

임펄스 잡음과 페이딩이 함께 존재하는 환경에서 다이버시티 수신 기법과 부호화 기법을 채용하는 QPSK 및 QDPSK 신호의 성능 해석

(Performance Analysis of QPSK and QDPSK Signals with
Diversity Reception and Coding Techniques in Fading plus
Impulsive Noise Environments)

임 길 용* · 조 성 준** · 이 진**

(Kill Yong Leem* · Sung Joon Cho** · Jin Lee**)

요 약

m-분포 페이딩과 임펄스 잡음이 함께 존재하는 환경에서 다이버시티 수신기법으로 수신했을 때의 QPSK 및 QDPSK 신호의 오류율을 유도한 후 이를 수치계산하여 신호의 오류성능을 분석하였고 가우스 잡음 환경일 때의 성능과 비교하였다.

그 결과 임펄스 잡음이 강할수록 오류성능은 열화되며 QDPSK 신호일 때의 열화정도가 QPSK 신호일 때 보다 더 심함을 알 수 있었다.

또한 다이버시티 수신기법을 이용하면 가우스 잡음과 페이딩이 함께 존재하는 환경에서 뿐만 아니라 임펄스 잡음과 페이딩이 함께 존재하는 환경에서도 오류성능을 개선시킬 수 있고 다이버시티 기법을 이용하므로써 얻을 수 있는 개선은 CNR면에서 약 10dB~15dB가 된다는 것도 알 수 있었으며 다이버시티 기법 중에서는 최대 비 합성 다이버시티 기법이 가장 우수함도 확인하였다.

임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩이 함께 존재하는 환경에서 다이버시티 수신 기법과 부호화 기법을 함께 이용할 경우에는 다이버시티 수신 기법만을 이용할 때 보다 오류성능이 CNR면에서 약 12dB~15dB만큼 개선됨을 알 수 있었으며 BCH 부호화를 이용할 때 보다 RS 부호화를 이용할 때가 CNR면에서 약 2dB정도 개선된다는 것도 알 수 있었다.

abstract

The error probability of QPSK and DPSK signals with diversity reception technique in m-distribution fading plus impulsive noise environments has been derived and the error probability is evaluated and

* 인하공업전문대학 통신과(Dept. of Communication, Inha technical Junior College)
** 한국항공대학교 항공통신정보공학과(Dept. of Telecom. & Infor. Eng., Hankuk Aviation University)

compared with that in Gaussian noise environment.

The error performance degrades as impulsive noise becomes strong and degree of degradation of signal performance in QDPSK signal is larger than that in QPSK signal.

The diversity reception technique can improve the error performance not only in fading plus Gaussian noise environment but in fading plus impulsive noise environment. When diversity reception technique is used, the improvement of error performance attains about 10dB to 15dB in terms of CNR as compared with that in non diversity reception. Among diversity techniques the maximal ratio combining is most effective.

When diversity reception and coding techniques are used together in impulsive noise plus Rayleigh fading environments, the improvement of error performance attains about 12dB to 15dB in terms of CNR as compared with that of only diversity reception technique case and the improvement of error performance in RS coding attains about 2dB in terms of CNR as compared with that of BCH coding case.

I. 서 론

현대의 정보사회는 컴퓨터의 발전과 급속한 보급으로 종합정보 통신망이 구축되어 감에 따라 기존의 아날로그 통신시스템이 디지털 통신시스템으로 전환되고 있다. 디지털 통신에서는 아날로그 통신과는 달리 수신자가 임의로 에러를 정정하여 해석할 수 없다. 즉, 아날로그 통신에서는 약간의 잡음 등에 의해 통신품질이 저하되더라도 어느정도 해독할 수 있지만 디지털 통신에서는 순수한 정보만을 보낼때 그 에러를 알 수 없다. 이것은 채널에서의 영향이 중요하다 하는 것을 뜻하며 여러가지 제한요소 중에서도 특히 채널에서의 제반 열화요소에 대한 연구가 중요시되고 있다. 채널상에서의 문제로는 잡음과 페이딩 등을 들 수 있으며 특히 디지털 신호에 큰 영향을 미치는 임펄스 잡음이 있다. 임펄스 잡음에는 최근의 도시화, 산업화 등에 따라 발생하는 인공잡음이나 대기나 우주현상 등에 의한 자연잡음이 있다.

임펄스 잡음 환경에서 PSK 신호와 DPSK 신호의 오율특성은 앞서의 여러 연구자들에 의해 해석되었고[1], [2], 페이딩에 관해서도 레일리 페이딩 뿐만 아니라 m분포 페이딩에 의해서 가우스 잡음 환경에서 어떠한 영향을 받는가에 대해 해석된 바 있다. 그리고 페이딩에 대한 보상기법으로 선택 합성법

(selection combining), 등이득 합성법(equal gain combining), 최대비 합성법(maximal ratio combining) 등의 대표적인 3가지 다이버시티 수신기법을 도입했을 때, 이에 의해 PSK 신호와 DPSK 신호의 오율특성이 얼마만큼 개선되는가도 가우스 잡음 환경에서 해석되었다[3].

본 논문에서는 디지털 변조 방식 중 오율특성이 좋은 PSK 및 PSK보다는 오율특성은 다소 떨어지거나 수신기의 구조가 간단한 DPSK 신호가 기존의 가우스 잡음 대신 산업화에 따른 각종 전기, 기기, 전력선, 전철 등으로부터 발생하는 잡음이나 자동차의 점화 잡음 등으로 인한 임펄스 잡음의 영향과 페이딩의 영향을 동시에 받는 좀더 실제적인 환경에서의 오율특성을 알아 내하고자 한다. 페이딩의 영향을 줄이기 위해 다이버시티 수신기법을 이용하므로써 얻어지는 오율 성능의 개선 정도를 알아내고, 기존의 가우스 잡음 환경에서의 오율 성능과 비교·검토한다.

또한 신호의 품질과 신뢰도를 개선하기 위해 BCH 부호와 RS 부호로 부호화했을 경우 다이버시티 기법만을 이용한 것에 비해 어느 정도의 오율 성능이 개선되는가를 구해낸다.

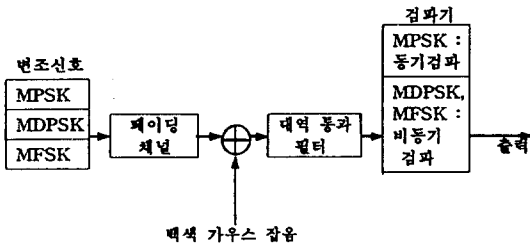
본 논문에서는 임펄스 잡음 모델로서는 Middleton의 A급 임펄스 잡음을 도입하고 임펄스 지수,

가우스 잡음 대 임펄스 잡음전력 비, 페이딩 지수 그리고 CNR 등을 함수로 하여 오율성능을 구한다.

