
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 31 卷 第 1 號 1994年 2月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 31, No. 1, February 1994

다중 시간법에 의한 선박 횡동요 응답의 통계적 특성 연구

나윤철*, 권순홍**, 하동대**

A Study on the Statistical Characteristics of Rolling Motion of Ships Using Multiple Time Scales

by

Yun-Cheol Na*, Sun-Hong Kwon** and Dong-Dai Ha**

요 약

본 연구를 통하여 협대역 랜덤 기진모멘트 스펙트럼으로 표현되는 횡동요 기진 모멘트를 받는 선박의 횡동요 응답의 통계적 특성을 다중 시간법을 이용하여 그 결과를 구하고, 이를 등가선형화법으로 얻어진 결과와 비교해 보았다. 계산 결과, 등가선형화법보다 다중 시간법을 이용한 결과가 훨씬 넓은 다중치 영역을 보여주는 것을 알 수 있었다. 그리고 시간 궤적에서 횡동요 기진 모멘트의 시뮬레이션과 선박의 횡동요 운동의 시뮬레이션을 수행하여 그 결과를 확인하였다.

Abstract

The roll response of ships to the narrow band random exciting moment is investigated based on the multiple time scale technique. The results are compared with those calculated from statistical equivalent linearization method. The calculation results have shown that the results calculated from multiple time scale technique give wider range of multiple values. Numerical simulations of rolling motion of ship are performed to confirm the results.

발 표 : 1993년도 대한조선학회 춘계연구발표회(1993. 4. 17)

접수일자 : 1993년 5월 29일, 재접수일자: 1993년 11월 15일

* 정회원, 삼성중공업(주) 선박해양연구소

** 정회원, 부산대학교 공과대학 조선해양공학과 기계기술연구소

1. 서 론

조선공학에서 선박의 횡동요 운동을 정확하게 해석하려는 노력이 수세기동안 진행되어왔다. 이는 선박이 가지고 있는 고유주파수(natural frequency)가 높은 에너지를 가진 해상파의 주파수 범위와 비슷하여 공진(resonance)이 발생할 위험이 있거나, 횡동요 운동 중 큰 횡동요각(roll angle)이 발생하면 운동의 비선형성으로 인하여 선박은 안정성과 침로 유지에 중요한 영향을 받기 때문이었다. 따라서, 횡동요 운동을 정확하게 다룰 수 있는 모델이나 기법의 개발은 보다 정확한 운동특성을 해석함으로써 선박의 안정성을 파악할 수 있다는 점에서 매우 중요하다. 특히 전복(capsizing)등의 대형사고와 같이 위험한 일련의 현상들은 급작스러운 큰 횡동요 운동의 발생과 관련있다고 알려져 있다. 실제로 이러한 사고와 큰 횡동요 운동과의 관련성은 명확하게 밝혀지진 않았지만, 선박의 안정성에는 큰 영향을 주고있다[1][2][3].

유체로만 구성되어 있는 해상에서는 횡동요 운동의 유체 동역학적 감쇠(hydrodynamic damping)가 비교적 작으므로 해상 상태에 따라 큰 공진응답을 보이거나, 복원성을 결정해주는 주요 계수인 고유주파수의 이동(natural frequency shift)이 발생할 수도 있다. 실제 해상과 같은 불규칙 해상에서 선박이 큰 횡동요 각으로 운동할 경우, 복원력과 감쇠력에 강한 비선형성이 나타난다. 비선형성은 선형운동에서 볼 수 없는 여러가지 비선형 특성을 초래한다. 널리 알려진 현상으로는 다중근(multiple solutions), 도약현상(jump phenomena), 그리고 공진현상 등이 있다[1][2].

본 연구의 관심은 도약현상이 발생하는 횡동요 운동에 있다. 도약현상은 진동분야에서 계가 조화 기진력을 받을 경우 관찰되어졌다. Fig. 1의 (a)와 (b)는 각각 비선형 강성과 비선형 연성 스프링의 경우로 도약현상이 일어나 응답 곡선의 다중치가 나타남을 알 수 있다. 화살표는 실험의 진행 방향이다. 점6에 나타난 최대 진폭(maximum amplitude)은 낮은 주파수 영역에서 주파수를 증가시킬 때만 나타난다. 따라서 점3과 점6사이의 응답 곡선 영역은 불안정 영역(unstable range)이 되어 실험으로 구할 수 없는 영역이다. 주파수가 감소하면 응답의 크기는 연성 스프링일 경우에는 큰 응답에서 작은 응답으로 도약이 발생하고, 강성 스프링일 경우에는 작은 응답에서 큰 응답으로 도약이 발생한다. 주파수가 증가하면 이와 반대의 현상이 발생한다[4]. 최근에 와서는 주파수폭(bandwidth)이 충분히 감소된 협대역 랜덤 기진이 작용될 경우에

도, 위의 경우와 마찬가지로 랜덤 응답의 다중치 영역이 나타남이 제시되었다[3][5][6][7].

