

<논문> SAE NO. 943730

민감도 해석을 이용한 현가장치의 동역학적 최적설계

Optimal Design of Vehicle Suspension Systems Using Sensitivity Analysis

| | | |
|----|----|-----|
| 탁 | 태 | 오* |
| T. | O. | Tak |

ABSTRACT

A method for performing dynamic design sensitivity analysis of vehicle suspension systems which have three dimensional closed-loop kinematic structure is presented. A recursive form of equations of motion for a MacPherson suspension system is derived as basis for sensitivity analysis. By directly differentiating the equations of motion with respect to design variables, sensitivity equations are obtained. The direct differentiaion method is computationally more efficient in parallel processing environment and easy to generalize for the application of multibody dynamic sensitivity anlalysis. Based on the proposed sensitivity analysis, optimal design of a MacPherson suspension system is carried out taking unsprung mass, spring and damping coefficients as design variables.

주요기술용어 : Vehicle Dynamics(차량동력학), Multibody System(다물체계), Sensitivity Analysis(민감도해석), MacPherson Suspension(맥퍼슨 현가장치), Optimal Design(최적설계)

1. 서 론

컴퓨터 계산 능력의 급격한 향상과 다양한 해석 코드의 등장으로 인하여 동역학 시뮬레이션은 차량의 거동 예측을 위한 표준화된 기법으로 널리 사용되고 있다. 특히 다물체 동역학 해석기법은 차량의 실차 모델에서 가장 다루기 힘든 부분의 하나인 현가장치의 3차원적 기구학적 모델링을 가능케 함으로써 동역학 해석의 결과가 현가장치의 실제 설계에 반영되는데 크게 기여하고 있다. 현재까지의 동역학 시뮬레이션 기법은, 주어진

현가장치에 대한 성능의 예측에 주안점이 있었으나 성능을 향상시키기 위해서는 어떤 방향으로 설계를 개선해야 하는지에 대한 해답을 제공하지 못하였다. 설계자의 입장에서 주어진 설계변수들이 현가장치의 성능에 미치는 영향을 계량적으로 파악할 수 있는 수단이 있다면 이는 동역학 시뮬레이션 기법과 더불어 대단히 유용한 설계도구가 될 수 있을 것이다. 이러한 관점에서 설계변수의 변화가 성능에 어떤 영향을 미치는가를 규명하는 민감도 해석(sensitivity analysis)은 현가장치의 동역학적 설계에 유용하게 적용될 수

* 정회원, 강원대학교 기계공학과

있다. 본 논문에서는 3차원의 기구학적 구조를 가지는 현가장치에 민감도 해석 기법을 적용하여 설계변수들이 현가장치의 동역학적 성능에 미치는 영향을 평가하고 이를 이용하여 현가장치의 최적설계를 수행하고자 한다.

여러 개 링크들이 폐회로 형상의 3차원적 결합으로 이루어진 자동차의 현가장치는 대표적인 다물체 동역학계(multibody dynamic system)라 볼 수 있다. 다물체 동역학계에 대한 민감도 해석의 필요성은 일찍부터 널리 인식되어 왔으나, 3차원 기구학적 구조에 기인하는 다물체계의 고차의 비선형성으로 인하여 많은 연구가 이루어지지 못하였다.⁽¹⁻⁴⁾ 민감도 해석의 차량 동역학적 응용은 현가장치에서 기구학적 요소를 배제하고 순수한 동역학적 입장에서 접근하려는 제한적인 시도가 있었다.⁽⁵⁾

민감도 해석을 수행하기 위해서는 동역학 해석이 선행되어야 하는데, 동역학 해석 그 자체도 대단히 복잡하며 많은 계산량이 수반되므로 동역학 해석을 바탕으로 하는 민감도 해석은 동역학 해석에 비하여 그 복잡성과 계산량이 현저히 증폭된다. 즉, 민감도 해석을 위해서는 동역학 해석에 의해서 매 순간마다 변위, 속도, 가속도 등의 시스템 상태(system state)를 구한 후, 이를 바탕으로 민감도 방정식을 세워서 시스템 상태에 대한 민감도를 구하는 것이다. 구조 해석에서 흔히 적용되는 설계인자의 섭동(perturbation)이나 반복적 해석에 의한 유한차분법(finite difference method)은 다물체 동역학계에서는 적용이 어려운데, 그 이유는 설계변수의 증가에 비례하여 해석시간이 증가하고, 기구학적 비선형성으로 인하여 설계변수의 변경에 따라서 매번 초기 조건을 바꾸기가 용이하지 않기 때문이다.

민감도 해석을 위한 해석적 방법에는 크게 보아 두 가지가 있는데, 하나는 보조변수법(adjoint variable method)⁽²⁻⁴⁾이고 또 하나는 직접 미분법(direct differentiation method)^(6,7)이다. 보조변수법은 설계변수의 개수가 증가하여도 이에 비례하여 민감도 방정식의 크기가 늘어나지 않으므로 많은 수의 설계변수가 있는 경우에 유용하여 구조해석 분야에서 널리 사용되고 있다. 그러나

보조변수법의 문제점은 민감도 방정식을 초기시간부터 최종시간까지 뿐 아니라 최종시간 부터 초기시간까지의 수치 적분도 수행해야 하므로, 계산량이 증가되고, 적분구간이 2배로 증가하여 역방향 적분시에는 수치 오차의 누적으로 인하여 민감도의 정확도가 떨어지게 된다.⁽¹⁾ 반면 본 논문에서 적용할 직접 미분법은 각 설계변수에 대하여 운동방정식을 직접 미분하여 민감도 방정식을 구하는 방법이다. 직접 미분법에서는 민감도 방정식의 크기가 설계변수의 개수에 비례하여 증가하게 되나, 각 설계변수에 대한 민감도 방정식의 계산 과정이 상호 독립적으로 민감도 해석과정을 병렬처리(parallel processing)하게 되면 계산시간을 현저히 줄일 수 있다.

