[9-13]. 대부분의 논문에서 제안된 조건들은 일반적으로 충분조건이며 특별한 구조를 가지는 섭동하에서 필요충분조건이 된다. 연속 시간계에서는 제곱 안정성(quadratic stability)을 만족하는 구조화된 섭동의 최대 안정범위에 대한 연구결과가 Luo등에 의하여 발표되었다[14]. 이 논문에서는 최대섭동 문제를 minmax 최적화 문제로 수식화 하였으며 해석적으로 기울기(gradient)를 구하여 효과적으로 해를 구할 수 있다. Gu는 이산 시간계에서 특별한 구조를 갖는 섭동의 최대 안정범위를 찾는 문제가 준볼록 함수의 최적화 문제로 변환됨을 증명하였다[15]. 또한, 준경사 기법(quasi-gradient method)을 이용하여 수치적으로 해를 구할 수 있다는 것을 보였다. 그러나, 수치 알고리즘을 적용하기 위해서는 제한조건을 만족하는 초기치의 선정이 필요하고 기울기의 계산 과정등이 필요하다. 본 논문에서는 [15]에서 제안한 섭동에 대한 최대 안정범위를 찾는 문제가 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제로 변환 가능하다는 사실을 보인다. 따라서, 본 논문에서 제안하는 방법을 이용하면 초기치의 선정과 기울기 계산 과정이 불필요하여 수치적으로 보다 간편하게 최대 안정범위를 구할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 비 구조화된 섭동의 안정범위를 찾는 문제를 고려하며, 3장에서는 특별한 구조를 가지는 섭동의 최대 안정범위를 선형행렬부등식을 이용하여 계산할 수 있음을 보인다. 4장에서는 비 구조화된 섭동의 안정범위를 비교하기 위하여 여러 가지 예제를 제시한다. 그리고, 5장에서 본 논문의 결론을 제시한다.

II. 비 구조화된 시변 섭동의 안정범위

불확실한 시변 이산시스템은 (1)과 같은 상태방정식으로 표현된다.

$$x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k \quad (1)$$

식에서, $A, \Delta A_k \in R^{n \times n}$ 이며, $x_k \in R^n, k=0, 1, \dots$ 이다. 본 논문에서는 기준 상태행렬 A 가 시불변 점근 안정(time-invariant asymptotically stable)이라고 가정한다. 시변 섭동행렬 ΔA_k 는 다음과 같이 집합 Ω 에 의하여 한정된다.

$$\Delta A_k \in \Omega \text{ for all } k. \quad (2)$$

시변 시스템의 안정성 해석을 위하여 정의 1에서 제곱 안정성(quadratic stability)의 개념을 도입한다.

정의 1(8) : 다음의 Lyapunov 부등식을 만족하는 양의 정칙 행렬(positive definite matrix) $P=P^T \in R^{n \times n}$ 가 존재하면 (2)로 표시되는 불확실성을 갖는 시변 이산시스템 (1)은 제곱 안정하다.

$$P - (A + \Delta A_k)^T P (A + \Delta A_k) > 0 \text{ for all } \Delta A_k \in \Omega$$

여기서, $\|\cdot\|$ 는 스펙트럴 노름을 나타낸다. 본 장에서 다루는 비 구조화된 시변 섭동행렬의 경우 집합 Ω 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Omega = \{X: \|X\| < \mu\}. \tag{3}$$

즉, 시변 섭동행렬은 $\|\Delta A_k\| < \mu(\mu > 0), \forall k$ 를 만족한다. 비 구조화된 시변 섭동의 안정범위는 정리 1에서 주어지며 증명을 위하여 다음의 두 보조정리를 도입한다.

보조정리 1(16) : 행렬 A 와 C 가 정방(square)일 때, 블록 행렬 $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}$ 가 양의 정칙행렬이 되기 위한 필요충분 조건은 $C > 0$ 이고 $A > B^T C^{-1} B$ 이다.

보조정리 2 : 행렬 X 가 정방이면, 임의의 양수 μ 에 대하여, $\mu I + \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix} > 0$ 와 $\|X\| < \mu$ 는 동등하다.