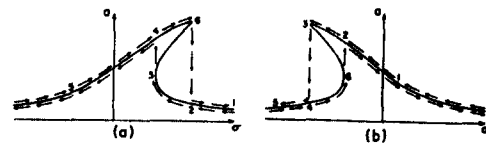


Fig. 1 Jump phenomena for primary resonance

불규칙 해상을 항해하는 선박은 이와 유사한 조건에 직면할 수 있으므로, 조선 공학적 측면에서 이러한 현상에 관한 연구가 필요하다. 이는 곧 설계시 전복과 같은 대형사고를 예방하는 좋은 자료가 될 수 있다. 본 연구는 한 방향의 불규칙 횡파(irregular beam waves)를 받는 선박의 횡동요 운동을 해석하는 방법을 제시하였다. 연구 목적은 협대역 랜덤 기진 모멘트를 받는 선박의 횡동요 운동의 통계적 특성을 파악하는데 있다. 본 연구에서는 감쇠와 복원력 모멘트 항이 모두 선형과 3차의 비선형 항을 갖는 1 자유도의 횡동요 운동 방정식을 다중 시간법(multiple time scales method)을 이용하여 ϵ 의 1차 차수의 근사해를 고려한 뒤, 횡동요 운동의 분산을 구하였다. 이 방법으로 얻어진 결과를 통계적 등가 선형화법에 의해 계산된 결과와 비교하였다. 지배방정식에 주어지는 기진 모멘트 스펙트럼은 협대역 기진 모멘트 스펙트럼으로 주어지는데, 이는 백색 잡음(white noise)을 선형형상필터(linear shaping filter)에 통과시킴으로써 생성시킬 수 있다. 형상 필터 방정식의 계수들은 해상 스펙트럼을 모멘트 스펙트럼으로 환산한 결과와 비교하여 결정하였다. 계산은 기진 주파수의 폭을 변화시키면서 변화에 따른 결과를 서로 비교하였다.

또한, 수치 시뮬레이션(digital simulation)을 수행하여 실제 횡동요 운동을 일으키는 횡동요 기진 모멘트의 시간적응과 응답의 시간적응을 계산하여 비교하였으며, 단시간 평균(short time average)으로 입력과 응답의 시간에 따른 변화를 구한 후, 각 파라미터에 따라 비교하였다.

2. 지배방정식과 협대역 랜덤 기진모멘트

서론에서 밝힌 바와 같이, 규칙 횡파에 의한 선박의 횡동요 운동보다 불규칙 횡파에서의 해석은 계의 입력

인 횡동요 기진 모멘트의 불규칙성으로 인해 많은 어려움이 있다. 다른 모든 자유도를 무시하고 화물의 shift, 침수 면적(flooded area) 등과 같은 편중(bias)을 고려하지 않을 경우, 불규칙 횡파중에서 횡동요 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\phi} + D(\dot{\phi}) + R(\phi) = F(t) \quad (1)$$

여기서, ϕ 는 횡동요각이고, $D(\dot{\phi})$ 는 감쇠모멘트 함수이며, $R(\phi)$ 는 복원모멘트 함수이다. 입력 $F(t)$ 는 가우시안 랜덤 과정(Gaussian random process)으로 평균은 0이고, 스펙트럼 밀도 $S(\omega)$ 를 가지는 협대역 스펙트럼(narrow band spectrum)으로 표현된다.

본 연구에서 선박의 횡동요 운동의 감쇠 모멘트 함수 $D(\dot{\phi})$ 에 대한 식은 선형항과 3차항으로 이루어진 비선형 감쇠 모멘트 함수를 사용하였다.

$$D(\dot{\phi}) = C_1 \dot{\phi} + C_3 \dot{\phi}^3 \quad (2)$$

여기서, C_1 과 C_3 는 각각 선형과 3차의 감쇠 계수이다. 전진속도가 없는 경우, 평형 상태($\phi = 0.0$)에서 경사가 발생하면 그 방향에 따라 처음 상태로 돌아가려는 방향으로 복원성이 발생한다. 이 복원성은 중력과 정수압에 기인한 부력과의 평형이 무너져 원래의 평형 상태로 돌아가기 위해 생긴다. 이러한 복원성을 갖는 운동에서는 진동과 같은 현상이 발생한다. $R(\phi)$ 는 비선형 복원 함수로서 시불변 계수(time invariant coefficient)를 갖는 기함수 다항식(odd-power polynomial)을 사용하였다.

$$R(\phi) = \omega_n^2 (\phi + \alpha_3 \phi^3) \quad (3)$$

여기서, ω_n 은 선박이 비감쇠 횡동요 운동(undamped rolling motion)을 할 경우의 고유주파수를 나타내며, α_3 은 3차 비선형 복원 모멘트 계수이다.