II. 잡음과 페이딩에 의한 오율 특성

송신기에서 방사된 신호는 페이딩 채널을 통하여 수신되며 여기에 백색 가우스 잡음(AWGN)이 더해지게 되는데 본 논문의 해석 모델은 [그림 1]과 같다.

단, 대역통과 필터의 통과 대역폭은 전송된 신호에 왜곡을 주지 않을 정도로 충분히 넓다고 가정한다.



[그림 1] 해석 모델

[Fig. 1] Analysis model

PSK는 베이스밴드의 디지털 정보 신호값에 대응시켜 반송파의 위상을 $0 \sim 2\pi$ [rad] 범위내에서 지정하는 방식인데 다상 PSK(M-ary PSK) 신호는 다음과 같이 표현된다[4].

$$s(t) = S \cos(\omega_c t + \theta_i) \quad (1)$$

단, S ; 송신신호의 진폭 포락선,

ω_c ; 반송파의 각 주파수,

$\theta_i = 2\pi\lambda/M$,

$\lambda (= 0, 1, \dots, M-1)$; 다상정보,

M; ary 수.

[그림 1]에서 신호 $s(t)$ 는 페이딩 채널을 통과한

뒤에는 다음과 같이 표현된다.

$$r(t) = R \cos(\omega_c t + \xi) \quad (2)$$

단, R ; 수신신호의 진폭 포락선,

ξ ; 수신신호의 위상

한편, 가우스 잡음의 결합확률밀도함수 $p_G(x, y)$ 는 다음과 같이 표현된다[5].

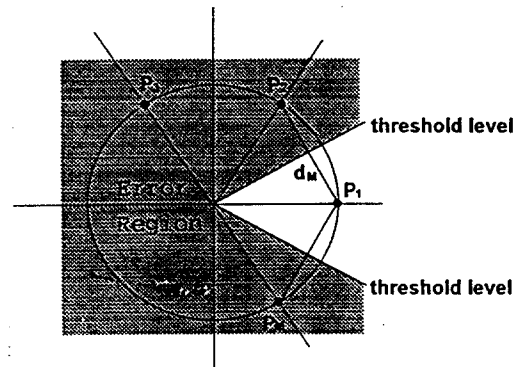
$$p_G(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_G^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_G^2}\right) \quad (3)$$

단, σ_G^2 ; 잡음의 전력

여기서 x와 y는 독립적인 랜덤변수(random variable)이며 x와 y에 대한 각각의 p.d.f인 $p_G(x)$ 와 $p_G(y)$ 는 다음과 같이 구해진다[5].

$$\begin{aligned} p_G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_G(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_G} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_G^2}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_G(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_G(x, y) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_G} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_G^2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$



[그림 2] 수신 합성신호의 페이저도

[Fig. 2] Phasor diagram of composite signal

페이딩이 존재하지 않는 환경에서 단지 가우스 잡음의 영향에 의한 신호의 오류식은 [그림 2]의 신호 점 P₁이 판정레벨을 넘어서 P₂로 잘못 판단될 확률이므로 잡음의 확률밀도함수 p_G(x)를 스투쉬홀드 d_M/2에서 무한대까지 적분하면 된다[5][6]. 즉,

$$P_{eG1} = \int_{\frac{d_M}{2}}^{\infty} p_G(x) dx$$

$$= \int_{\text{Sin}(\pi/M)}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_G^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\gamma} \cdot \text{Sin} \frac{\pi}{M} \right] \quad (6)$$

또한 P_{eG1}의 면적과 P_{eG2}의 면적은 같으므로 전체 부호오율은 다음과 같이 구해진다.

$$P_{eG} = P_{eG1} + P_{eG2} = \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\gamma} \cdot \text{Sin} \frac{\pi}{M} \right] \quad (7)$$

단, $\gamma = \frac{S^2}{2\sigma_G^2}$; CNR(Carrier to Noise power

Ratio),

S : 송신신호 진폭,

σ_G^2 : 잡음의 전력,

M : ary의 수.

본 논문에서는 통신로상에서 실제로 발생하는 페이딩이 레일리 페이딩보다 강하거나 약할 수 있으므로 페이딩의 여러가지 심도(depth)를 나타낼 수 있는 m-분포 페이딩을 도입한다. 식 (2)에서 페이딩을 받은 수신 신호의 진폭 포락선 R에 대한 확률밀도함수(p.d.f) p(R)은 다음과 같이 주어진다[7].

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mR^2}{\Omega}\right)$$

$$= M(R, m, \Omega) \quad (8)$$

단, $\Omega/2$: 신호의 평균 반송파 전력,

$\Omega (= \overline{R^2})$: 페이딩을 받은 신호의 평균 전력,

$\Gamma(\cdot)$: 감마함수,

m : 페이딩 지수.

m-분포 페이딩에서 m은 페이딩 심도를 나타내는

파라미터인데 페이딩 지수(fading figure)라고도 부르며 그 값의 범위는 $1/2 \leq m < \infty$ 이다. m-분포 페이딩에서 m의 값이 1일때는 Rayleigh 페이딩을 나타내고 $m > 1$ 일때는 Rician 페이딩인 경우에 해당한다.

m-분포 페이딩을 받은 다상 MPSK 신호의 오류식 P_{EF}는 식 (7)과 식 (8)을 이용하여 다음과 같이 하여 구한다.

$$P_{EF} = \int_0^{\infty} P_{eG} \cdot p(R) dR \quad (9)$$

CNR이 클 경우(CNR > 20dB)에 구한 결과는 다음과 같다(부록 참조)[8].

$$P_{EF} = \int_0^{\infty} P_{eG} \cdot p(R) dR$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{4\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma}{\pi m}} \frac{\Gamma\left[m + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma[m]}$$

$$\left[1 + \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma}{m} \right]^{1-m-1/2} \quad (10)$$

$$\cdot {}_2F_1 \left[1, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma}{m + \text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[m + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma[m+1]} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \cdot \left(\text{Sin} \frac{\pi}{M}\right)^2} \right]^m$$

또한 MDPSK 신호는 인접하는 반송파 펄스 사이의 상대 위상차를 변화시키므로서 디지털 정보를 전송하는 방식이다. 앞에서 설명한 MPSK의 복조 방식은 동기검파였으므로 수신단에서 기준 반송파가 필요하였으나 MDPSK는 동기 검파용 기준 반송파가 필요없으므로 그만큼 회로가 간단해진다. [그림 1]과 같은 잡음과 페이딩 채널을 통과하였을 경우의 MDPSK 신호의 오류식은 식 (10)에서 $\text{Sin} \frac{\pi}{M}$ 대신 $\text{Sin} \frac{\pi}{2M}$ 로 바꿔 넣으면 된다[8]. 즉,

$$P_{EF} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma[m+1/2]}{\Gamma[m+1]} \cdot \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \cdot (\sin \frac{\pi}{2M})^2} \right]^m \quad (11)$$

이다.