본 논문에서 다룰 현가장치는 그림 1에 나타난 바와 같이 전륜 구동형 독립현가장치에 널리 쓰이는 맥퍼슨(MacPherson) 방정식을 택했다. 여기서 사용될 민감도 해석의 방법론을 현가장치의 종류에 무관하게 일반적인 다물체계까지 확장이 가능하므로 맥퍼슨 현가장치 뿐 아니라 다른 종류의 현가장치에도 적용할 수 있다. 민감도 해석의 범위는 현가장치의 동역학적 거동에 주요점이 있으므로 차량 전체가 아니라 현가장치를 포함하는 차량의 1/4만을 고려하기로 한다. 차체에 해당하는 스프링질량(sprung mass), 타이어를 포함하는 휠어셈블리(wheel assembly), 콘트롤암(lower control arm)과 스트럿(strut)이 현가장치를 구성하며, 각 링크는 서로 조인트로 연결되어

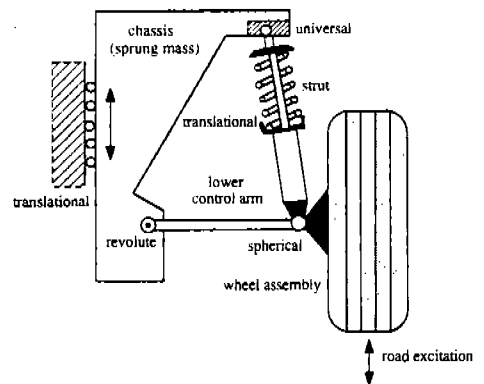


Fig.1 A MacPherson suspension system

폐회로 구조를 이루고 있다. 차체에 해당하는 스포링질량은 그라운드에 대하여 수직방향 운동을 하도록 병진조인트로 구속되었으며, 스트럿은 차체와 유니버설조인트, 스트럿과 휠어셈블리는 병진조인트, 콘트롤암과 휠어셈블리는 스페리칼조인트, 그리고 차체와 콘트롤암은 회전조인트로 연결되어 있다. 노면 가진에 대해 차체는 수직운동만 가능하므로 조향효과는 고려치 않았다. 휠어셈블리의 질량, 스프링 상수 그리고 감쇠계수를 설계변수로 선정하여 이들이 증차감, 주행안전성, 그리고 타이어와 바퀴사이의 작동공간(rattle space)에 미치는 영향을 민감도 해석을 통하여 계산하고 이를 이용하여 최적 설계를 수행할 것이다.

2. 최적설계

주어진 현가장치는 탄성 변형을 무시하고 기구학적 구속 조건에 의한 강체 운동을 하며 외부로부터 주어진 외력의 작용하에 있다고 가정한다. 이러한 현가장치는 k 개의 설계변수들을 포함하는 설계변수 벡터 $b = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T$ 와 n 개의 일반좌표(generalized coordinate) 벡터 $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ 로 표현되는데, 일반좌표는 현가장치에 부과된 구속조건으로 인하여 다음과 같은 미분·대수 방정식(Differential-Algebraic Equation : DAE)의 해가 된다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 M , Φ_q , λ 는 각각 질량행렬, 구속조건식의 자코비안(Jacobian), 그리고 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 나타내며, F 는 외력과 관련되며 γ 는 구속조건과 관계된 항이다. 설계변수는 현가장치의 물리적 특성, 예를 들면 각 링크의 질량, 스프링 상수, 감쇠계수 등을 나타내며 변경이 가능하다.

최적설계의 목적은 정해진 비용함수(cost function)를 주어진 구속조건을 만족시키면서 최소화하는 설계 변수를 구하는 것이다. 비용함수와 구

속식을 각각 ψ_0 와 ψ_j 라 하면 최적설계 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\text{Minimize } \psi_0(t; q, \dot{q}, \ddot{q}, \lambda, b)$$

$$\text{Subject to } \psi_j(t; q, \dot{q}, \ddot{q}, \lambda, b)$$

$$\begin{cases} = 0 & j=1, 2, \dots, n_e \\ \leq 0 & j=n_e+1, \dots, n_c \end{cases}$$

여기서 t 는 시간, q, \dot{q}, \ddot{q} 는 각각 일반좌표의 위치, 속도, 가속도, 그리고 λ 는 라그랑지 승수를 의미하며 n_e 는 동호로 표시된 구속식의 개수 이고 n_c 는 구속식의 총 개수 이다. 비용함수와 구속식은 시간, 위치, 속도, 가속도, 라그랑지 승수 그리고 설계변수의 함수로 표시할 수 있는데 라그랑지 승수가 포함된 이유는 라그랑지 승수가 조인트에서 반력을 표시할 수 있기 때문이다.

최적설계를 수행하기 위해서 비용함수 및 구속식의 설계변수에 대한 기울기, 즉 민감도를 구해야 하는데 비용함수 및 구속식의 설계변수에 대한 민감도의 일반적인 형식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d\psi}{db} = (\psi_0 + \psi_1 q + \psi_2 \dot{q} + \psi_3 \ddot{q} + \psi_4 \lambda) \quad (2)$$

여기서 아래 첨자는 해당항의 편미분을 표시한다. 식(2)을 사용하기 위해서는 식(1)의 운동방정식을 만족하는 q, \dot{q}, \ddot{q} 와 λ 의 b 에 대한 민감도, 즉 $q_b, \dot{q}_b, \ddot{q}_b, \lambda_b$ 를 구해야 한다. 따라서 최적설계를 하기 위해서는 우선 운동방정식을 풀어서 일반좌표의 변위, 속도, 가속도와 라그랑지 승수를 구한 후, 민감도 방정식을 세워서 일반좌표의 위치, 속도, 가속도와 라그랑지 승수에 대한 민감도 $q_b, \dot{q}_b, \ddot{q}_b, \lambda_b$ 를 구해야 한다.

2. 운동방정식

현가장치의 운동방정식을 세우기 위해서 먼저 각 링크의 상태를 표시할 수 있는 일반좌표(generalized coordinate)를 선정해야 하는데, 일반좌표로는 직각 좌표계(Cartesian coordinate)와 상대

좌표계(relative coordinate)가 많이 사용된다. 직각 좌표계를 적용하려면 각 링크를 구속되지 않은 상태로 가정하고 6개의 자유도를 준 후, 각 조인트의 기구학적 구속 조건에 해당하는 구속 조건식을 부과해야 한다.⁽⁹⁾ 이 방법은 운동방정식을 구하기는 간편하나 일반좌표와 구속조건식의 개수가 많아져서 운동방정식의 크기가 커지게 된다. 한편 상대 좌표계는 직각 좌표계에 비해 일반좌표의 개수가 줄어드는 이점이 있으나, 폐회로 상태에서는 직접적으로 적용이 불가능하므로 절단조인트(cut-joint)를 사용하여 개회로로 변환해야 한다.⁽¹⁰⁾ 상대 좌표계를 적용하면 좌표와 구속조건식의 개수가 모두 직각 좌표계를 사용할 때 보다 감소하여 효율적으로 운동방정식을 구할 수 있으므로 여기서는 상대 좌표계를 사용하기로 한다.