해상파의 작용에 기인되는 경사 모멘트(inclining moment)는 대부분 해상파의 에너지 스펙트럼으로 표현될 수 있다. 다른 모든 해상파의 통계적 표현은 해상파 광범위한 측정결과로 얻어졌고, 이에 따라 ITTC, ISSC 그리고 JONSWAP 스펙트럼 등과 같은 스펙트럼이 제공되었다. 이러한 스펙트럼들은 대부분 통계적인 성질을 이용함에 있어서, 충분히 협대역이 될 수도 있고, 동시에 응답의 결과를 계산함에 있어서 충분히 광대역으로 다룰 수 있다[8][9]. 여기에 가우시안 과정, Stationarity 그리고 ergodicity 등의 가설로 해석은

단순화된다. 전복과 같은 극대치(extreme) 현상을 일으키는 횡동요 운동에 관심을 갖는다면, 이때는 높은 비선형성이나 매우 큰 횡동요 운동이 야기되는 조건 자체에만 관심을 갖기로 한다. 따라서 지금까지 고려되지 않은 큰 횡동요각을 일으키는 몇 가지 조건에 관심을 가지게 된다. 이러한 현상은 비선형성에 의한 횡동요 운동이 실제 해상에서 큰 횡동요각을 발생시킬 수 있는 특별한 현상을 보인다는 점이다[10][11][12][13]. 이것은 서론에서와 같이 같은 기진강도(excitation intensity)에 대해서 진자의 또 다른 정상상태가 나타나고, 그 상태가 도약을 야기시키기 때문이다. 스펙트럼을 통해 해상 상태를 표현하는 것은 완벽한 묘사는 아니지만 잘 성숙된 해상(fully developed sea)에 대해서는 타당하다. 이는 협대역(narrow band) 스펙트럼이 나타날 가능성을 배제하지 않기 때문이며, 이 경우는 계의 파라미터의 변화없이 도약을 일으키는 기진력이 얻어질 수 있다.

본 연구에서는 $F(t)$ 가 협대역 랜덤 기진 모멘트를 갖도록 하기 위하여, 다음과 같은 선형필터 방정식을 도입하였다.

$$\ddot{F} + \gamma \dot{F} + \omega_f^2 F = \sqrt{\gamma} \omega_f W(t) \quad (4)$$

여기서 γ 는 주파수폭(bandwidth), ω_f 는 중심 주파수(center frequency)를 나타낸다. $W(t)$ 는 다음과 같이, 영 평균 과정(zero mean process)과 스펙트럼 밀도 S_0 를 가지는 백색잡음(white noise)으로 autocorrelation이 delta correlated된 통계적 성질을 갖게 된다.

$$E[W(t)] = 0 \quad (5)$$

$$E[W(t)W(t+\tau)] = \pi S_0 \delta(\tau)$$

여기서 $\delta(\tau)$ 는 dirac delta 함수를 나타낸다. 백색잡음이 필터를 거쳐서 나오면, 본 연구의 관심이 되는 협대역 기진 모멘트 스펙트럼을 얻게된다. $\gamma \rightarrow 0$ 가 되면, 기진력은 정현파 기진력(sinusoidal excitation)이 된다.

$$F(t) = e_w \cos \omega_f t \quad (6)$$

여기서 $e_w^2 = 2\alpha^2$ 이고, 주파수폭이 0으로 감소하게 되면, $F(t)$ 의 스펙트럼은 $\pi S_0 \delta(0)$ 이다. 이 협대역 기진 모멘트 스펙트럼은 선형방정식인 (4)식에서 직접 주파수 응답함수를 구할 수 있다.

$$\alpha(\omega) = \frac{\sqrt{\gamma}\omega_f}{\omega_f^2 + i\omega\gamma - \omega^2} \quad (7)$$

통계적 입-출력 관계(stochastic input-output relationships)에 의해, 입력 스펙트럼으로부터 협대역 기진 모멘트 스펙트럼을 구하게 된다.

$$S_f(\omega) = \frac{\gamma\omega_f^2 S_0}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (8)$$

영 평균이므로 식(8)을 적분하면, 협대역 기진 모멘트의 분산이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma\omega_f^2 S_0}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} d\omega \quad (9) \end{aligned}$$

Francescutto는 ITTC와 JONSWAP 스펙트럼으로부터 그 값을 도출하였다[13]. 파고를 횡동요 기진 모멘트로 변환하면 스펙트럼은 넓어지게 되는데, 조건에 따라 기본적 스펙트럼 형식에서도 도약을 일으키는 효과적인 협대역 스펙트럼도 나타남을 알 수 있다. 기진 모멘트 스펙트럼은 실제 해상의 파스펙트럼(wave spectrum)을 표현하는 JONSWAP 스펙트럼과 비교하여 구하였다.