III. 임펄스 잡음에 의한 오류 특성

임펄스 잡음이란 평균전력에 비해 높은 전압치를 가지는 펄스가 진폭이나 위상 혹은 발생시간면에서 불규칙하게 발생하는 것을 말하며 디지털 통신에 미치는 영향이 크다. 가우스 잡음이 에르고딕 과정(ergodic process)인데 반해 임펄스 잡음은 비에르고딕 과정이므로 일반적인 정규분포식에 의한 해석이 어렵다. 해석하는 방법으로는 가우스 잡음을 배제시키고 오직 임펄스 잡음만의 모델을 세워 해석하는 방법[9]과 가우스 잡음을 포함시켜 무한계의 가우스분포가 혼합된 형태로 해석하는 방법[10]이 있다. 후자의 방법이 보다 실질적이기 때문에 본 논문에서는 후자의 해석방법을 택한다.

Middleton을 임펄스 잡음 모델로서 3가지를 제시했다. 즉, 그는 임펄스 잡음 모델로서 대역통과필터를 통과한 협대역 임펄스 잡음인 A급과, 수신기에 과도적 임펄스를 발생시키는 광대역 임펄스 잡음인 B급과 A급과 B급이 혼합된 형태의 임펄스 잡음인 C급으로 분류했다.

본 논문에서는 이중에서 A급 협대역 임펄스 잡음 모델만을 도입하기로 한다. 대역통과 필터를 통과한 A급 협대역 임펄스 잡음의 순시포락선에 대한 확률 밀도함수는 다음과 같이 주어진다[10].

$$P_I(N) = \frac{e^{-A}}{W} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{N}{\sigma_j^2} \exp(-N^2/2W \sigma_j^2), \quad N \geq 0 \quad (12)$$

단, $W(=\sigma_0^2 + \Omega_1)$: 전체 잡음 전력(가우스 잡음 전력(σ_0^2)과 임펄스 잡음 전력(Ω_1)의 합),

A: 임펄스 지수, 13

N: 임펄스 잡음의 순시 포락선,

σ_j^2 : $(j/A + \Gamma')/(1 + \Gamma')$,

Γ' : 가우스 잡음 대 임펄스 잡음 전력비.

식 (12)를 식 (4), 식 (5)와 같이 직교좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$p_I(x) = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{2\pi W \sigma_j^2}} \exp(-x^2/2W \sigma_j^2) \quad (13)$$

$$p_I(y) = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{2\pi W \sigma_j^2}} \exp(-y^2/2W \sigma_j^2) \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)를 가우스 잡음의 확률밀도함수인 식 (4)와 식 (5)와 각각 비교해보면, 가우스 잡음의 $p_G(x)$, $p_G(y)$ 와 임펄스 잡음의 $p_I(x)$, $p_I(y)$ 의 사이에는 σ_0^2 이 $W\sigma_j^2$ 에 대응하고 $p_I(x)$ 나 $p_I(y)$ 는 각각 $p_G(x)$ 나 $p_G(y)$ 에 계수 $e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$ 가 곱해진 형태라는 것을 알 수 있다.

따라서 임펄스 잡음의 영향을 받을 경우에 MPSK 신호의 오류식은 식 (7)로부터 곧바로 다음과 같이 구해진다[5].

$$P_{EI} = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\sigma_j^2}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right) \quad (15)$$

단, γ : $\text{CNR}(=\frac{S^2}{2W})$

M: 상의 수

또한 임펄스 잡음을 포함하는 신호가 무선통신로상에서 페이딩을 받을 경우의 MPSK의 오류식은 식 (10)으로부터 곧바로 다음과 같이 구해진다[3].

$$P_{EIF} = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \left[\frac{\sin(\pi/M)}{\sigma_j} \right]^2} \right]^m \quad (16)$$

단, m; 페이딩 지수,

$$\gamma(=\frac{\Omega}{2W}); \text{CNR.}$$

MDPSK 신호의 오율식은 위식에서 $\text{Sin}\frac{\pi}{M}$ 를 $\text{Sin}\frac{\pi}{2M}$ 로 바꿔 넣으면 된다.

본 논문에서는 M=4인 QPSK 신호와 QDPSK 신호만을 다루기로 한다.

IV. 다이버시티 수신시의 오율 특성

다이버시티 수신이란 불완전한 신호 레벨을 보상 하므로써 페이딩의 영향을 줄이는 것을 말한다. 이 방법은 임의의 시간에 있어서 공간상이나 주파수상으로 충분히 떨어져 있는 두 경로에서는 페이딩이 동시에 발생하지 않는다는 통계적 성질을 이용하고 있다. 본 논문에서는 검파전(Predetection) 다이버시티 기법을 이용하여, 선택 합성법(Selection Combining: SC), 등이득 합성법(Equal Gain Combining: EGC), 최대비 혼성법(Maximal Ratio Combining: MRC)의 3가지 주요 합성법에 대한 결과만을 살펴본다. 실용적인 면에서 두 branch 다이버티 수신을 주로 다룬다.

다이버시티 수신시의 평균 오율식은 다음과 같다 [3].

$$[P_{\text{EIF}}]_D = \int_0^{\infty} P_{\text{EIF}} \cdot p_i(R) dR \quad (17)$$

위식에서의 $p_i(R)$ 은

$$p_i(R) = \int_0^1 \int_0^{\pi} C_i W_i^{2m} M(R, 2m, 2\Omega W_i \sqrt{1-k^2}) dx dy \quad (18)$$

단, i=S; 선택합성법,

i=E; 등이득 합성법,

i=M; 최대비 합성법,

k^2 : 두 branch 신호 사이의 전력상관계수.

위식은 m분포 페이딩 환경에서 신호를 다이버시티 기법으로 수신했을때의 p.d.f이다.

그러므로 임펄스 잡음과 페이딩 환경에서 다상 MPSK 신호에 대한 다이버시티 수신시의 최종적인 평균 오율식은 식 (17)에 의해 다음과 같이 구해진다(부록 참조)[3].

$$[P_{\text{EIF}}]_D = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(2m+1)} \frac{D_i}{(1-k^2)^m} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \left[\frac{\sin(\pi/M)}{\sigma} \right]^2} \right]^{2m} \quad (19)$$

MDPSK 신호는 식 (19)에서 $\text{Sin}\frac{\pi}{M}$ 를 $\text{Sin}\frac{\pi}{2M}$ 로 바꿔 넣으면 된다.