증명 : 보조정리 1에 의하여 $\mu I + \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix} > 0$ 와 $\mu^2 I - X^T X > 0$ 는 동등하다. 또한 이 식은 잘 알려진 성질[16]에 의하여 $\|X\| < \mu$ 와 동등하다. ■

정리 1 : $\mu \leq \lambda_m \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}$ 를 만족하는 양의 정칙 행렬 $P=P^T \in R^{n \times n}$ 가 존재하면 (3)의 섭동을 갖는 불확실한 시변 이산시스템 (1)은 제곱 안정하다.

증명 : 가정을 만족하는 양의 정칙행렬을 P 라 하자. $\lambda = \lambda_m \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}$ 으로 정의하면, $\lambda I - \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix} \leq 0$ 가 성립한다. 임의의 시변 섭동 ΔA_k 는 $\|\Delta A_k\| < \mu \leq \lambda$ 이므로 보조정리 2에 의하여 $\lambda I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta A_k^T \\ \Delta A_k & 0 \end{bmatrix} > 0$ 가 성립한다. 이들 식을 이용하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta A_k^T \\ \Delta A_k & 0 \end{bmatrix} > 0.$$

보조정리 1에 의하여 이 식은 (4)로 변형된다.

$$P - (A + \Delta A_k)^T P (A + \Delta A_k) > 0. \tag{4}$$

위 식은 임의의 섭동 ΔA_k 에 대하여 성립하므로 정의 1에 의하여 불확실한 시변 시스템 (1)은 제곱 안정하다. ■

정리 1에서 비 구조화된 시변 섭동의 안정범위는 정리 1에서 주어진 특정한 블록 행렬의 최소 고유치임을 보였다. 따라서, 정리 1의 안정범위를 극대화하기 위해서는 행렬 $\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}$ 의 최소 고유치를 최대화 하는 양의 정칙행렬 P 를 구해야 한다. 이를 위하여 μ^* 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu^* = \max_{P>0} \lambda_m \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

다음의 정리 2는 위의 μ^* 를 선형행렬부등식을 이용하여 구할 수 있음을 보인 것이다.

정리 2 : μ^* 는 다음의 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제의 최적해이다.

maximize λ subject to

$$\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} \leq 0, P > 0, \begin{bmatrix} X & P \\ P & I_n \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6}$$

증명 : 최적화 문제 (5)를 풀기 위하여 다음과 같은 동등한 문제를 고려한다.

maximize λ subject to

$$\lambda I_{2n} - \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & A^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, P > 0. \tag{7}$$

위 식에서 첫번째 제한 조건의 오른쪽과 왼쪽에 각각 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} > 0$ 를 곱해도 동등한 조건이 되므로 (7)는 다음과 같이 변형된다.

maximize λ subject to

$$\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} \leq 0, P > 0 \tag{8}$$

위의 제한조건들을 선형행렬부등식으로 표시하기 위하여, 새로운 행렬 변수 X 를 추가하여 다음과 같은 동등한 문제로 표현할 수 있다.

maximize λ subject to

$$\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} \leq 0, P > 0, X \geq P^2. \tag{9}$$

위 (9)에서의 마지막 제한조건은 보조정리 1에 의하여 $\begin{bmatrix} X & P \\ P & I_n \end{bmatrix} \geq 0$ 와 같은 조건이 된다. 따라서, 최적화 문제 (5)는 (6)과 같이 표현된다. ■

부연 1 : 일반화된 고유치 문제 (6)은 볼록 제한조건(convex constraints)를 갖는 준볼록 최적화 문제(quasi-convex optimization problem)이다[8]. 일반적으로 준볼록 최적화 문제는 극소점(local minimum)이 최소점(global minimum)이 된다. 따라서, 준볼록 최적화 문제는 볼록 최적화(convex optimization)를 위한 임의의 수치 알고리즘을 적용하여 최적해를 구할 수 있다[6, 7]. 특히, 본 논문에서 수식화한 바와 같은 선형행렬부등식 문제는 특별한 수치 알고리즘을 이용하면 매우 효율적으로 최적 해를 구할 수 있다[8].

이미 알려진 바와 같이 상태행렬 A 가 노말(normal), $AA^T = A^T A$ 이면 비 구조화된 섭동의 안정범위는 $1 - \rho(A)$ 와 같다[5]. 본 논문에서 제안한 안정범위도 이러한 성질이 있으며, 이의 증명을 위하여 다음의 두 보조정리를 도입한다.

보조정리 3(17) : 행렬 A 가 정칙(nonsingular)이면 다음 식이 성립한다.