3. 다중 시간법

최근에 공학이나 물리학 또는 응용수학에서 직면하는 물리학적 문제들은 정확한 해석해(exact analytic solution)를 얻지 못하는데, 이러한 현상은 문제의 비선형성, 변수형 계수(variable coefficients)의 첨가, 복잡한 경계 요소 등에 의해 나타난다. 이러한 문제들을 해석하기 위해서 수치해나 하나의 근사화된 형태(a form of approximation), 또는 이 두 방법이 조합된 방법으로부터 해를 도출한다. 통계적 선형화법은 근사화된 등가선형화 계수들(appropriate equivalent linearization coefficients)을 사용하므로 불확실성(uncertainty)을 내재하고 있다. Rajan은 그 불확실성을 제거하기 위해서 다중 시간법이나 통계적 평균화법(stochastic averaging method)을 도입하였다[5]. 발전된 근사화법의 대표적 방법으로 체계화된 섭동법(systematic method of perturbations)이 있다. 섭동법에 의해, 문제의 해는 항상 첫번째 2개의 항(first

two terms)을 포함하는 섭동 전개식(perturbation expansion)의 몇 개의 항에 의해 표현된다. 비록 이러한 섭동 전개식이 발산하더라도 이는 정성적으로나 정량적으로 문제의 해를 표현하는데 있어서, 일률적(uniformly), 절대적으로 수렴하는 전개식보다 더욱 유용하다. 이는 섭동 파라미터의 급수를 갖는 직접적인 전개식이 제한된 타당한 범위를 갖는 방법이라고 할 수 있기 때문이다[5].

특히, 다중 시간법은 하나의 독립변수의 형태를 단일변수가 아닌 다중 독립변수들(multiple independent variables)의 함수전개식으로 고려하는 방법이다. 이 방법은 다른 방법에 비해 감쇠계를 다루는 데 있어서 좋은 결과를 준다. 이 방법은 느리게 변화하는 국부 평균 자승(slowly varying local mean square)을 입력으로 갖는 계를 느리게 변화하는 국부 평균 자승 값(slowly varying local mean square value)이나, 또 다른 변수들에 대한 1계 미분 방정식들로 조합될 수 있음을 보여주었다. 한편, 진동분야의 다중 시간 섭동법(multiple time scales perturbation method)은 다양한 비선형 진동문제를 해석하는 데 널리 이용된다. Stratonovich는 기진력의 또 다른 형태를 주어진 작은 주파수폭에 대하여 다음과 같이 제시하였다[14].

$$F(t) = F_c(t)\cos\omega_f t + F_s(t)\sin\omega_f t \quad (10)$$

여기서, F_c 와 F_s 는 느리게 변화하는 랜덤 함수(slowly varying random function)로 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_c &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}} W_c - \frac{\gamma}{2} F_c \\ F_s &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}} W_s - \frac{\gamma}{2} F_s \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, W_c 와 W_s 는 각각 스펙트럼밀도 S_0 를 갖는 가우시안 백색잡음 과정이고, F_c 와 F_s 의 스펙트럼은 $(\gamma/2)S_0/(\omega^2 + (\gamma/2)^2)$ 이다. $F(t)$ 가 (11)식으로 정의되면 지배방정식은 다중 시간 섭동(multiple time scale perturbation)에 의해 다루어질 수 있다. 지배방정식의 해를 다음과 같이 섭동급수(perturbation series)로 정의할 수 있다.

$$\phi(t) = \phi_0(T_0, T_1) + \epsilon\phi_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (12)$$

여기서, $T_n = \varepsilon^n t (n=0,1)$ 이다. 본 연구에서는 1 계의 해(first order solution)만을 고려하였다. 각 계 수를 $C_1 = \varepsilon \bar{C}_1, C_3 = \varepsilon \bar{C}_3, \alpha_3 \omega_n^2 = \varepsilon \bar{\alpha}, F(t) = \varepsilon \bar{F}(t)$ 그리고 $\bar{\delta} = (\omega_f - \omega_n) / \varepsilon$ 로 치환하면, 지배방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \omega_n^2 \phi + \varepsilon (\bar{C}_1 \dot{\phi} + \bar{C}_3 \dot{\phi}^3 + \bar{\alpha} \phi^3) \\ = \varepsilon \left\{ \bar{F}_c(T_1) \cos(\omega_n T_0 + \delta T_1) + \right. \\ \left. \bar{F}_s(T_1) \sin(\omega_n T_0 + \delta T_1) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

변환된 지배방정식에 필요한 미분항과 고차항을 정리하면,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= D_0^2 \phi_0 + \varepsilon (D_0^2 \phi_1 + 2D_0 D_1 \phi_0) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\phi} &= D_0 \phi_0 + \varepsilon (D_0 \phi_1 + D_1 \phi_0) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\phi}^3 &= (D_0 \phi_0)^3 + 3\varepsilon (D_0 \phi_1 + D_1 \phi_0)(D_0 \phi_0)^2 + O(\varepsilon^2) \\ \phi^3 &= \phi_0^3 + 3\varepsilon \phi_0^2 \phi_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, D_0 와 D_1 은 다음과 같다.