즉,

$$[P_{\text{EIF}}]_D = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(2m+1)} \frac{D_i}{(1-k^2)^m} \cdot \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \left[\frac{\sin(\pi/2M)}{\sigma} \right]^2} \right]^{2m} \quad (20)$$

이다.

$$\begin{aligned} \text{단, } D_i &= \frac{2^{2m} \Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)} && \text{선택합성법,} \\ &= \frac{\Gamma(2m+1) \Gamma(m+1/2)}{\Gamma(2m+1/2) \Gamma(m+1)} && \text{등이득합성법,} \\ &= 1 && \text{최대비합성법.} \end{aligned}$$

이상의 오율식을 m-분포 페이딩 환경에서 정리하면 <표 1>과 같이 된다.

〈표 1〉 MPSK 신호와 MDPSK 신호의 오율식
 〈Table 1〉 Error equation fo MPSK and MDPSK signals

환경/오율식	b=M일때는 MPSK, B=2M일때는 MDPSK
임펄스 잡음 + 페이딩 환경	$e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \left[\frac{\sin(\pi/b)}{\sigma_j} \right]^2} \right]^m$
가우스 잡음 + 페이딩 환경에서 다이버시티 수신시	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(2m+1)} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} [\sin(\pi/b)]^2} \right]^{2m} \cdot \frac{D_1}{(1-k^2)^m}$
임펄스 잡음 + 페이딩 환경에서 다이버시티 수신시	$e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(2m+1)} \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \left[\frac{\sin(\pi/b)}{\sigma_j} \right]^2} \right]^{2m} \frac{D_1}{(1-k^2)^m}$

V. 부호화 기법을 이용할 경우의 오율 특성

앞장에서는 잡음과 페이딩과 임펄스 잡음이 함께 존재하는 환경에서 QPSK 신호와 QDPSK 신호를 다이버시티 기법으로 수신했을 경우의 오율성능에 대해 다루었다. 그러나 이런 환경에서는 다이버시티 수신 기법만으로 신호의 품질이나 신뢰성을 높힐 수 없기 때문에 에러를 제어하기 위한 방법으로 에러제어부호(Error control codes)를 이용하게 된다.

선형 부호 중 가장 중요한 것의 하나로 순회부호가 있는데 순회부호는 풍부한 대수적 구조를 가지고 있어서 지금까지 많은 연구 결과가 발표되어 있다. 순회부호는 부호화와 신드롬 계산회로 구성이 간단하여 가장 많이 이용되고 있는데, 순회부호 중 BCH(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem codes) 부호는 에러정정부호로서 잘 알려진 부호 중의 하나이다. BCH 부호는 넓은 범위의 부호장과 에러정정 능력을 갖고 있으며 부호장이 수천 이하일 경우, 같은 정도의 부호장과 에러정정 능력을 갖는 부호 중에서 용장도가 작은 우수한 부호이다[11].

일반적으로 부호화 기법을 도입하면 오율의 성능은 개선되나 대역폭이 넓어지므로 주어진 대역폭내에서 전송가능한 전송 속도는 떨어지게 되는데 본

논문에서는 부호화를 행하더라도 정보전송율을 하기에 충분한 전송 대역폭이 확보될 수 있다는 가정 하에 해석한다.

BCH 부호화를 할 경우의 수신측에서의 오율식은 다음과 같이 하여 구한다[12].

$$P_{BCH} = \frac{1}{n} \sum_{i=t+1}^n i \binom{n}{i} [P_{EIF}]_D^i (1 - [P_{EIF}]_D)^{n-i} \quad (21)$$

단, n: 부호 길이,

t: 에러정정 능력,

$$\gamma' = \gamma \cdot r$$

$$\gamma = E_s / N_0,$$

r(=k/n): 부호율,

[P_{EIF}]_D: 잡음과 페이딩 및 임펄스 잡음 환경에서 다이버시티 수신시의 신호의 오율.

RS(Reed-Solomon) 부호는 산발에러(random error) 또는 연집에러(burst error)를 모두 정정할 수 있으므로 실제로 널리 이용되고 있는 매우 중요한 부호이다[11].

RS 부호는 비 2원 BCH 부호의 일종으로써 동일한 최소거리를 갖는 선형 부호 중에서 검사기호가 최소인 부호로서 RS 부호의 오율식은 근사적으로

다음과 같이 나타내진다[3].

$$P_{RS} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2(n-1)} \left(\frac{n}{i}\right) [P_{EiF}] b \quad (22)$$

$$(1 - [P_{EiF}]_D)^{n-i}$$

VI. 수치계산 결과와 검토

앞장에서 유도한 오율식을 이용하여 수치계산한 오율 성능을 CNR, 페이딩 지수 m 그리고 다이버시티 수신기법과 부호화 기법 등을 함수로 하여 [그림 3] ~ [그림 17]에 나타내었다.

[그림 3]과 [그림 4]는 QPSK 신호와 QDPSK 신호의 오율 성능을 나타낸다. 잡음전력이 일정하다고 할 때 전체 잡음전력 중에서 임펄스잡음 전력이 차지하는 비율이 크거나 (즉 Γ 가 작거나) 임펄스의 발생빈도 A가 작을 때가 임펄스성이 강한 잡음이다. 그림에서 A와 Γ 의 값이 커지면 가우스 잡음에 가까워지며 A와 Γ 의 값이 작아지면 임펄스성이 강한 잡음이 된다. 일반적으로 임펄스성이 강해질수록 오율 성능은 떨어진다.

[그림 5]와 [그림 6]은 가우스 잡음과 페이딩 환경에서 다이버시티 수신시 QPSK 신호와 QDPSK 신호의 오율 성능을 나타낸 것이다. 다이버시티 기법 중 최대비 합성 다이버시티 기법이 가장 우수하며 페이딩이 약해질수록 오율 개선 정도가 좋음을 알 수 있다.

[그림 7]과 [그림 8]은 가우스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$) 환경에서 QPSK 신호와 QDPSK 신호에 대한 오율 성능을 나타낸 것이다. 오율을 10^{-4} 으로 유지시키려면 다이버시티 기법을 이용하지 않을 때의 QPSK 신호는 40dB이상의 CNR이 요구되는 반면 다이버시티 기법을 이용할 경우에는 약 24dB~26dB의 CNR이 요구된다. QDPSK 신호는 약 30dB~32dB의 값으로도 충분히 오율 값을 달성할 수 있다.

[그림 9]와 [그림 10]은 임펄스 잡음과 페이딩이 함께 존재하는 환경에서 다이버시티 수신시 QPSK

신호와 QDPSK 신호의 오율 성능을 나타낸 것이다. 오율 성능면에서 가우스 잡음 환경을 때 보다 훨씬 나쁜 것을 알 수 있고 최대비 합성 다이버시티 기법을 이용할 때의 오율 성능이 가장 좋음을 알 수 있다.