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \det [B - CA^{-1}D]. \tag{10}$$

보조정리 4 : 행렬 X 가 정방이면 $\lambda_m \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_M(X)$ 가 성립한다.

증명 : 행렬 $X \neq 0$ 라고 가정하자. 보조정리 3를 이용하면 (11)의 관계식을 얻는다.

$$\det \left(-\sigma_M(X) I - \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix} \right) = \det (\sigma_M^2(X) I - XX^T) \tag{11}$$

최대 특이치 $\sigma_M(X)$ 의 정의에 의하여,

$$\det(\sigma_M^2(X)I - XX^T) = 0.$$

따라서, $-\sigma_M(X)$ 는 블록행렬 $\begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix}$ 의 고유치가 된다. 이 값이 최소 고유치임을 보이기 위하여 블록행렬 $\begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix}$ 의 고유치중에 $\hat{\lambda} < -\sigma_M(X)$ 를 만족하는 $\hat{\lambda}$ 가 있다고 가정한다. 그러면,

$$\det\left(\hat{\lambda}I - \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix}\right) = \det(\hat{\lambda}^2I - XX^T) = 0.$$

즉, $-\hat{\lambda}$ 는 행렬 X 의 특이치이며 $-\hat{\lambda} > \sigma_M(X)$ 이므로 최대특이치 $\sigma_M(X)$ 의 정의와 모순이 된다. 행렬 $X=0$ 인 경우에는 당연히 성립한다. ■

따름정리: 상태 행렬 A 가 노말이면 $\mu^* = 1 - \rho(A)$.

증명: 최대 안정범위는 $\mu^* = \max_{P>0} \lambda_m \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}$ 로 표시된다. 여기서, $P=I$ 로 두면, $\mu^* \geq \lambda_m \begin{bmatrix} I & A^T \\ A & I \end{bmatrix}$ 가 성립한다. 고유치의 성질과 보조정리 4에 의하여

$$\lambda_m \begin{bmatrix} I & A^T \\ A & I \end{bmatrix} = \lambda_m \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} + 1 = 1 - \sigma_M(A) \quad (12)$$

임을 알 수 있다. 행렬 A 가 노말인 경우 $\sigma_M(A) = \rho(A)$ 이므로 $\mu^* \geq 1 - \rho(A)$. 또한, [5]에 의하여 비 구조화된 섭동의 안정범위는 $1 - \rho(A)$ 보다 클 수 없으므로 $\mu^* = 1 - \rho(A)$ 가 된다. ■

위의 따름정리로부터 상태 행렬이 노말인 경우는 본 논문에서 제안한 방법으로도 최대 안정범위를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

III. 구조화된 시변 섭동의 안정범위

본 장에서는 시변 섭동이 다음과 같이 모델링 되는 경우의 안정범위를 찾는 문제를 고려한다.

$$\Delta A_k = \mu E(k), 0 \leq \mu < \mu_s, \quad (13)$$

식에서, 시변 섭동행렬 $E(k)$ 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$E(k) = \alpha_1(k)E_1 + \alpha_2(k)E_2 + \dots + \alpha_m(k)E_m, \\ \alpha_i(k) \geq 0, \forall i=1, \dots, m, \text{ and } k, \sum_{i=1}^m \alpha_i(k) = 1, \forall k$$

또한, 섭동 구조행렬은 $E_i \in R^{n \times n}, i=1, \dots, m$ 을 만족한다. 이러한 가정 하에서 구조화된 섭동의 대한 최대 안정범위는 [15]에서 제안되었다.

정리 3(15): (13)으로 표현되는 섭동을 갖는 불확실한 시변 시스템 (1)의 제곱 안정성을 보장하는 μ_s 의 최대값은 μ_s^* 이다. 여기서,

$$\frac{1}{\mu_s^*} = \inf_{P>0} \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_M \left(-M_1^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & E_i^T \\ E_i & 0 \end{bmatrix} M_1^{-\frac{1}{2}} \right),$$

로 정의되며, $M_1 = \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & P^{-1} \end{bmatrix}$ 이다.

부연 2: [15]에서 정리 3의 최적화 문제는 준블록 최적화 문제로 표현되며 준기울기 기법에 의하여 그 해를 구할 수 있음을 보였다.

정리 3의 안정범위를 선형행렬부동식 문제로 표시하기 위하여 다음의 보조정리 5를 도입한다.