그림 2에는 다물체계에서 연속하는 임의의 두 링크 i와 j가 나타나 있다. 각 링크의 질량 중심에 국부 좌표계(local coordinate) $x_i-y_i-z_i$ 와 $x_j-y_j-z_j$ 가 있으며, 이들 원점의 위치는 X-Y-Z로 표시된 관성 좌표계로 부터 각각 r_i 와 r_j 로 표시된다. 두 링크 사이의 상대운동은 각각의 질량 중심으로부터 s_{ij} 와 s_{ji} 만큼 떨어진 조인트에서 발생하는데 조인트에서 상대운동은 운동축(axis of motion)을 따라서 회전이나 병진운동이 가능하며, 이러한 회전이나 병진량이 일반좌표가 된다.

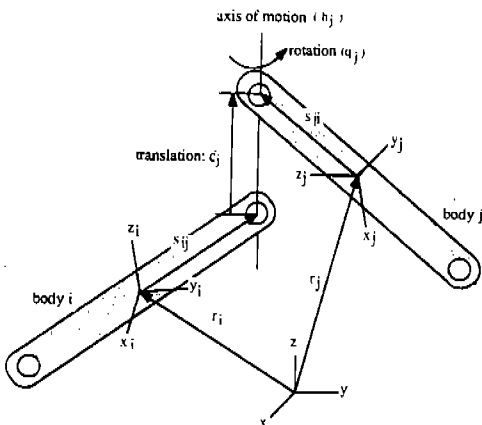


Fig.2 Two adjacent bodies

n개의 링크를 가진 다물체 시스템에 대한 변분 형태의 뉴턴-오일러(Newton-Euler) 운동방정식은

$$\sum_j \delta Z^T(M_i Y_i - Q_i) = 0 \quad (3)$$

와 같이 쓸 수 있는데, 여기서 링크 i의 변분벡터 $\delta Z_i = [\delta r_i^T, \delta \pi_i^T]^T$ 는 가상변위벡터 δr_i 와 가상회전벡터 $\delta \pi_i$ 로 구성되며, 가속도벡터 $Y_i = [\ddot{r}_i^T, \ddot{\omega}_i^T]^T$ 는 병진가속도와 회전가속도로 구성된다. 또한 6X6 질량행렬 M_i 와 6X1 일반 외력벡터 Q_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i I & 0 \\ 0 & A_i J_i A_i^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} f_i \\ n_i - \tilde{\omega}_i A_i J_i A_i^T \omega_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

위 식에서 I는 3X3 단위행렬이며, A_i 와 J_i 는 각각 링크 i의 국부 좌표계의 3X3 방향행렬(orientation matrix)와, 국부 좌표계에서 정의된 관성행렬(inertia matrix)을 표시하고, 연산자 tilde(~)는 벡터의 외대칭 행렬(skew-symmetric matrix)로의 변환을 나타내며, f_i 와 n_i 는 각각 링크에 작용하는 힘과 모멘트를 나타낸다.

그림 3에는 맥퍼슨 현가장치의 기구학적 구조가 나타나 있다. 폐회로 형태의 다물체 동역학 시스템을 다루기 위해서 절단조인트(cut-joint)를 이용하여 폐회로를 개회로 구조로 변환한다. 그림에서와 같이 원래의 폐회로 구조의 현가장치

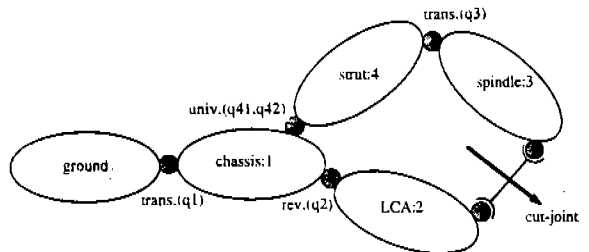


Fig.3 Kinematic structure of a MacPherson suspension system

에서 로우어콘트롤암과 휠어셈블리 사이의 스페리칼조인트를 절단조인트로 보고 이와 동가의 구속 조건식을 부과한다. 스페리칼조인트에 관한 구속 조건식은 로우어콘트롤암과 휠어셈블리의 연결 위치가 일치해야 한다는 사실로부터 구할 수 있다.

$$\Phi(q) = r_3 + s_{22} - r_2 - s_{23} = 0 \quad (6)$$

구속 조건식의 자코비안을 구하고 이를 라스란지 승수를 이용하여 운동방정식(7)에 부과하면

$$\begin{aligned} & \delta Z_1^T (M_1 \dot{Y}_1 - Q_1) + \delta Z_4^T (M_4 \dot{Y}_4 - Q_4) \\ & \delta Z_2^T (M_2 \dot{Y}_2 - Q_2 + \Phi_{Z_2}^T \lambda) + \delta Z_3^T (M_3 \dot{Y}_3 - Q_3 \\ & + \Phi_{Z_3}^T \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

이 되는데, 여기서 Φ_2 는 구속 조건식의 자코비안을 나타낸다.

식(7)에서 변분과 가속도는 직각 좌표계에서 정의되었으므로 이 운동방정식을 상대 좌표계로 바꾸기 위해서는 직각 좌표계에서 정의된 변분 및 가속도, 상대 좌표계에서 정의된 변분 및 가속도간의 관계가 결정되어야 한다. 다른 좌표계간의 변분 및 속도의 관계는 일반적으로 속도변환행렬(velocity transformation matrix)⁽⁹⁾에 의해서 표시된다. 직각 좌표계와 상대 좌표계간의 속도 변환행렬을 구하기 위해서 연속된 두 링크에서 안쪽 링크(inboard link)와 바깥쪽 링크(outboard link)간의 변분, 속도, 가속도에 대한 기구학적 관계를 알아야 한다. 본 논문에서는 계산상의 효율을 고려하여, 직각 좌표계로 표시된 변분, 가속도를 상대 좌표계로 직접 변환하지 않고 그 중간 단계인 상태변분(state variation), 상태속도(state velocity), 상태가속도(state acceleration)를 거치기로 한다. 이러한 중간 과정을 거치게 되면 운동방정식의 유도가 훨씬 간단해진다.⁽¹⁰⁾