[그림 11]과 [그림 12]는 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$) 환경에서 QPSK 신호와 QDPSK 신호에 대한 오율 성능을 나타낸 것이다. 오율 10^{-4} 을 달성하기 위해서 QPSK 신호는 다이버시티 기법을 이용하지 않을 때는 40dB이상의 CNR이 요구되는 반면 다이버시티 기법을 이용할 경우에는 약 26dB~28dB의 CNR이 요구된다. QDPSK 신호는 약 32dB~34dB의 값으로도 충분한 오율 값을 달성할 수 있다.

[그림 13]은 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$)이 함께 존재하는 환경에서 최대비합성 다이버시티 기법을 이용할 때의 QPSK 신호에 대해 A와 Γ 의 값의 변화에 따른 오율 성능을 나타낸 것이다. 최대비 합성 다이버시티 기법을 이용하면 오율 10^{-4} 을 달성하기 위해서 $A=0.1$, $\Gamma=1$ 일 때는 약 24dB의 CNR이 요구되며 임펄스성이 매우 강한 환경 ($A=0.01$, $\Gamma=0.01$) 일 때도 CNR 값이 40dB면 이 오율 값을 달성할 수 있다.

[그림 14]는 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$) 환경에서 최대비 합성 다이버시티 기법과 BCH 부호화 기법을 함께 이용했을 때의 QPSK 신호에 대해 에러 정정 능력 t에 따른 오율 성능을 나타낸 것이다. BCH 부호화를 할 경우의 오율 성능이 부호화 하지 않은 경우의 오율 성능보다 훨씬 개선했음을 알 수 있고 에러 정정 능력 t가 커짐에 따라 오율 성능이 더 좋아짐도 알 수 있다.

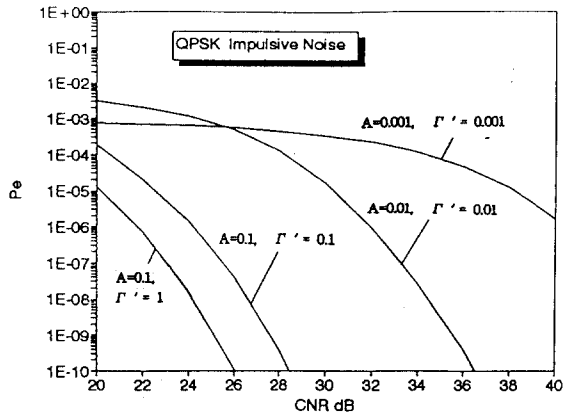
[그림 15]는 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$) 환경에서 최대비 합성 다이버시티 기법과 RS 부호화 기법을 이용할 때의 QPSK 신호에 대해 에러정정 능력 t에 따른 오율 성능을 나타낸 것이다. BCH 부호화 할 경우와 마찬가지로 에러 정정 능력 t가 증가 할수록 오율 성능은 개선되고 BCH 부호보

다 오울의 개선 정도는 더 큼을 알 수 있다.

[그림 16]은 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$) 환경에서 최대비 합성 다이버시티 기법과 에러 정정 능력이 $t=3$ 인 BCH 부호화 기법을 함께 이용할 때의 QPSK 신호와 QDPSK 신호에 대해 가우스 잡음과 Rayleigh 페이딩 환경일 때의 오울 성능을 비교한 것이다. 임펄스 잡음 환경일 때 오울 10^{-5} 를 달성하기 위해서 BCH 부호화 한 QPSK 신호와

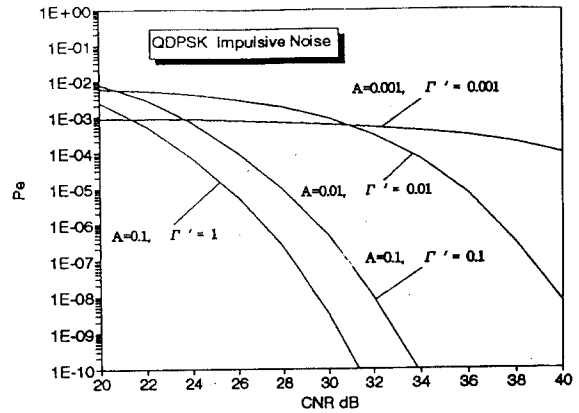
QDPSK 신호는 부호화 하지 않은 신호에 비해 CNR면에서 약 12dB만큼의 오울 성능이 개선되고 가우스 잡음일 때는 약 14dB만큼 개선됨을 알 수 있다.

[그림 17]은 임펄스 잡음과 Rayleigh 페이딩 ($m=1$)이 함께 존재하는 환경에서 최대비 합성 다이버시티 기법과 에러 정정 능력이 $t=3$ 인 RS 부호화 기법을 함께 이용할 때의 QPSK 신호와 QDPSK 신