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1} \quad (15)$$

이상의 미분 및 고차항을 (13)에 대입하여 ε^0 와 ε^1 에 관해 정리한다.

$$D_0^2 \phi_0 + \omega_n^2 \phi_0 = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \phi_1 + \omega_n^2 \phi_1 = -D_0 D_1 \phi_0 - \bar{C}_1 D_0 \phi_0 \\ - \bar{C}_3 (D_0 \phi_0)^3 + \left\{ \bar{F}_c(T_1) \cos(\omega_n T_0 + \delta T_1) \right. \\ \left. + \bar{F}_s(T_1) \sin(\omega_n T_0 + \delta T_1) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

(16)식의 일반해를 다음과 같이 정의하면,

$$\phi_0 = A(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + cc \quad (18)$$

여기서 cc 는 공액복소수(complex conjugate)를 의미한다. $A(T_1)$ 에 따라 (17)식의 모든 특이해는 불멸항(secular term)이라 불리는 $T_0 \exp(\pm i\omega_n T_0)$ 에 비례하는 항들이 포함되므로 $\varepsilon \phi_1$ 은 매우 큰 시간 t 에 대해서도 ϕ_0 를 지배할 수 있다. $A(T_1)$ 은 (17)식의 불멸

항을 소거할 수 있도록 선택되어야 하는데, 이를 만족하도록 해를 (17)식의 우변에 대입하여 정리하면, $A(T_1)$ 를 결정할 수 있는 조건식을 유도할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} 2i\omega_n D_1 A + \bar{C}_1 i\omega_n A + 3\bar{C}_3 i\omega_n^3 |A|^2 A + \\ 3\bar{\alpha} |A|^2 A - \frac{1}{2} (\bar{F}_c - i\bar{F}_s) \exp(i\delta T_1) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, amplitude X 와 Z 의 자율 상미분방정식(autonomous equation)을 유도하기 위해 $A=1/2 (x - iz) \exp(i\delta T_1)$ 으로 두면 편리하다. 이를 (18)식에 대입하여 사인과 코사인 항으로 정리한 결과는 다음과 같다.

$$\phi_0 = x \cos \omega_n t + z \sin \omega_n t \quad (20)$$

$A = \frac{1}{2} (x - iz) \exp(i\delta T_1)$ 을 (19)식에 대입하고 실수부와 허수부로 나누어보면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} D_1 x = -\bar{\delta}_e z - \left(\frac{\bar{C}_1}{2} + \frac{3\bar{C}_3 \omega_n^2 (x^2 + z^2)}{8} \right) x - \frac{\bar{F}_s}{2\omega_n} \\ D_1 z = -\bar{\delta}_e x - \left(\frac{\bar{C}_1}{2} + \frac{3\bar{C}_3 \omega_n^2 (x^2 + z^2)}{8} \right) z - \frac{\bar{F}_c}{2\omega_n} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\bar{\delta}_e = \bar{\delta} + \frac{3\bar{\alpha}(x^2 + z^2)}{8}$ 이다. (21)식의 형태를 바꾸면,

$$\begin{aligned} D_1 x = -\bar{\delta}_e z - \frac{1}{2} \left(\bar{C}_1 + \frac{3}{4} \bar{C}_3 \omega_n^2 (x^2 + z^2) \right) x - \frac{\bar{F}_s}{2\omega_n} \\ D_1 z = -\bar{\delta}_e x - \frac{1}{2} \left(\bar{C}_1 + \frac{3}{4} \bar{C}_3 \omega_n^2 (x^2 + z^2) \right) z - \frac{\bar{F}_c}{2\omega_n} \end{aligned} \quad (22)$$

이 식으로부터 횡동요각의 분산을 이용하여 식을 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_1 x = -\bar{\delta}_e z - \frac{\bar{C}_{eq}}{2} x - \frac{\bar{F}_s}{2\omega_n} \\ D_1 z = -\bar{\delta}_e x - \frac{\bar{C}_{eq}}{2} z - \frac{\bar{F}_c}{2\omega_n} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $\bar{C}_{eq} = \bar{C}_1 + \frac{3}{4} \bar{C}_3 \omega_n^2 \sigma_\phi^2$ 이다.

(11)과 (23)을 결합하면, $\sigma_\phi^2 = (x^2 + z^2)/2$, $P = F_c z - F_s x$, $Q = F_c x + F_s z$ 를 새로운 변수로 하는 자율 방정식이 얻어진다.

$$\dot{\sigma}_\phi^2 = -C_{eq} \sigma_\phi^2 + \frac{P}{2\omega_n} \quad (24)$$

$$\dot{P} = \delta_e Q - \frac{1}{2}(C_{eq} + \gamma)P + \frac{1}{\omega_n} \bar{\sigma}_f^2 \quad (25)$$

$$\dot{Q} = -\delta_e P - \frac{1}{2}(C_{eq} + \gamma)Q \quad (26)$$

여기서, $\sigma_f^2 = (F_c^2 + F_s^2)/2$ 이다. 따라서 (24)~(26)식은 매우 느리게 변화하는 σ_f^2 를 입력으로 하는 slowly varying mean square response σ_ϕ^2 의 전개된 형태이다. 다음으로 δ_e 의 ω_n^2 정의인데, 원래의 정의인 $\omega_{eq}^2 = \omega_n^2(1 + 3\alpha\sigma_\phi^2)$ 와는 다른 형태가 쓰인다.