보조정리 5: (13)의 구조화된 섭동을 갖는 시변 시스템 (1)이 제곱 안정하기 위한 필요충분 조건은 다음을 만족하

는 양의 정칙행렬 $P=P^T$ 가 존재하는 것이다.

$$P - A^T P A > 0, \\ P - (A + \mu E_i)^T P (A + \mu E_i) > 0, \\ \text{for all } i=1, \dots, m \text{ and } 0 < \mu < \mu_s.$$

증명: (충분 조건) 가정에 의하여 $\Delta A_k = \mu \sum_{i=1}^m \alpha_i(k) E_i$ 으로 표시되는 모든 섭동행렬 ΔA_k 에 대하여 다음 식을 만족하는 $P>0$ 가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta A_k^T P \\ P \Delta A_k & 0 \end{bmatrix} \\ = \sum_{i=1}^m \alpha_i(k) \left\{ \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix} \right\} > 0, \forall 0 \leq \mu < \mu_s \quad (14)$$

따라서, (13)의 섭동을 갖는 불확실한 시변 시스템 (1)은 제곱 안정하다.

(필요 조건) 제곱 안정성의 정의에 의하여 $0 \leq \mu < \mu_s$ 인 모든 μ 에 대하여

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(k) \left\{ \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix} \right\} > 0$$

를 만족하는 $P>0$ 가 존재한다. 이 식은 다음의 (15)와 (16)으로 표시할 수 있다.

$$P - A^T P A > 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \mu \sum_{i=1}^m \alpha_i(k) \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix} > 0, \forall 0 < \mu < \mu_s. \quad (16)$$

또한, (16)은 $\alpha_i(k) \geq 0$ 이고, $\sum_{i=1}^m \alpha_i(k) = 1$ 인 임의의 $\alpha_i(k)$ 에 대해서도 만족되므로 (17)이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix} > 0, \\ \forall i=1, \dots, m \text{ and } 0 < \mu < \mu_s. \quad (17)$$

위 (15)와 (17)에 의하여 증명이 완료된다. ■

정리 4: 일반화된 고유치 문제 (18)의 최적해를 λ^* 라 하면, (1)과 (13)으로 표현되는 불확실한 시변 시스템의 제곱 안정성이 보장되는 μ_s 의 최대값 μ_s^* 는 λ^{*-1} 이다.

minimize λ subject to

$$\lambda \text{diag}(M_2, \dots, M_2) + \text{diag}(F_1, \dots, F_m) > 0, \\ P > 0, M_2 > 0. \quad (18)$$

식에서, $M_2 = \begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix}$ 이며 $F_i = \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix}$ 를 나타낸다.

증명: 보조정리 5에 의하여 구조화된 시변 섭동 하에서 시변 시스템 (1)이 제곱 안정이기 위한 필요충분조건은

$$P - A^T P A > 0$$

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \\ P E_i & 0 \end{bmatrix} > 0, \\ \text{for all } i=1, \dots, m \text{ and } 0 < \mu < \mu_s,$$

을 만족하는 양의 정칙행렬 P 가 존재하는 것이다. 이 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$M_2 > 0$$

$$\text{diag}(M_2, \dots, M_2) + \mu \text{diag}(F_1, \dots, F_m) > 0, \forall 0 < \mu < \mu_s.$$

여기서 $\lambda = \mu^{-1}$ 와 $\lambda_s = \mu_s^{-1}$ 로 정의 하면,

$$M_2 > 0 \\ \lambda \text{diag}(M_2, \dots, M_2) + \text{diag}(F_1, \dots, F_m) > 0, \forall \lambda > \lambda_s \quad (19)$$

로 변환된다. (19)를 만족하는 양의 정칙행렬을 \bar{P} 라 하고 $\bar{\lambda}_s$ 를

$$\bar{\lambda}_s = \max \{ \lambda: \det [\lambda \text{diag} (\bar{M}_2, \dots, \bar{M}_2) + \text{diag} (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m)] = 0 \} \quad (20)$$

로 정의하면,

$$\bar{M} > 0,$$

$$\lambda \text{diag} (\bar{M}, \dots, \bar{M}) + \text{diag} (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m) > 0, \forall \lambda > \bar{\lambda}_s,$$

가 성립하고 이것은 다음식과 동등하다.