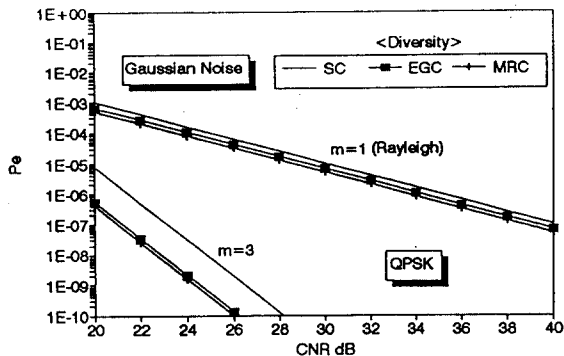
[그림 3] 임펄스 잡음 환경에서 QPSK 신호의 오울 성능

[Fig. 3] Error performance of QPSK signal with Impulsive noise



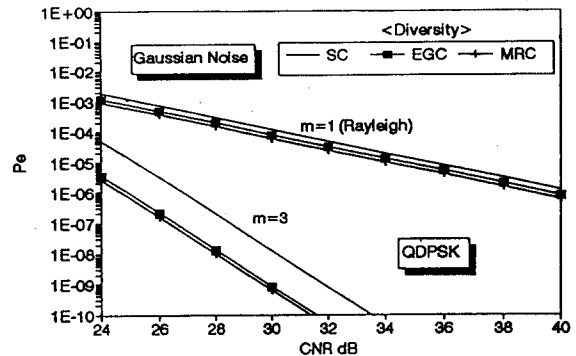
[그림 4] 임펄스 잡음 환경에서 QDPSK 신호의 오울 성능

[Fig. 4] Error performance of QDPSK signal with Impulsive noise



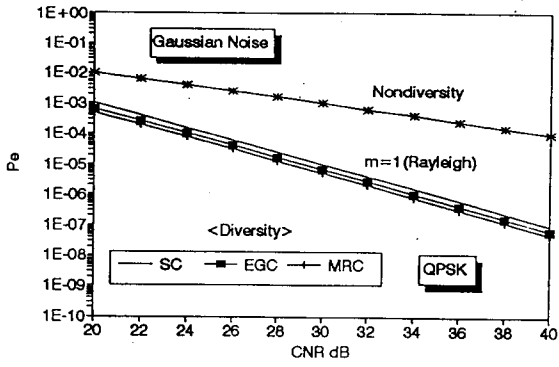
[그림 5] 가우스 잡음과 페이딩 환경에서 QPSK 신호의 오울 성능

[Fig. 5] Error performance of QPSK signal with Gaussian noise and fading



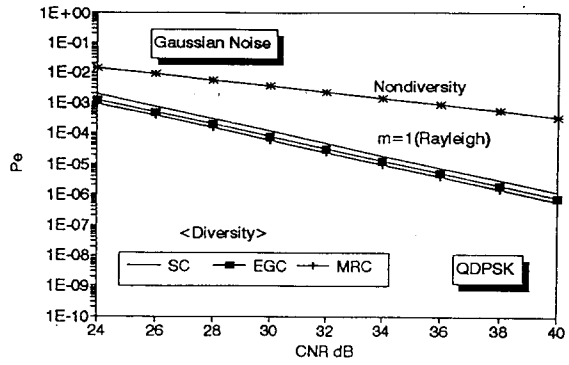
[그림 6] 가우스 잡음과 페이딩 환경에서 QDPSK 신호의 오울 성능

[Fig. 6] Error performance of QDPSK signal with Gaussian noise and fading



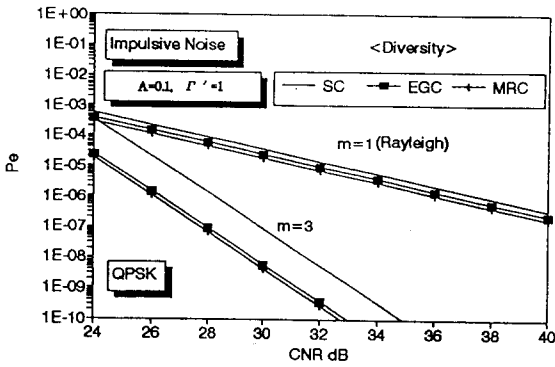
[그림 7] 가우스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 QPSK 신호의 오율 성능 ($m = 1$)

[Fig. 7] Error performance of QPSK signal with Gaussian noise and Rayleigh fading ($m = 1$)



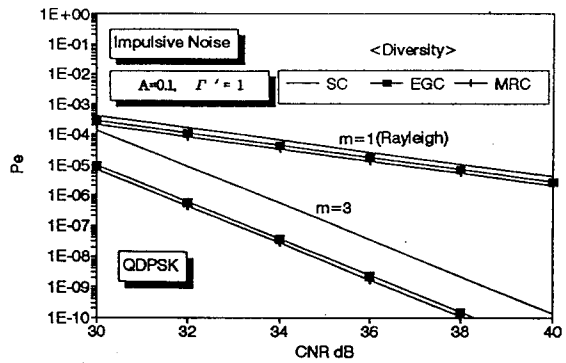
[그림 8] 가우스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 QDPSK 신호의 오율 성능 ($m = 1$)

[Fig. 8] Error performance of QDPSK signal with Gaussian noise and Rayleigh fading ($m = 1$)



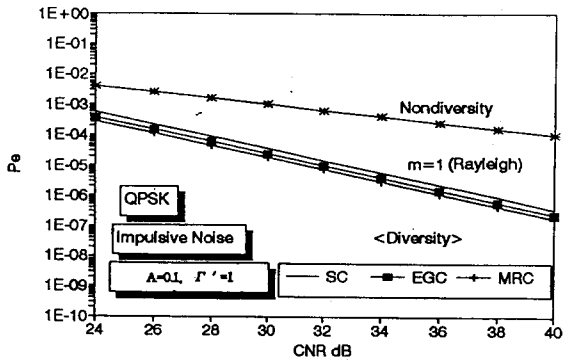
[그림 9] 임펄스 잡음과 페이딩 환경에서 QPSK 신호의 오율 성능

[Fig. 9] Error performance of QPSK signal with Impulsive noise and fading



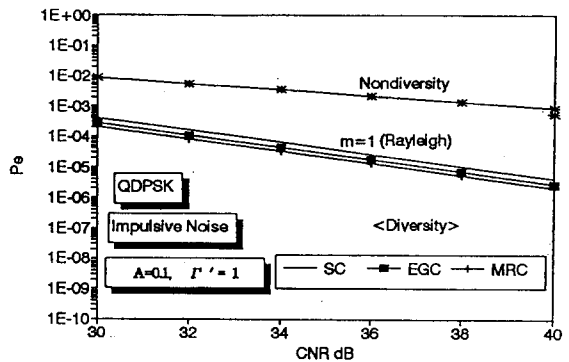
[그림 10] 임펄스 잡음과 페이딩 환경에서 QDPSK 신호의 오율 성능

[Fig. 10] Error performance of QDPSK signal with Impulsive noise and fading



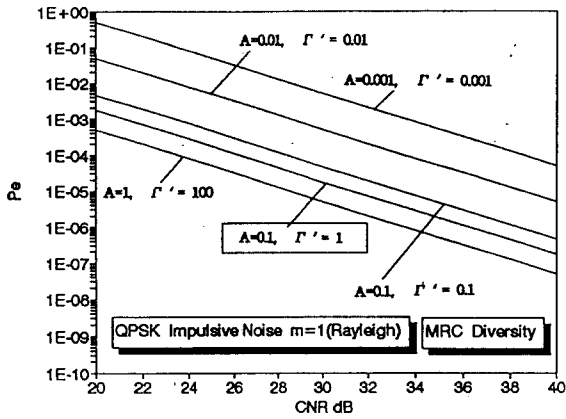
[그림 11] 임펄스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 QPSK 신호의 오율 성능 ($m = 1$)

[Fig. 11] Error performance of QPSK signal with Impulsive noise and Rayleigh fading ($m = 1$)



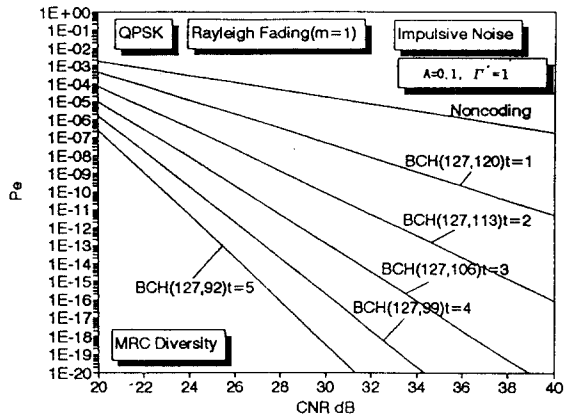
[그림 12] 임펄스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 QDPSK 신호의 오율 성능 ($m = 1$)