$$\delta_e = \frac{(\omega_f^2 - \omega_n^2)}{2\omega_n} \quad \omega_{eq}^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{2}{3} \alpha^3 \sigma^2\right) \quad (27)$$

(24) ~ (26)식을 이용하면 σ_ϕ^2 를 구할 수 있다. 계산된 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_\phi^2 = \frac{\left(\frac{\gamma}{C_{eq} + 1}\right) \sigma_f^2}{\omega_n^2 (\gamma + C_{eq})^2 + (\omega_f^2 - \omega_{eq}^2)^2} \quad (28)$$

다중 시간법에 의한 결과와 비교하기 위해 등가선형화법을 이용하여 해를 구하였다. 이 방법은 참고문헌 [15]의 결과를 이용하여 구하였다.

4. 수치 시뮬레이션

수치 시뮬레이션에서는 다음의 가랜덤 신호(pseudorandom signal)를 사용하는 것이 더욱 편리하다[16].

$$f(t) = \sqrt{\frac{2\bar{\sigma}_f^2}{N}} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (29)$$

랜덤 주파수 ω_k 는 $f(t)$ 의 스펙트럼으로부터 같은 모양의 확률밀도함수를 가지는 랜덤 모집단(random

population)에서 독립적으로 선택되며, 랜덤위상각(random phase)도 랜덤 주파수와 같이 독립적으로 선택되고 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 일량분포되어 있다. Shinozuka는 $f(t)$ 는 가랜덤 신호의 갯수인 N 이 무한대로 감에 따라 가우시안 과정으로 뒀을 보여주었다[16]. 이것은 시뮬레이션을 단순화시킬 뿐아니라, 주파수폭을 변화시키는 경우 유리하다. 시뮬레이션의 test는 광대역 스펙트럼을 선형 필터를 통해 시뮬레이션된 noise를 비교함으로써 행해졌다. Rajan은 보다 상세히 이들의 차이점을 연구하였다[17]. 여기서, 만일 앙상블 평균(ensemble average)이 주어진다면,

$$\begin{aligned} E[f^2] &= \left(\frac{2\bar{\sigma}_f^2}{N}\right) \sum_k \sum_j E[\cos(\omega_k t + \phi_k) \cos(\omega_j t + \phi_j)] \\ &= \left(\frac{2\bar{\sigma}_f^2}{N}\right) \sum_k E[\cos^2(\omega_k t + \phi_k)] = \bar{\sigma}_f^2 \quad (30) \end{aligned}$$

또한,

$$E[f^4] = \left(\frac{2\bar{\sigma}_f^2}{N}\right)^2 \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l E[\cos(i) \cos(j) \cos(k) \cos(l)] \quad (31)$$

임이 명백하다. 여기에서 사용된 항들은 $i=j=k=l$ 을 갖는 N 개의 항이고, $(i=j)$ 와 $(k=l)$ 의 형태의 항은 극한에서, $3N_2$ 의 조합(combination)이다. 큰 값 N 에 대하여, $E[f^4] = 3\bar{\sigma}_f^4$ 를 얻기 위해서는, 결과가 가우시안 과정의 특성이 갖는 것은 당연하다. 시뮬레이션에서 얻어지는 단시간 평균(short time averaging)은 low-pass filtering으로 구해진다. 예를 들면, f^2 의 smooth한 값은 (29)에 의해 정의된 f 를 갖는 다음 식으로 얻어진다.

$$\dot{z}_1 + \eta z_1 = \eta f^2 \quad (32)$$

여기서 z_1 은 단시간 평균을 나타내고, η 는 $\gamma \ll \eta \ll \omega$ 를 만족하도록 선택한다.

$$z_1(t) = \left(\frac{\bar{\sigma}_f^2}{N}\right) \sum_k \sum_j \cos[(\omega_j - \omega_k)t + \phi_j - \phi_k] \quad (33)$$

(29)식에 사용되는 $\bar{\sigma}_f^2$ 는 장시간(long time) 혹은 앙상블 평균이다. 따라서, (33)식의 단시간 평균인 z_1 은 시간에 따라 변화하는 값이다. 이 z_1 은 자율 상미분 방정식 (24) (26)식에서 느리게 변화하는 입력으로 사용된다. 위의 방법을 이용하여 얻어진 수치시

플레이션의 결과를 그림으로 나타내었다.

5. 계산 결과 및 고찰

본 연구에 사용된 기진모멘트는 형상필터 방정식에 의해 (4)와 같이 주어진다. 실제 해상에서의 횡동요 운동은 랜덤 현상(random seas)으로부터 구한 해상파 스펙트럼해를 이용하여 직접 기진모멘트 스펙트럼을 구할 수 있다. 이 과정은 형상필터 방정식에 의해 얻어진 기진모멘트 스펙트럼과 JONSWAP 스펙트럼으로부터 구한 얻어진 기진 모멘트 스펙트럼을 비교하여 형상필터의 파라미터를 구하는 과정이다[15].