상태변분 및 상태속도를 $\hat{(\wedge)}$ 를 붙여 표시하면 이들과 직각 좌표계에서 변분 및 속도와의 관계는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\delta \hat{Z}_i = T_i \delta Z_i \quad (8)$$

$$\hat{Y}_i = T_i Y_i \quad (9)$$

여기서 T_i 는 6×6 행렬로서

$$T_i = \begin{bmatrix} I & \tilde{r}_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10)$$

이 된다. 마찬가지로 직각 좌표계의 가속도와 상태가속도의 관계는

$$\hat{Y}_i = T_i Y_i + V_i \quad (11)$$

이며 V_i 는 다음과 같다.

$$V_i = \begin{bmatrix} \tilde{r}_i \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

이상과 같이 정의한 상태변분, 상태속도와 상대 좌표계에의 변분, 가속도는 선형적 관계를 가지게 된다.

$$\delta \hat{Z}_i = \delta \hat{Z}_{i-1} + B_i \delta q_i \quad (13)$$

$$\hat{Y}_i = \hat{Y}_{i-1} + B_i \dot{q}_i \quad (14)$$

여기서 δq_i 는 상대 좌표계의 변분이며, B_i 는 속도 변환행렬인데

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_i}{\partial q_i} + (\tilde{r}_i + \tilde{s}_{i(i-1)}) h_i \\ h_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

로 주어진다. 식(15)에서 h_i 는 조인트의 운동축, d_i 는 운동축을 따라 발생한 병진양을 나타낸다. 상태가속도와 상대좌표의 가속도에 대한 관계는 식(14)를 시간에 대해 미분함으로써 구해진다.

$$\hat{Y}_i = \hat{Y}_{i-1} + B_i \dot{q}_i + D_i \quad (16)$$

여기서 $D_i = B_i \dot{q}_i$ 이다.

직각 좌표계로 표시된 운동방정식(7)에서 변분과 가속도를 식(8)과 (11)을 이용하여 상태변분 및 가속도로 바꾸고, 이를 다시 식(13)과 (16)을 이용하면 상대 좌표계에서 정의된 변분 및 가속도로 바꾸면 상대좌표계에서의 운동방정식으로 전환된다. 여기서 각 상대 좌표의 변분 δq 는 임의의 값을 가질 수 있으므로 이의 계수를 0으로 두면 다음과 같은 상대 좌표계에서의 운동방정식이 구해진다.

$$B_1^T(\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4)B_1\ddot{q}_1 + B_1^T(\hat{M}_2 B_2\ddot{q}_2 + B_1^T(\hat{M}_3 B_3\ddot{q}_3 + B_1^T(\hat{M}_3 \hat{M}_4)B_4\ddot{q}_4) = B_2^T(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 + \hat{M}_4) - B_1^T \hat{M}_1 D_1 - B_1^T \hat{M}_2 D_1 + D_2) - B_1^T \hat{M}_3 (D_1 + D_3 + D_4) \quad (17)$$

$$B_2^T \hat{M}_2 B_2\ddot{q}_2 + B_2^T \hat{M}_2 B_2\ddot{q}_2 + B_2^T \Phi_{z2}^T \lambda = B_2 \hat{Q}_2 B_2^T \hat{M}_2 (D_1 + D_2) \quad (18)$$

$$B_3^T \hat{M}_3 B_3\ddot{q}_3 + B_3^T \hat{M}_3 B_3\ddot{q}_3 + B_3^T \hat{M}_3 B_4 \Phi_{z3} \lambda = B_3^T \hat{Q}_3 - B_3^T \hat{M}_3 (D_1 + D_3 + D_4) \quad (19)$$

$$B_4^T(\hat{M}_3 + \hat{M}_4)B_4\ddot{q}_4 + B_4^T \hat{M}_3 B_3\ddot{q}_3 + B_4^T(\hat{M}_3 + \hat{M}_4)B_4\ddot{q}_4 + B_4^T \Phi_{z4}^T \lambda = B_4^T(\hat{G}_3 + \hat{G}_4) - B_4^T \hat{M}_4 (D_1 + D_4) + B_4^T \hat{M}_3 (D_1 + D_3 + D_4) \quad (20)$$

새로운 질량행렬 \hat{M} 과 일반 외력벡터 \hat{Q} 는 각각

$$\hat{M}_i = \begin{bmatrix} m_i I & -m_i \tilde{r}_i \\ m_i \tilde{r}_i & -m_i \tilde{r}_i \tilde{r}_i^T + A_i J_i A_i^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\hat{Q}_i = \begin{bmatrix} f_i + m_i \tilde{r}_i \omega_i \\ n_i + \tilde{r}_i (f_i + m_i \tilde{r}_i \omega_i - \omega_i A_i J_i A_i^T \omega_i) \end{bmatrix} \quad (22)$$

으로 주어진다. 식(17-20)에서는 방정식의 개수보다 미지수의 개수가 많기 때문에 운동방정식이 풀리지 않는다. 따라서 식(6)의 절단 조인트에 대한 구속조건식을 시간에 대해 2차 미분하여 이를 운동방정식에 포함시키도록 한다.

$$\Phi_{z2}^T \ddot{q}_2 + \Phi_{z3}^T \ddot{q}_3 + \Phi_{z4}^T \ddot{q}_4 = \gamma \quad (23)$$

식(23)에서 $\Phi_{z\alpha} = \Phi_{z\alpha}^T B_\alpha$ 는 구속방정식의 상대 좌표계에 대한 자코비안이며, γ 는 구속방정식을 2차 미분할 때 가속도를 포함하지 않는 항들의 집합으로서 스페리칼 조인트의 경우에는

$$\gamma = (\bar{r}_3 + \bar{s}_{32})\omega_3 + (\bar{r}_2 + \bar{s}_{23})\omega_2 - \hat{\Phi}_{z2} (D_1 + D_2) - \hat{\Phi}_{z3} (D_1 + D_2 + D_4) \quad (24)$$

로 주어진다. 식(17-20)과 식(23)이 현가장치에 대한 운동방정식을 구성하는데 이를 단순화하여 행렬 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (25)$$