$$\text{diag} (\bar{M}, \dots, \bar{M}) + \mu \text{diag} (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m) > 0, \forall 0 < \mu < \bar{\mu}_s \quad (21)$$

식에서, $\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{P} & A^T \bar{P} \\ \bar{P} A & \bar{P} \end{bmatrix}$ 과 $\bar{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & E_i^T \bar{P} \\ \bar{P} E_i & 0 \end{bmatrix}$ 를 나타내며, $\bar{\mu}_s = \bar{\lambda}_s^{-1}$ 이다. (21)에서 알 수 있는 바와 같이, (20)으로 표시되는 일반화된 고유치 문제의 최대값의 역수가 섭동의 안정범위가 된다. 따라서, (18)의 최적 해의 역수가 제어 안정성을 보장하는 최대 안정범위가 된다. ■

부연 3: 비 구조화된 섭동과 마찬가지로 (18)은 선형행렬부동식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제이다. 따라서, 일반적인 불록 최적화 기법이 적용 가능하다. 특히, 선형행렬부동식을 위한 수치 알고리즘을 이용하면 [15]의 방법과 달리 제한 조건을 만족하는 초기치의 선정과 복잡한 기울기 계산과정이 불필요하다.

IV. 예제

본 장에서는 [5]에서 제시된 여러 가지 예제를 이용하여, 본 논문에서 제안한 비 구조화된 섭동의 안정범위가 다른 논문의 범위보다 우수하다는 것을 보인다. 선형행렬 부동식을 위한 최적화 알고리즘은 MATLAB의 LMI Toolbox를 이용한다. 일반적인 시스템 행렬 A에 대한 비 구조화된 섭동의 안정범위는 $1 - \rho(A)$ 보다 작으므로, 예제에서는 이 값의 크기와 본 논문에서 제안한 안정범위를 함께 비교한다.

예제 1: 기준 행렬이 $A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.8 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$ 인 경우에 대하여 비 구조화된 섭동의 안정범위는 표 1에 제시된 바와 같다. 표 1을 보면 다른 논문에서 제안된 안정범위와 비교하여 본 논문에서 제안된 범위가 크게 나타남을 알 수 있다. 특히, 이 예제의 경우에는, 본 논문에서 제안한 범위가 점근 안정성(asymptotic stability)이 유지되는 최대 안정범위에 근접하게 된다. 이것은 다음과 같은 섭동행렬을 고려하면 쉽게 확인할 수 있다. 섭동행렬이 $E_1 = \begin{bmatrix} 0.1163 & 0.0224 \\ 0.0631 & -0.0371 \end{bmatrix}$ 이면, $\rho(A_1 + E_1) > 1$ 가 되어 시불변 시스템 $x_{k+1} = (A_1 + E_1)x_k$ 는 점근적으로 안정하지 않다. 여기서 $\|E_1\| = 0.1323$ 이므로 본 논문에서 구한 범위가 최대 안정범위에 근접함을 알 수 있다.

예제 2: 기준 행렬이 $A_2 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.4 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}$ 인 경우에 대하여 비 구조화된 섭동의 안정범위는 표 2에 제시된 바와 같다. 이 예제에서는 Yaz[1]가 제안한 안정범위와 본 논문에서 제안한 안정범위가 거의 유사하다. 그러나, 예제 1과 마찬가지로 본 논문에서 제안한 범위가 점근 안정성(asymptotic stability)이 유지되는 최대 안정범위에 근접하게 된다. 즉, 섭동행렬이 $E_2 = \begin{bmatrix} 0.0862 & 0.0204 \\ 0.0319 & -0.0267 \end{bmatrix}$ 인 경우, 섭동행렬의

표 1. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교 (A_1).

Table 1. Comparison of stability bounds for un-structured uncertainty (A_1).

$1 - \rho(A_1)$	Yaz (1989)	Sezer (1987)	Kolla (1989)	New Bound
0.1500	0.1286	0.1082	0.0811	0.1322

표 2. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교 (A_2).

Table 2. Comparison of stability bounds for un-structured uncertainty (A_2).

$1 - \rho(A_2)$	Yaz (1989)	Sezer (1987)	Kolla (1989)	New Bound
0.0931	0.0922	0.0913	0.0885	0.0924

표 3. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교 (A_3).

Table 3. Comparison of stability bounds for un-structured uncertainty (A_3).