Fig. 2는 각 계수를 $C_1=0.1, \alpha_3=4.0, \omega_n=1.0$ 로 두고 비선형 감쇠계수를 $C_3=0.0$ 로 준 경우 (linear damping)의 응답 결과이다. 그림에서 곡선상의 수치는 주파수폭(γ)을 나타낸다. Fig. 3은 앞의 그림과 동일한 계수를 사용하되 $C_3=0.01$ (non-linear damping)로 준 경우의 응답 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이, 비선형 감쇠의 경우는 선형 감쇠로 구한 영역이 확장됨을 보여준다. 이상의 결과는 등가 선형화법에 의한 응답 [15]과 비교하였는데 그 결과는 다중 시간법의 응답 결과가 다중치가 넓게 나타났다.

수치 시뮬레이션의 수행을 위해 $C_1=0.5, C_3=0.05, \omega_n=1.0$ 의 계수를 도입하고, 3차의 복원모멘트 계수인 α_3 를 1.0으로 주고 주파수폭을 0.2로 준 경우에 대한 응답결과를 구하였다. 도입된 입력의 분산은 $\bar{\sigma}_f^2=0.8$ 을 사용하였다. Fig. 4는 위의 계수로부터 다중 시간법으로 구할 응답의 결과이다. Fig. 5는 주어진 입력을 시뮬레이션한 결과이며, Fig. 6은 이 경우에 대한 응답 시뮬레이션이다. 이 때 응답의 단시간 분산을 Fig. 7에 나타내었다.

계의 계수에 변화를 주면서 시뮬레이션을 한 결과, 비선형 복원 모멘트 계수가 커지거나 감쇠모멘트 계수가 상대적으로 작게되면 응답 시뮬레이션의 진폭은 커지고, 이때 단시간 응답 분산도 갑자기 커짐을 알 수 있다. 이는 도약의 발생을 의미한다.

6. 결론

본 연구에서는 비선형 횡동요 운동 방정식을 통계적 등가 선형화법[15]과 다중 시간법을 통하여 해석하여 보았다. 그리고 협대역 기진력의 응답을 알아보기 위해 수치시뮬레이션을 수행하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

협대역 기진 모멘트 스펙트럼에 대한 선박 횡동요의

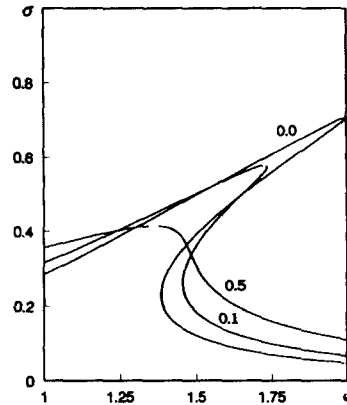


Fig. 2 Roll response curve by multiple time scales ($C_1 = 0.1, C_3 = 0.0, \alpha_3 = 4.0, \omega_n = 1.0$)

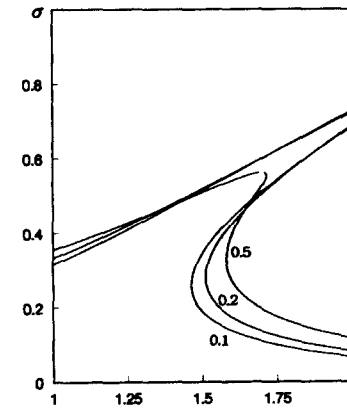


Fig. 3 Roll response curve by multiple time scales ($C_1 = 0.1, C_3 = 0.01, \alpha_3 = 4.0, \omega_n = 1.0$)

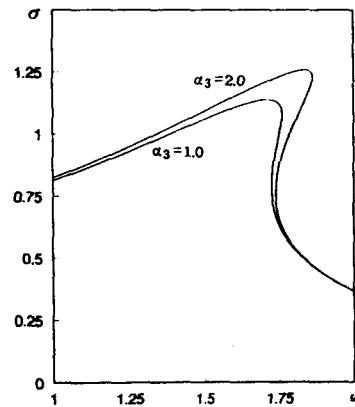


Fig. 4 Roll response curve by multiple time scales ($C_1 = 0.5, C_3 = 0.05, \alpha_3 = 1.0, 2.0, \omega_n = 1.0$)

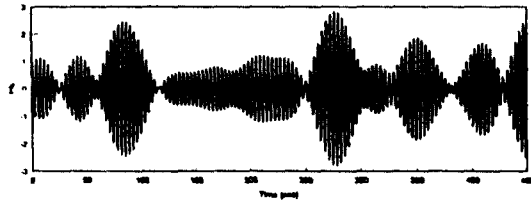


Fig.5 Time history of roll exciting moment
($\gamma=0.2, \omega_n=1.75, \bar{\sigma}_1^2=0.8$)