[Fig. 12] Error performance of QDPSK signal with Impulsive noise and Rayleigh fading ($m = 1$)



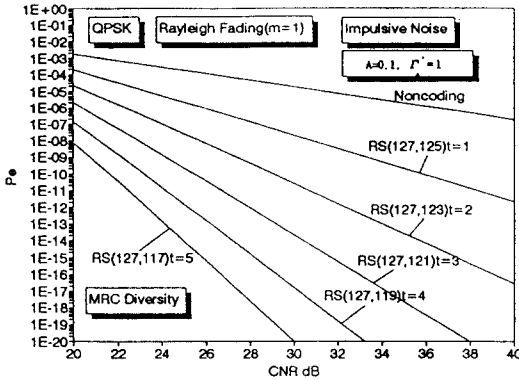
[그림 13] 임펄스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 QPSK 신호의 오율 성능 (m = 1), (MRC diversity)

[Fig. 13] Error performance of QPSK signal with Impulsive noise and Rayleigh fading (m = 1), (MRC diversity)



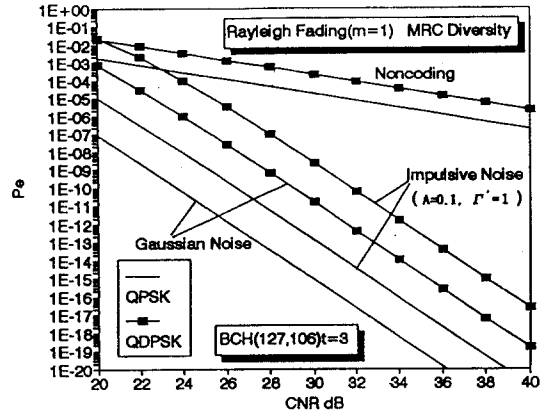
[그림 14] 임펄스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 BCH 부호화를 이용했을 때의 QPSK 신호의 오율 성능 (m = 1), (MRC diversity)

[Fig. 14] Error performance of QPSK signal adopting the BCH coding with Impulsive noise and Rayleigh fading (m = 1), (MRC diversity)



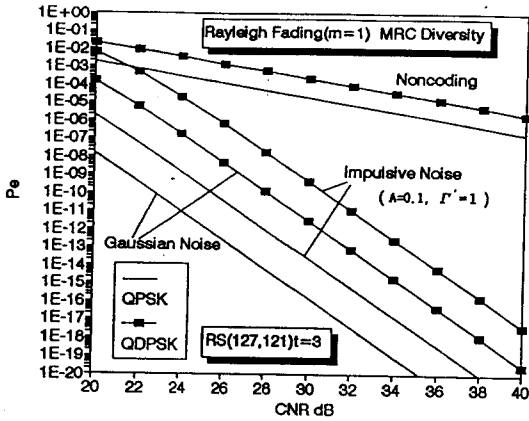
[그림 15] 임펄스 잡음과 레일리 페이딩 환경에서 RS 부호화를 이용했을 때의 QPSK 신호의 오율 성능 (m = 1), (MRC diversity)

[Fig. 15] Error performance of QPSK signal adopting the RS coding with Impulsive noise and Rayleigh fading (m = 1), (MRC diversity)



[그림 16] 레일리 페이딩 환경에서 BCH 부호화를 이용했을 때의 QPSK 신호와 QDPSK 신호의 오율 성능 (m = 1), (MRC diversity)

[Fig. 16] Error performance of QPSK and QDPSK signals adopting the BCH coding with Rayleigh fading (m = 1), (MRC diversity)



[그림 17] 레일리 페이딩 환경에서 RS 부호화를 이용했을 때의 QPSK 신호와 QDPSK 신호의 오율 성능 (m = 1), (MRC diversity)

[Fig. 17] Error performance of QPSK and QDPSK signals adopting the RS coding with Rayleigh fading (m = 1), (MRC diversity)

호의 성능을 가우스 잡음과 Rayleigh 페이딩 환경일 때의 오율 성능과 비교한 것이다. 임펄스 잡음 환경일 때 오율 10^{-5} 을 달성하기 위해서는 RS 부호화 한 QPSK 신호와 QDPSK 신호는 부호화 하지 않은 신호에 비해 CNR면에서 약 14dB 만큼의 오율 성능이 개선되고 가우스 잡음일 때는 약 15dB만큼의 오율 성능이 개선됨을 알 수 있다.

Ⅶ. 결 론

본 논문에서는 임펄스 잡음과 페이딩 환경에서 다이버시티 기법을 이용하였을 때의 MPSK 신호와 MDPSK 신호의 오율식을 유도한 후, 유도한 오율식을 이용하여 QPSK와 QDPSK 신호의 수치계산한 결과를 그래프로 나타내고 이에 대해 검토하였다. 얻은 결과로부터, QPSK 신호가 QDPSK 신호보다 오율 성능이 더 좋으며 A와 Γ '의 값이 적을수록 즉 임펄스성이 강할수록 오율 성능은 떨어짐을

알 수 있었다. 그러나 다이버시티 기법을 이용하면 약 10dB~15dB만큼의 오율 성능을 개선할 수 있었고 임펄스 잡음이 매우 강한 환경에서도 최대비 합성 다이버시티 기법을 이용하면 40dB의 CNR 값으로 오율 10^{-4} 을 달성할 수 있었다. 즉, 임펄스 잡음이 발생하기 쉬운 환경에서 다이버시티 기법을 도입하므로서 성능면에서 많은 개선을 얻을 수 있었으며 페이딩 지수 m이 커짐에 따라서 개선의 정도가 커짐을 알 수 있었다. 또한 다이버시티 기법과 부호화 기법을 함께 이용했을 경우에는 다이버시티 기법만을 이용했을 때보다 약 12dB~15dB만큼 오율 성능이 개선됨을 알 수 있었으며 BCH 부호화 기법을 이용했을 때보다 RS 부호화 기법을 이용했을 때의 오율 성능이 CNR면에서 약 2dB 개선됨을 알 수 있다.

부 록

본문의 식 (10)의 유도

$$P_{EF} = \int_0^{\infty} P_{eG} \cdot p(R) dR$$

$$\text{여기서 } P_{eG} = \text{erfc} \left[\sqrt{\gamma} \cdot \sin \frac{\pi}{M} \right]$$

$$\text{단, } \gamma = \frac{R^2}{2N} \text{ (순시CNR)이고}$$

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right)$$

$$\text{단, } \Omega = \bar{R}^2 \text{이므로}$$

$$P_{EF} = \int_0^{\infty} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C \right) \cdot \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \tag{A.1}$$

이 된다. 여기서 $C = \sin \frac{\pi}{M}$ 이다.