$1 - \rho(A_3)$	Yaz (1989)	Halicka (1994)	New Bound
0.1000	0.0818	0.0685	0.0831

노음은 0.0925이며, $\rho(A_2 + E_2) > 1$ 이므로 시불변 시스템 $x_{k+1} = (A_2 + E_2)x_k$ 는 점근적으로 안정하지 않다.

예제 3: 기준 행렬이 $A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ 인 경우에 대하여 비 구조화된 섭동의 안정범위는 표 3에 제시된 바와 같다. 이 예제에서도 본 논문의 안정범위가 점근 안정성(asymptotic stability)이 유지되는 최대 안정범위에 근접하게 된다. 즉, 섭동행렬이 $E_3 = \begin{bmatrix} 0.0366 & 0.0228 \\ 0.0613 & 0.0361 \end{bmatrix}$ 이면, $\|E_3\| = 0.0832$ 이고 시불변 시스템 $x_{k+1} = (A_3 + E_3)x_k$ 는 점근적으로 안정하지 않다.

예제 4: 기준 행렬이 $A_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.25 & 0.4 \\ 0 & 0.15 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ 인 경우에 대하여 비 구조화된 섭동의 안정범위는 표 4에 제시된 바와 같다. 이 예제에서도 본 논문의 안정범위가 점근 안정성(asymptotic stability)이 유지되는 최대 안정범위에 근접하게 된다. 즉, 섭동행렬이

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0.0067 & 0.0629 & 0.0504 & -0.0014 \\ 0.1056 & 0.0210 & 0.0213 & 0.0538 \\ 0.1059 & 0.0174 & 0.1320 & 0.0592 \\ 0.0680 & 0.0951 & 0.0879 & 0.1230 \end{bmatrix}$$

이면, $\|E_4\| = 0.2751$ 이며 시불변 시스템 $x_{k+1} = (A_4 + E_4)x_k$ 는 점근적으로 안정하지 않다.

예제 5: 시스템 행렬이 $A_5 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ 로 표시되는 경우에 대하여 여러 가지의 α 와 β 에 대한 안정범위를 비교한 것이 표 5와 표 6이다. 모든 경우에 대하여 본 논문에서 제안된 안정범위가 다른 안정범위에 비하여 크게 나타남을 알 수 있다.

표 4. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교(A_4).

Table 4. Comparison of stability bounds for unstructured uncertainty(A_4).

$1 - \rho(A_4)$	Yaz (1989)	Halicka (1994)	New Bound
0.3180	0.2643	0.2338	0.2750

표 5. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교($A_5, \beta=1$).

Table 5. Comparison of stability bounds for unstructured uncertainty($A_5, \beta=1$).

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8
Yaz (1989)	0.4142	0.3563	0.2406	0.1235	0.0344
Sezer (1987)	0.2929	0.2539	0.1652	0.0727	0.0129
Kolla (1989)	0.2247	0.1951	0.1259	0.0536	0.0089
New Bound	0.6176	0.4433	0.2808	0.1403	0.0385

표 6. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교($A_5, \alpha=0.2$).

Table 6. Comparison of stability bounds for unstructured uncertainty($A_5, \alpha=0.2$).

β	0.2	0.5	0.8	1.5	2.0
Yaz (1989)	0.6873	0.5290	0.4132	0.2603	0.2028
Sezer (1987)	0.6794	0.4797	0.3261	0.1447	0.0906
Kolla (1989)	0.6774	0.4567	0.2969	0.0855	0.0424
New Bound	0.7061	0.5881	0.4942	0.3466	0.2806

V. 결론

본 논문에서는 시변 섭동을 갖는 이산시스템의 안정범위에 관한 연구결과를 제시하였다. 제안된 안정범위는 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제의 최적해로 구해진다. 비 구조화된 섭동에 대해서는 본 논문에서 제안한 안정범위는 다른 논문에서 제안된 안정범위에 비하여 우수하다는 사실을 예제를 통하여 확인하였다. 특히, [5]에서 인용한 대부분의 예제에서 본 논문의 안정범위가 접근 안정성이 보장되는 최대 안정범위에 근접함을 예시하였다. 구조화된 섭동의 안정범위에 관한 연구로서, [15]에서 인용된 구조화된 섭동을 고려하였다. 이 문제에서도 비 구조화된 섭동과 마찬가지로 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제로 표현할 수 있음을 보였다. 따라서, 수치적으로 매우 효율적인 알고리즘을 이용하여 최대 견실 안정범위를 구할 수 있다.