3. 민감도 방정식

현가장치에 대한 운동방정식을 구했으므로 운동방정식을 설계변수에 대하여 미분하여 민감도 방정식을 구해야 한다. 서론에서 언급한 대로 고려하는 설계변수는 휠어셈블리의 질량, 스프링상수 그리고 감쇠 계수이다. 일반적으로 설계변수를 대별해 보면 질량, 관성, 스프링이나 감쇠 계수등과 같은 동역학적(kinetic) 설계변수와 링크의 길이, 조인트의 위치, 운동축의 방향 등과 같은 기구학적(kinematic) 설계변수로 구분할 수 있는데, 여기서 다루고자 하는 설계변수들은 모두 동역학적 설계변수이다. b 를 임의의 설계변수라 하고 운동방정식(25)을 b 에 대해서 미분하면 민감도 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b - M\ddot{q} - (\Phi_q^T)_b \lambda \\ \gamma_b - (\Phi_q)_b \ddot{q} \end{bmatrix} \quad (26)$$

위 식에서 동역학적 설계변수가 포함된 항은 M과 F이므로, 나머지 항들에 대한 b의 미분은 0이 되므로 민감도 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b - M\ddot{q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

따라서 민감도 방정식을 구하기 위해서 M과 F에 대한 설계변수의 미분을 구해야 한다. 식(17-20)까지의 운동방정식을 검토해 보면 M과 F에서 동역학적 설계변수가 포함된 항은 식(21)과 (22)에 주어진 \hat{M} 과 \hat{Q} 임을 알 수 있다. \hat{M} 에 대한 b의 미분은

$$\hat{M}_{ib} = \begin{bmatrix} m_{ib} \tilde{r}_i & -m_{ib} \tilde{r}_i \\ m_{ib} \tilde{r}_i & -m_{ib} \tilde{r}_i \tilde{r}_i + A_i J_i A_i^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

이며 m_{ib} 는 아래와 같이 계산된다.

$$m_{ib} = \frac{\partial m_i}{\partial b} = \begin{cases} 1 & \text{if } b = m_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

마찬가지로 \hat{Q} 에 대한 b의 미분은

$$\hat{Q}_{ib} = \begin{bmatrix} f_{ib} + m_{ib} \tilde{r}_i \omega_i \\ n_{ib} + \tilde{r}_i (f_{ib} + m_{ib} \tilde{r}_i \omega_i - \omega_i A_i J_i A_i^T \omega_i) \end{bmatrix} \quad (30)$$

와 같이 쓸 수 있는데 \hat{Q}_{ib} 을 계산하기 위해서 각 링크에 작용하는 외력벡터의 설계변수에 대한 미분 f_{ib} 와 모멘트벡터의 설계변수에 대한 미분 n_{ib} 를 계산하여야 한다. 설계변수와 관련된 외력은 차체와 스트럿 사이의 스프링과 댐퍼에 의해서 발생하므로, 이들에 의해서 발생하는 힘과 모멘트와 설계변수의 관계를 살펴보기로 한다.

그림 4에는 임의의 두 링크 i와 j가 스프링과 댐퍼가 연결된 것을 보여주고 있다. 각 링크의 질량중심에서 스프링과 댐퍼의 연결점 p_i 와 p_j 의 위치는 각각 s_i^p 와 s_j^p 로 주어져 있다. 이 때 두 작용점 p_i 와 p_j 사이의 거리 d_{ij} 는

$$d_{ij} = r_j + s_j^p - r_i - s_i^p \quad (31)$$

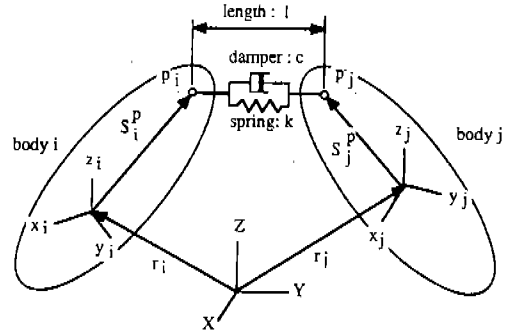


Fig.4 A Spring-damper system

와 같으므로 스프링과 댐퍼의 길이 l 은

$$l^2 = d_{ij}^T d_{ij} \quad (32)$$

이다. 위 식을 시간에 대해 미분하면 길이 l 의 시간에 대한 변화량을 구할 수 있다.

$$\dot{l} = (d_{ij}^T)^T (\dot{r}_j - \tilde{s}_j^p \omega_j - \dot{r}_i - \tilde{s}_i^p \omega_i) \quad (33)$$

식(32)와 (33)에서 l 과 \dot{l} 이 결정되면 스프링상수 k 와 감쇠 계수 c 를 가진 스프링-댐퍼에 의한 힘의 크기 p 는

$$p = k(l - l_0) + c \dot{l} \quad (34)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 l_0 는 스프링의 변형되지 않은 길이를 나타낸다. 힘 p 로 인하여 링크 i 에 작용하는 힘과 모멘트를 상대 좌표계에서 표시하면

$$\begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} = \frac{p}{l} \begin{bmatrix} d_{ij} \\ \tilde{s}_i^p d_{ij} \end{bmatrix} \quad (35)$$

이 된다. 식(35)를 설계변수 b 에 대해 미분하여 f_{ib} 와 n_{ib} 를 구하는데, 위 식에서 설계변수가 포함된 항은 힘 p 인 점을 고려하면

$$\begin{bmatrix} f_{ib} \\ n_{ib} \end{bmatrix} = \frac{p_b}{l} \begin{bmatrix} d_{ij} \\ \tilde{s}_i^p d_{ij} \end{bmatrix} \quad (36)$$

이 된다. p_b 는 식(34)를 b 에 대해 미분하면 다음과 같이 구해진다.

$$p_b = k_b(l - l_0) + C_b \dot{l} \quad (37)$$

k_b 와 c_b 는 b 가 k 나 c 인 경우만 1이며 그렇지 않으면 0이다.

4. 예 제

현가장치의 동역학적 최적설계의 목표는 승차감과 주행안전성을 향상시키고 스프링과 댐퍼의 작동공간을 최대한 확보하는 것이다. 최적설계를 위해서 승차감, 주행안전성, 작동공간과 같은 추상적 개념을 성능지수화해야 한다. 먼저 승차감에 대한 성능지수로서 차체 가속도의 시간평균 제곱근값(time averaged root mean squared value)을 취한다.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \dot{z}_c^2 dt} \quad (38)$$

여기서 \dot{z}_c 는 차체의 수직 가속도를 나타내며, T 는 시뮬레이션 시간을 나타내는데 1초로 주어졌다. 주행안전성의 지표로서 타이어의 노면 접지력이 많이 사용되는데, 노면 접지력은 노면과 타이어 중심간의 거리에 비례하므로 주행안전성에 대한 성능지수를 다음과 같이 정한다.