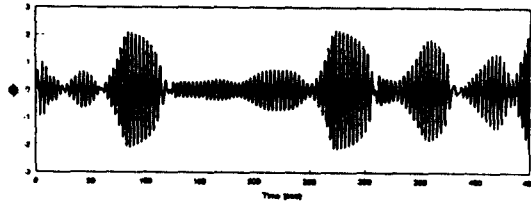


Fig.6 The simulated roll response
($C_1=0.5, C_3=0.05, \alpha_3=1.0, \omega_n=1.0$)

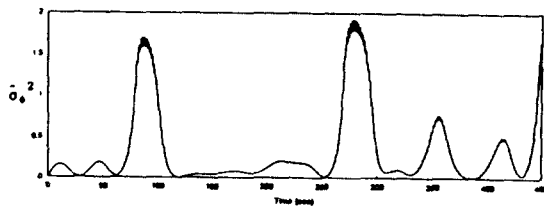


Fig.7 The non-stationary theoretical result for variance
($C_1=0.5, C_3=0.05, \alpha_3=1.0, \omega_n=1.0$)

응답이 다중치 영역과 같은 불안정 영역을 보여줄 수 있다는 가능성을 제시하였다. 그리고 선형 감쇠의 경우보다 비선형 감쇠의 경우가 넓은 다중치 영역을 보임을 알 수 있었다. 다중 시간법을 이용하여 얻은 결과는, 감쇠모멘트 계수와 복원모멘트의 계수를 증가 선형화한 후 구한 결과보다 훨씬 넓은 다중치 영역을 보여주고 있음을 알 수 있다. 시뮬레이션 결과, 3차의 비선형 복원모멘트 계수가 커지거나 감쇠모멘트 계수의 값이 상대적으로 작게 되면 응답 시뮬레이션의 진폭은 커지고, 이때 단시간 응답의 분산 역시 갑자기 커짐을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Francesutto, "On the Probability of Large

Amplitude Rolling and Capsizing As a Consequence of Bifurcations". *OMAE - Vol. 2, Safety and Reliability*, 1991.

[2] A. Francesutto, "Stochastic Modeling of Nonlinear Motions in the Presence of Narrowband Excitation", *Proceedings of the Second International Offshore and Polar Engineering Conference*, San Franco, 1992.

[3] A. Francesutto, "A Stochastic Analysis of Nonlinear Rolling in a Narrow Band Sea", *Proceedings of 18th International Symposium on Naval Hydrodynamics*, Ann Arbor, 1990.

[4] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, New York, Wiley Interscience, 1979.

[5] S. Rajan and H. G. Davies, "Multiple Time Scaling of the Response of a Duffing Oscillator to Narrow band Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 123(3), pp. 497-506, 1988.

[6] M. F. Dimentberg, "Oscillations of a System with Nonlinear Cubic Characteristic under Narrow Band Random Excitation Part I: Planar Response and Stability", *Mechanics of Solids*, Vol. 6, pp. 142-146, 1971.

[7] H. G. Davies and D. Nandall, "Phase Plane for Narrow Band Random Excitation of a Duffing Oscillator?", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 104(2), pp. 277-283, 1985.

[8] A. Cardo, A. Francesutto and R. Nabergoj, "Stochastic Nonlinear Rolling: Which Approach?", *Bulletin de l'Association Technique Maritime ed Aeronautique*, Vol. 87, pp. 491-505, 1987.

[9] J. B. Robert, "A Stochastic Theory for Nonlinear Rolling in Irregular Seas", *Journal of Ship Research*, Vol. 26, pp. 229-245, 1982.

[10] A. Cardo, A. Francesutto and R. Nabergoj, "Ultraharmonics and Subharmonics in the Rolling Motion of a Ship: Steady-State Solution", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 28, pp. 234~251, 1982.

[11] A. Cardo, A. Francesutto and R. Nabergoj, "Deterministic Nonlinear Rolling: A Critical Review", *Bulletin de l'Association Technique Maritime ed Aeronautique*, Vol. 85, pp. 119-141, 1985.

- [12] A. Cardo, A. Francesutto and R. Nabergoj. "Transient Nonlinear Rolling : The Domains of Attraction", *Proceedings 14th Scientific and Methodological Seminar on Ship Hydrodynamics*, Varna, Vol. 2, pp. 23-29, 1985.
- [13] A. Francesutto, "Jump Phenomena Rolling in a Stochastic Beam Sea", *Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aeronautique*, Vol. 88, pp. 504-524, 1988.
- [14] R. L. Stratonovich, "Topics in the Theory of Random Noise: 2nd Vols." Gordon and Breach, New York, 1964.
- [15] 나윤철, 권순홍, 하동대, "협대역 스펙트럼을 가지는 해상에서의 선박 횡요의 특성", *대한조선학회지*, 제 30권, 제2호, pp. 37-42, 1993.
- [16] M. Shinozuka, "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Process", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 49, pp. 357-367, 1971.
- [17] S. Rajan, "Random Superharmonics and Subharmonics Response of a Duffing Oscillator", Ph. D. Thesis, University of New Brunswick, 1987.