참고문헌

[1] E. Yaz, and X. Niu, "Stability robustness of linear

discrete-time systems in the presence of uncertainty," *International Journal of Control*, vol. 50, no. 1, pp. 173-182, 1989.

[2] S. R. Kolla, R. K. Yedavalli and J. B. Farison, "Robust stability bounds on time-varying perturbations for state-space models of linear discrete-time systems," *International Journal of Control*, vol. 50, no. 1, pp. 151-159, 1989.

[3] M. E. Sezer and D. D. Siljak, "Robust stability of discrete systems," *International Journal of Control*, vol. 48, no. 5, pp. 2055-2063, 1988.

[4] E. Yaz and X. Niu, "Robustness of discrete-time systems for unstructured stochastic perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 7, pp. 867-869, 1991.

[5] M. Halicka and D. Rosinová, "Stability robustness bound estimates of discrete systems : analysis and comparison," *International Journal of Control*, vol. 60, no. 2, pp. 297-314, 1994.

[6] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty, *Nonlinear programming-theory and algorithms*, 2nd edition, John Wiley&Sons, Inc., 1993.

[7] S. P. Boyd and C. H. Barratt, *Linear controller design-limits of performance*, Prentice-Hall International, Inc., 1991.

[8] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Siam, 1994.

[9] Y. Juang, T. Kuo and C. Hsu, "Stability robustness analysis of digital control systems in state-space models," *International Journal of Control*, vol. 46, no. 5, pp. 1547-1556, 1987.

[10] B. Shafai, K. Perev, D. Cowley and Y. Chehab, "A necessary and sufficient condition for the stability of nonnegative interval discrete systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 6, pp. 742-746, 1991.

[11] M. Eslami, "Computer-aided determination of stability robustness measure of linear discrete-time systems," *Automatica*, vol. 26, no. 3, pp. 623-627, 1990.

[12] Z. Gao and P. J. Antsaklis, "Explicit asymmetric bounds for robust stability of continuous and discrete-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 2, pp. 332-335, 1993.

[13] H. S. Han and J. G. Lee, "Necessary and sufficient conditions for stability of time-varying discrete interval matrices," *International Journal of Control*, vol. 59, no. 4, pp. 1021-1029, 1994.

[14] J. S. Luo, A. Johnson and P. P. Van Den Bosch, "Lyapunov stability robust analysis and robustness design for linear continuous-time systems," *International Journal of Control*, vol. 61, no. 6, pp. 1233-1251, 1995.

[15] K. Gu, "Designing stabilizing control of uncertain systems by quasiconvex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 127-131, 1994.

[16] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, New York: Cambridge University Press, 1985.

[17] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall International, Inc., 1980.

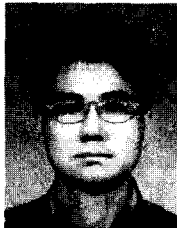
기호의 정의

$\lambda_m(X)$: 최소 고유치(minimum eigenvalue)
 $\lambda_M(X)$: 최대 고유치(maximum eigenvalue)

$\sigma_M(X)$: 최대 특이치(maximum singular value)
 $\|X\|$: 스펙트럴 노름(spectral norm), 또는 $\sigma_M(X)$
 $X > 0$: 대칭행렬 X 가 양의 정칙(positive definite)
 $\rho(X)$: 스펙트럴 반경(spectral radius), $\max |\lambda_i(X)|$
 $\text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_m)$: 블록 대각 행렬, 즉

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{pmatrix}$$

I_m : $m \times m$ 단위행렬(identity matrix).



김 병 수
 1991년 서울대 제어계측공학과 졸업, 동대학원 석사(1993), 현재 동대학원 박사과정. 관심분야는 건설제어 및 유도시스템 설계.



한 형 석
 1986년 서울대 제어계측공학과 졸업, 동대학원 석사(1988), 동대학 박사(1993). 현재 순천향대학교 전기전자공학부 조교수. 관심분야는 건설제어, 유도 및 항법시스템.



이 장 규
 1971년 서울대 전기공학과 졸업, 미국 피츠버그대 박사(1977), 현재 서울대 전기공학부 교수, 동대학교 부설 자동제어특화연구센터 및 자동화시스템공동연구소 소장.