

# 전자파 산란문제를 해결하기 위한 혼합 유한요소법에 관한 연구

## (A Study on Hybrid Finite Element Method for Solving Electromagnetic Wave Scattering)

朴 東 熙\*, 姜 燦 錫\*\*, 安 重 守\*\*

(Dong Hee Park\*, Chan Seok Kang\*\*, Jung Soo Ahn\*\*)

### 요 약

다층유전체주로 부터 전자장산란 문제를 해석하기 위하여 혼합유한요소방법을 적용하였다. 실질적으로 편미분방정식의 해가 주어지는 무경계화된 영역은 국소경계영역으로 나누어지게 되고, 나머지 무경계영역은 경계적분방정식으로 나타내게 된다. 나누어진 국소표면은 원천, 비균질성과 비등방성을 포함하도록 정의한다. 따라서, 정의된 국소경계영역에서 미분법이 사용된다. 또한 나머지 경계영역에서 경계적분방정식이 단지 자유공간 Green 함수를 사용하도록 수식화 될 것이다.

그 결과로서, 국소경계는 경계조건을 갖는 경계값 문제로 나타나게 되고, 유한요소법으로 해석된다. 제시된 방법의 장점은 전자장 산란연구에 보다 간략하고, 효율적이다. 결과의 타당성은 다른방법(경계요소법)과 비교하여 입증하였다. 확장된 수치해석의 예로서 임의의 단면을 갖는 손실유전체주의 산란장을 해석하여 제시했다.

### ABSTRACT

A Hybrid Finite Element Method(HFEM) is applied to solve the electromagnetic scattering from multi-layered dielectric cylinders.

An unbounded region is divided into local boundary regions where a practical differential equation solution is obtained, with the remaining unbounded region represented by a boundary integral equation. If sources, media inhomogeneities, and anisotropies are local, a surface may be defined to enclose them. Therefore the integral region so defined is bounded, and differential techniques may be used there. Also, in the remaining unbounded region a boundary integral equation may be formulated using only a simple free-space Green's function.

Therefore, The local boundary is represented by a boundary-value problem with boundary conditions and solved by the finite element method. The advantage of the proposed method is simple and

\*충주공업전문대학 전자통신과

\*\*충주공업전문대학 전자과

efficient in the work of electromagnetic scattering. The validity of the results have been verified by comparing results of other method(boundary element method). Examples has been presented to calculate the scattered fields of lossy dielectric cylinders of arbitrary cross section.

## I. 서 론

유전체나 자성체 물질로 씌워진 다층 원통주에서의 전자계 산란에 관한 연구는 수치적 방법에 의해 오랜동안 집중적으로 연구되어져 왔다.

이 분야에 있어서 많은 연구가들은 다양한 수치해석 방법을 동원하여 전자계 산란에 관한 연구를 수행하고 있지만 형체가 복잡하거나 유전체가 비균질하고 비등방성일 경우, 특히 해석 영역이 무경계를 이루고 있을 때는 경계조건에 따른 제약으로 많은 어려움을 겪고 있다. 따라서 전기나 전자공학 분야에 도입된 유한요소법은 수치 해석법상 복잡한 물체의 형상을 해석하거나 제한된 영역에서 물질의 특성을 해석하는데 강력한 방법으로 알려졌으며, McDonald와 Wexler<sup>(1)</sup> 그리고 Chang과 Mei<sup>(2)</sup>에 의해 제시된 유한요소법을 응용한 HFEM(Hybrid Finite Element Method)는 전자계의 무경계장 문제를 해석하는데 보다 진보적이고 향상된 수치 해석 방법으로 주목을 받았다.

이 방법은 임의의 형태를 갖는 산란체를 가상경계로 둘러 싸므로써 내부영역은 유한요소법으로 해석하게 되며, 외부영역은 자유공간을 포함한 고유함수의 전개식이나 자유공간에서의 Green 함수를 포함하는 적분식으로 나타내었다. 따라서 전체적인 해석으로는 가상경계의 내부와 외부분제를 결합시키게 된다. 결과적으로 산란체를 둘러싼 임의의 가상경계를 이용하는 방법은 유한요소해로 요구된 영역을 축소할 수 있고, 산란해석에 요구된 결과 행렬식을 간략화할 수 있게 되므로 전체 계산시간을 축소할 수 있게 된다.