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (z_n - z_g)^2 dt} \quad (39)$$

위 식에서 z_n 와 z_g 는 각각 바퀴의 중심과 노면의 높이를 나타낸다. ψ_2 의 값이 작을수록 접지력의 변화가 작으므로 주행안전성이 향상된다. 또한 바퀴와 차체간의 간섭을 방지하고 스프링과 댐퍼의 충분한 작동공간을 확보하기 위해서 현가장치의 작동공간에 관한 제한 조건을 선정하였다.

$$\psi_3 = z_a - \theta_1 \geq 0 \quad (40)$$

z_a 는 차체와 타이어 간의 거리를 나타내며 θ_1 은 z_a 의 허용가능한 최소 값이며 0.18m로 주어졌다.

설계변수는 휠어셈블리 질량, 스프링 상수 그리고 감쇠계수이며 이들의 초기값은 각각 40.3kg, 16000N-m, 1000N-s/m이다. 또한 설계변수의 변화가능 범위를 다음과 같이 제한하였다.

$$30 \leq m \leq 50$$

$$14000 \leq k \leq 18000 \quad (41)$$

$$800 \leq c \leq 1200$$

표1에는 현가장치의 질량 및 관성에 관한 데이터가 주어져 있다. 노면에 의한 가진은 진폭이 2cm이고 주파수가 15Hz인 주기함수로 주어졌다.

$$z_g = 0.02 \sin(2\pi \times 15t) \quad (42)$$

그림 5는 식(42)에 의한 가진이 주어진 경우 차체의 수직 가속도를 보여주고 있으며 그림5-8은 차체 수직 가속도의 각 설계변수들에 대한 민감도가 나타나 있다. 우선 이들 민감도의 정확성을 확인하기 위하여 유한 차분법에 의하여 계산된 민감도와 비교하기로 한다.

$$\ddot{q}_b \approx \frac{\ddot{q}(b + \delta b) - \ddot{q}(b)}{\delta b} \quad (43)$$

그림 9에는 두 값이 비교되어 있는데 설계변수의 1% 변화에 대해서 두 값이 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

성능지수 ψ_1 과 ψ_2 의 세 설계변수인 질량, 스프링 상수, 감쇠 계수에 대한 민감도는 다음과 같이 구해졌다.

$$\psi_{1b} = (-6.0423E-03, -2.1070E-06, 2.0709E-4)$$

$$\psi_{2b} = (-1.2310E-04, -9.8000E-08, 2.3903E-6)$$

성능지수에 대한 민감도를 검증하기 위해서 설계변수들을 1%, 2.5% 그리고 5%씩 변화시켜

유한차분법에 의한 민감도와 비교하였다. 표 2와 3에서 볼 수 있는 바와 같이 설계변수의 변화량이 작아질수록 두 결과는 수렴하고 있음을 보여주고 있다.

두 성능지수 ψ_1 과 ψ_2 에 각각 비중인자 w_1 과

w_2 를 곱하고 이를 합하여 최적설계를 위한 비용함수(cost function)로 설정하였다.

$$\psi = w_1 \psi_1 + w_2 \psi_2 \quad (44)$$

ψ_1 과 ψ_2 값의 크기가 비슷하고, 승차감과 주행

Table 1 Mass and inertia for each body

| body | mass | | inertia(Kg-m ²) | | | | |
|------------|-------------------|----------|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | $\frac{1}{4}$ Kg% | I_{xx} | I_{yy} | I_{zz} | I_{xy} | I_{yz} | I_{zx} |
| chassis(1) | 449.0 | 100.0 | 555.0 | 650.0 | 7.5 | 4.0 | 0.5 |
| arm(2) | 3.0 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| wheel(3) | 43.3 | 0.72 | 1.14 | 0.72 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| strut(5) | 2.0 | 0.009 | 0.009 | 0.009 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Table 2 Variation of performance measure ψ_1 with 1.0, 2.5, and 5.0% change of each design parameter

| δ_b | ψ_p^* | $\Delta\psi^*$ | $\delta\psi^*$ | $(\Delta\psi/\delta\psi)^*100$ |
|------------------------|-------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| $\delta\beta_1(1.0\%)$ | 2.672089e-1 | -2.575512e-3 | -2.616267e-3 | 98.68 |
| $\delta\beta_2(1.0\%)$ | 2.694596e-1 | -3.248370e-4 | -3.370762e-4 | 96.30 |
| $\delta\beta_3(1.0\%)$ | 2.718507e-1 | -2.066273e-3 | -2.070865e-3 | 99.94 |
| $\delta\beta_1(2.5\%)$ | 2.634278e-1 | -6.356638e-3 | -6.525483e-3 | 97.41 |
| $\delta\beta_2(2.5\%)$ | 2.690883e-1 | -6.961378e-4 | -8.426892e-4 | 82.60 |
| $\delta\beta_3(2.5\%)$ | 2.749369e-1 | -5.152412e-3 | -5.177164e-3 | 99.52 |
| $\delta\beta_1(5.0\%)$ | 2.573460e-1 | -1.243854e-2 | -1.305094e-2 | 95.30 |
| $\delta\beta_2(5.0\%)$ | 2.687759e-1 | -1.008585e-3 | -1.685378e-3 | 59.84 |
| $\delta\beta_3(5.0\%)$ | 2.800444e-1 | -1.026040e-2 | -1.035433e-2 | 99.09 |

* $\psi_o = \psi(b)$, $\psi_p = \psi(b + \delta b)$, $\Delta\psi = \psi_p - \psi_o$, $\delta\psi = (d\psi/db)\delta b$