식 (A.1)에 다음의 공식

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$$

을 이용하면

$$\begin{aligned}
 P_{EF} &= \int_0^\infty \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C \right) \right\} \cdot \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \\
 &\quad \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \\
 &= \int_0^\infty \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \\
 &\quad - \int_0^\infty \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C \right) \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \\
 &\quad \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

윗 식에서 첫째항은 1이 되므로

$$\begin{aligned}
 P_{EF} &= 1 - \int_0^\infty \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C \right) \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \\
 &\quad \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

윗 식에서 밑줄친 부분을 "A"라 놓으면

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\infty \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C \right) \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \\
 &\quad \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) dR \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

윗 식에 다음의 공식

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2 \right)$$

$${}_1F_1 \left(k+1; \frac{3}{2}; -x^2 \right) = \exp(-x^2)$$

$${}_1F_1 \left(\frac{1}{2} - k; \frac{3}{2}; -x^2 \right)$$

을 이용하면

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\infty \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) 2 \frac{\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C^2}{\sqrt{\pi}} \\
 &\quad {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{R^2}{2N} C^2 \right) dR
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} 2 \frac{\sqrt{\frac{R^2}{2N}} C^2}{\sqrt{\pi}} \\
 &\quad \exp \left(-\frac{m}{\Omega} R^2 \right) \exp \left(-\frac{R^2}{2N} C^2 \right) \\
 &\quad \cdot {}_1F_1 \left(1; \frac{3}{2}; \frac{R^2}{2N} C^2 \right) dR \\
 &= \int_0^\infty 2 \frac{\sqrt{2R^2}}{\sqrt{\pi N}} C^2 \frac{1}{\Gamma(m)} R^{2m-1} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^m \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{m}{\Omega} R^2 \left(1 + \frac{\Omega C^2}{2mN} \right) \right\} \\
 &\quad \cdot {}_1F_1 \left(1; \frac{3}{2}; \frac{R^2}{2N} C^2 \right) dR \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } \frac{m}{\Omega} R^2 = t \text{라 놓으면, } \frac{2mR}{\Omega} dR = dt,$$

$$dR = \frac{\Omega}{2mR} dt \text{가 되고 구간변화는 } R=0 \text{이면 } t=0,$$

$$R=\infty \text{ } t=\infty \text{이 되므로}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\infty 2 \sqrt{2R^2} \frac{C^2}{\sqrt{\pi N}} \frac{1}{\Gamma(m)} R^{2m-1} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^m \\
 &\quad \exp \left\{ -t \left(1 + \frac{\Omega C^2}{2mN} \right) \right\} \\
 &\quad \cdot {}_1F_1 \left(1; \frac{3}{2}; \frac{R^2}{2N} C^2 \right) \frac{\Omega}{2mR} dt \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

윗 식에 다음의 공식

$$g(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt$$

$$\text{단, } f(t) = t^{\sigma-1} {}_mF_n (a_1 \cdots a_m; \rho_1 \cdots \rho_n; \lambda t)$$

$$g(p) = \Gamma(\sigma) p^{-\sigma} {}_{m+1}F_n (a_1 \cdots a_m; \sigma; \rho_1 \cdots \rho_n; \frac{\lambda}{p})$$

을 이용하면

$$A = \sqrt{\frac{4 \operatorname{Sif}^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \gamma}{\pi m}} \cdot \frac{\Gamma \left[m + \frac{1}{2} \right]}{\Gamma[m]}$$

참 고 문 헌

$$\begin{aligned} & \cdot \left[1 + \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma}{m} \right]^{(-m-1/2)} \\ & \cdot {}_2F_1 \left[1, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; + \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma}{m + \text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma} \right] \end{aligned} \quad (A.7)$$

단, $C = \sin \frac{\pi}{M}$ 이다.

윗 식을 (A.3)에 대입하고 $\frac{\gamma}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$

$\gg 1$ 을 고려하면

$$\begin{aligned} P_{EF} &= 1 - \sqrt{\frac{4\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma}{\pi m}} \cdot \frac{\Gamma\left[m + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma[m]} \\ & \cdot \left[\frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma}{m} \right]^{(-m-1/2)} \\ & \cdot {}_2F_1 \left[1, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right] \end{aligned} \quad (A.8)$$

윗 식에 다음의 공식

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

$$\Gamma(Z)\Gamma(1-Z) = -Z\Gamma(-Z)\Gamma(Z)$$

을 이용하면 식(A.8)은 다음과 같이 되어 본문의 식(10)이 구해진다.

$$\begin{aligned} P_{EF} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left[m + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma[m+1]} \\ & \cdot \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{m} \cdot (\text{Sin} \frac{\pi}{M})^2} \right]^m \end{aligned} \quad (10)$$

- [1] P.Z. Peebles, *Digital Communnication Systems*. Prentice-Hall, 1987.
- [2] 오창현, 조성준, “가우스/임펄스 잡음과 페이딩이 DPSK 신호에 미치는 영향”, 한국통신학회 춘계학술발표회 논문집, pp.157-162, 1988년 6월.
- [3] 김남성, “이동 무선 통신 회선상에서 디지털 신호의 다이버시티 수신 특성”, 한국항공대학 대학원 석사학위 논문, 1990년 6월.
- [4] H. Kusao, I. Oka, N. Morinaga, and T. Namekawa, “Error rate performance of PSK signal in the presence of electromagnetic impulsive interferene”, *Symposium of Information Theory and its Application in Japan, IECE*, pp. 481-488, Dec. 1981.
- [5] 공병욱, “페이딩과 간섭 및 잡음의 복합환경하에서 디지털 변조 시스템의 오율특성에 관한 연구”, 한국항공대학 대학원 박사학위 논문, 1991년 12월.
- [6] J.G. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 1989.
- [7] M. Nagakami, “The m-distribution-A general fomular of intensity of rapid fading”, in *Statistical Methods in Radio Waves Propagationed*. MW. C. Hoffman Ed., New York: PergamonPress, 1960.
- [8] 오창현, “Error Rate Performance of Digital Radio Signals in Diversity Reception”, 한국항공대학 대학원 석사학위 논문, 1990년 2월.
- [9] J.D. Parsons and A.U.H. Sheikh, “The characterization of impulsive noise and

- considerations for a noise-measuring receiver", *The Radio and Electronic Engineer*, vol.49, no.9, pp.467-476, Sep.1979.
- [10] D. Middleton, "Statistical-physical models of electromagnetic interference", *IEEE Trans. on Electromag. Compat*, vol.EMC-19, no.3, pp. 106-127, Aug. 1977.
- [11] 원등호, 정보와 부호이론, Ohm社, 1993.
- [12] D.J. Torrieri, "The information bit error rate for block code", *IEEE Trans. Commun*, vol. COM-32, no.4, pp.474-479, Apr.1984.
- [13] E.R. Berlekamp, "The technology of error-correcting codes", *Proceedings of the IEEE*, vol.68, pp.570-572, May 1980.