Table 3 Variation of performance measure ψ_2 with 1.0, 2.5, and 5.0% change of each design parameter

| δ_b | ψ_p | $\Delta\psi$ | $\delta\psi$ | $(\Delta\psi/\delta\psi)^*100$ |
|------------------------|-------------|--------------|--------------|--------------------------------|
| $\delta\beta_1(1.0\%)$ | 2.916538e-1 | -5.386738e-5 | -5.330221e-5 | 101.06 |
| $\delta\beta_2(1.0\%)$ | 2.917236e-1 | -1.587597e-5 | -1.560434e-5 | 101.73 |
| $\delta\beta_3(1.0\%)$ | 2.916839e-1 | -2.386895e-5 | -2.390276e-5 | 99.86 |
| $\delta\beta_1(2.5\%)$ | 2.915730e-1 | -1.347278e-4 | -1.332559e-4 | 101.09 |
| $\delta\beta_2(2.5\%)$ | 2.917460e-1 | -3.825956e-5 | -3.426892e-5 | 98.07 |
| $\delta\beta_3(2.5\%)$ | 2.916482e-1 | -5.958478e-5 | -5.97555 e-5 | 99.72 |
| $\delta\beta_1(5.0\%)$ | 2.914361e-1 | -2.715613e-4 | -2.665187e-4 | 101.89 |
| $\delta\beta_2(5.0\%)$ | 2.917795e-1 | -7.177974e-5 | -7.802351e-5 | 92.02 |
| $\delta\beta_3(5.0\%)$ | 2.915888e-1 | -1.188922e-4 | -1.195098e-4 | 99.48 |

안전성에 동일한 비중을 둔다는 의미에서 $w_1 = w_2$ 로 두었다. 식(40)의 차체와 바퀴의 공간에 관한 구속 조건식과 식(41)의 설계변수들의 범위에 관한 구속식에 대하여 ADS^(TM) 소프트웨어를 사용하여 최적설계를 수행한 결과 다음과 같은 최적값을 구하였다.

$$m = 50.0 \text{ Kg}$$

$$k = 15732.0 \text{ N/m} \quad (43)$$

$$c = 802.1 \text{ N-s/m}$$

그림 10-13에는 비용함수와 각 설계변수의 수렴과정이 나타나 있다. 한편 그림 14에는 민감도

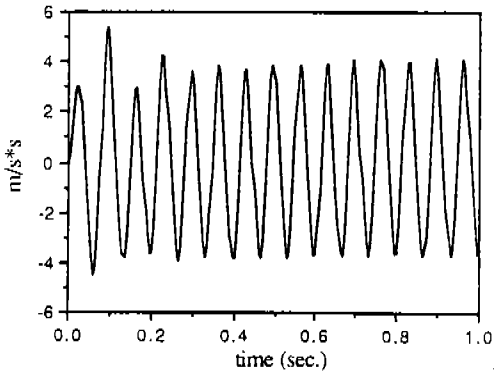


Fig.5 Vertical acceleration of chassis

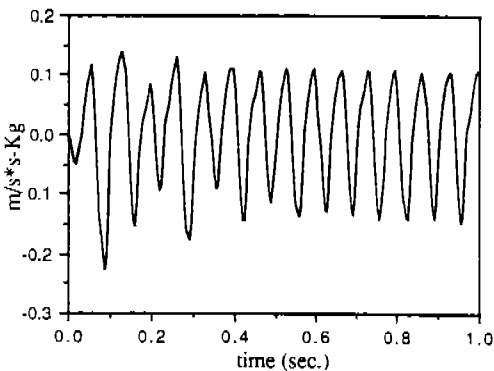


Fig.6 Sensitivity of vertical acceleration of chassis with respect to wheel assembly mass

해석을 Alliant FX/8을 이용하여 병렬처리(parallel processing) 했을 때의 소요시간을 보여주고 있다. 소요시간의 기준은 한 시점에서 운동방정식과 민감도 방정식을 푸는데 걸리는 시간인데, 각 설계변수에 대한 민감도 해석은 독립적인 계산 과정이므로 프로세서 3개를 이용할 때 까지 병렬처리의 효과로 인하여 계산시간이 감소함을 알 수 있다.

5. 검토 및 결론

본 논문에서는 3차원 기구학적 구조를 가지는 현가장치에 대한 동역학적 민감도 해석과 이를 이용한 최적설계를 수행하였다. 전문구동형에 많이 쓰이는 맥퍼선 형식의 현가장치에 대해서

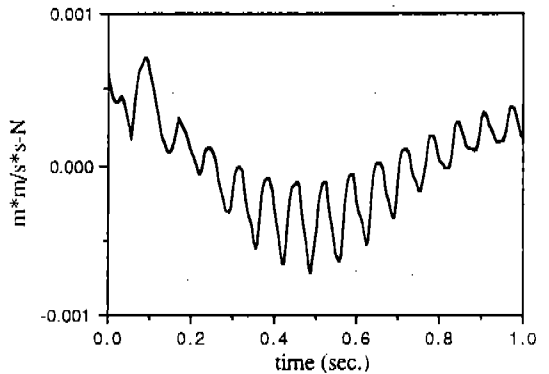


Fig.7 Sensitivity of vertical acceleration of chassis with respect to spring coefficient

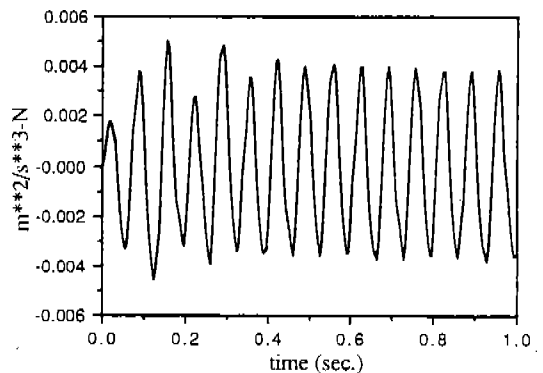


Fig.8 Sensitivity of vertical acceleration of chassis with respect to damping coefficient

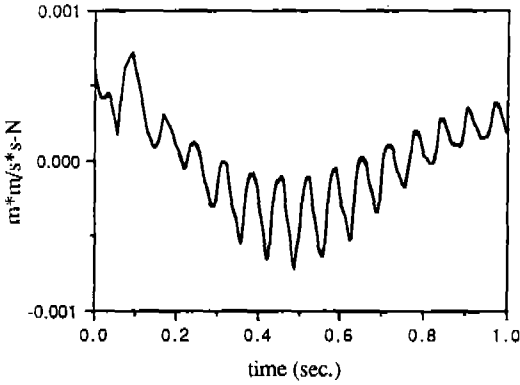


Fig.9 Comparison of sensitivities by the proposed method and by the finite difference method with 1% perturbation of spring coefficient

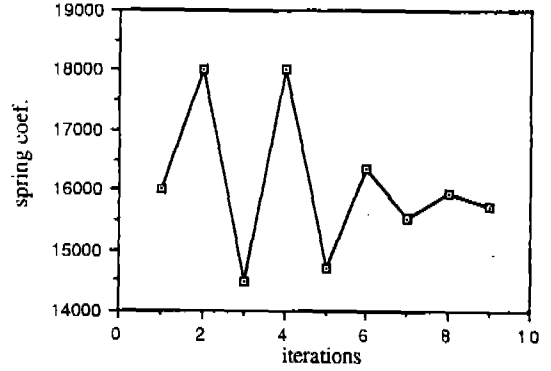


Fig.12 Convergence history of design parameter (spring coefficient)

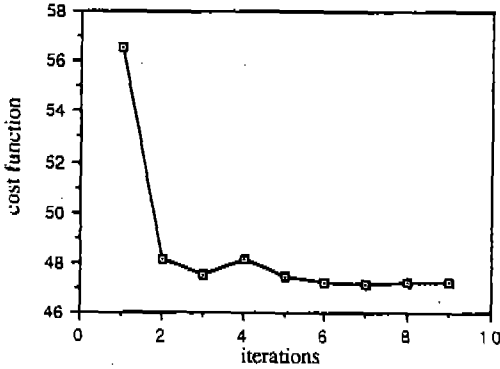


Fig.10 Convergence history of cost function

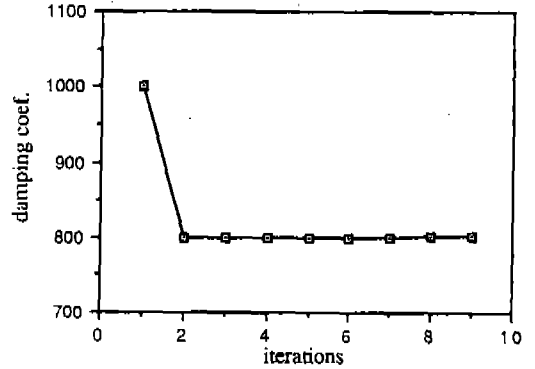


Fig.13 Convergence history of design parameter (damping coefficient)

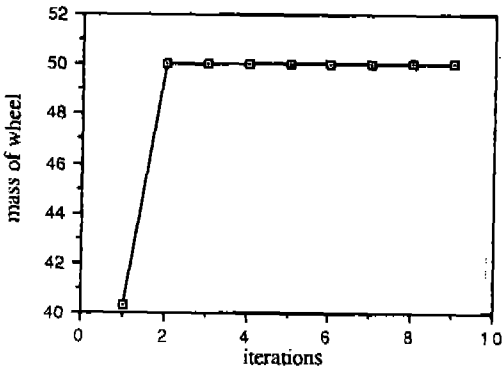


Fig.11 Convergence history of design parameter (spindel mass)

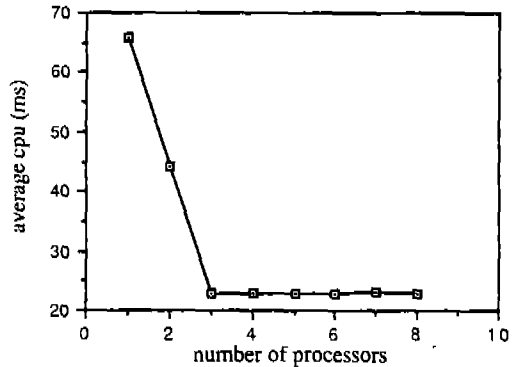


Fig.14 Average cpu for a function evaluation of sensitivity analysis

민감도 해석을 적용하였는데 해석의 방법론이 특정 현가장치의 기구학적 구조에 제한받지 않으므로 다른 형식의 현가장치에도 적용이 가능하다. 운동방정식을 직접 미분하여 민감도 방정식을 구했는데 이 방법의 장점은 일반화가 용이하고 각 설계변수에 대한 민감도 계산과정이 독립적이므로 병렬처리용 컴퓨터를 이용하면 계산 시간을 현저히 줄일 수 있는 이점이 있다. 앞으로의 연구과제는 동역학적 설계변수 뿐 아니라 기구학적 설계변수에 대해서도 민감도 해석이 가능하도록 해석의 영역이 확대되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Tak, T.O., and Kim, S.S., "Design Sensitivity Analysis of Multibody Dynamic Systems for Parallel Processing", Proceedings of 1989 ASME Design Automation Conference.
2. Haug, E.J., Wehage, R.A. and Barman, N.C., "Design Sensitivity Analysis of Planar Mechanisms and Machine Dynamics", Journal of Mechanical Design, Vol.103, No.3, 1981, pp.560-570.
3. Sohoni, V., and Haug, E.J., "A State Space Method for Kinematic Optimization of Mechanisms", Journal of Mechanical Design, Vol.104, January 1982, pp.101-107.
4. Sohoni, V., and Haug, E.J., "A State Space Technique for Optimal Design of Mechanisms", Journal of Mechanical Design, Vol.104, October 1982, pp.792-798.
5. Haug, E.J., Sohoni, V.N., Kim, S.S., and Seong, Hwal G., "Vehicle Suspension Dynamic Optimization", Proceedings of International Conference on Modern Vehicle Design Analysis", London, June 1983.
6. Chang, C.D., "Dynamic Analysis of Optimal Design of Mechanical Systems with Constraint Violation Stabilization Method", Ph.D. Thesis, University of Iowa.
7. Neuman, C.P., and Murray, J.J., "Linearization and Sensitivity Functions of Dynamic Robot Medels", IEEE Transaction on System, Man, and Cybernetics, Vol., SMC-14, 1984, pp.805-818.
8. Haug, E.J., and MacCullough, M.K., "A Variational-Vector Calculus Approach to Machine Dynamics", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.108, No.1, 1986, pp.25-30.
9. Kim, S.S., and Vanderploeg, M.J., "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations", ASME paper No.85-DET-93, 1985.
10. Bae, D.S., and Haug, E.J., "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Part II-Closed Loop Systems", Mechanics of Structures and Machines, Vol.15, No.4, 1987.
11. COPES/ADS A Fortran Control Program for Engineering Synthesis Using the ADS Optimization Program, June 1985, Engineering Design Optimization Inc.