최근 JIN과 LIEPA<sup>(3)</sup>는 다소 간략화된 수식을 기본으로한 해석방법을 제안했고, 유전체 또는 자성체 물질로 씌워진 원통주로 부터의 산란현상과 같은 현재의 관심사 문제를 해석하였다. 여기서 두개의 가상경계중 하나는 내부와 외부영역을 분리하기 위해 사용하였고, 나머지 경계는 Green 함수 적분에서 부닥치게 되는 특이점 문제를 제거하기 위하여 사용되었다. 또한 이들 가상경계는 모두 외부영역에 존재한다.

이후 JIN과 LIEPA<sup>(4)</sup>는 두개의 가상경계중 하나만

을 택하여 본질적으로 계산적 효율성을 증진시키고, 그리고 방법의 능률을 향상시켰다.

앞서 언급된 여러 방법들은 해석상의 편의성과 다양성을 위해 진보적이였다. 여기서 본 논문은 유한요소법과 경계요소법을 혼합하기 위하여 하나의 가상경계로 총전자계에 대한 입사전자장과 산란전자장을 분리하는 경계조건을 추가하게 된다. 따라서 이전의 방법에 비교하여 다소 간략화된 수식에 기본을 둔 해석방법을 제안할 수 있었고, E분극에 대한 유전체 물질로 씌워진 다층 원통주로 부터 산란장 문제들에 적용한다. 결과적으로 수치해석을 위한 수식화에 있어서는 산란체를 포함한 모든 영역을 독립적으로 영역화하여 가상경계를 포함한 내부영역은 유한요소법, 나머지 영역에서는 순수 경계요소법, 그리고 산란체 표면에서는 총 전자계를 이용한 경계조건을 적용하게 된다. 본 논문의 타당성과 적합성을 입증하기 위하여 다층구조 산란체에 대한 순수 경계요소법의 해와 본 연산법의 해를 비교 검토하였다.

## II. 본 론

일반적으로 해석적 편의성에 따라 입사파는 E분극을 고려했으며, 원통주의 축에 대해서 수직방향으로 입사하고 시간규정  $e^{j\omega t}$ 를 가정한다. 또한 유전체주에 의한 다층구조를 갖는 유전체를  $n+1$  층으로 확장해석할 수 있는 무경계장 문제가 되도록 고려한 2층의 유전체주를 다룬다. 여기서  $n$ 는 선택적으로 유전체주의 층수를 나타내며, 해석의 기본으로 내부영역은 2층인 영역 1과 영역 2로 분리한다. 또한 영역 3은 전자파 산란 특성을 해석하게 되는 자유공간영역을 나타낸다. 내부영역의 성질은 Z축 방향으로 균일한 매질문제에 대한 무경계장을 고려한다.

유한요소법으로 다루어진 영역을 최소로 하기 위하여  $\Gamma_A$ 와  $\Gamma_{cn+1}$  사이에는 단 한층만의 삼각형 요소를 택한다. 따라서  $\Gamma_A$ 와  $\Gamma_{cn}$  사이에 정의된 영역에서는 유한요소법을 사용하게 되고,  $\Gamma_{cn+1}$  과  $\Gamma_\infty$  사이의 영역에서는 순수 경계 적분방정식을 사용하게 된다.

유한요소법으로 해석될 영역에서의 범함수식은

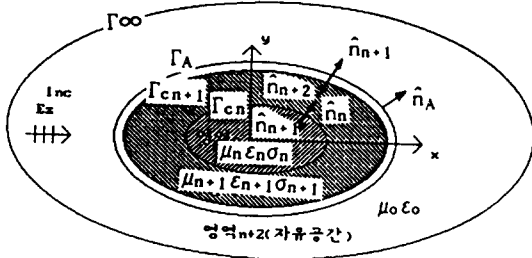


그림 1. 2층 유전체로 구성된 2차원 영역( $n=1, 2, \dots$ )  
 $\epsilon_n, \mu_n, \sigma_n$  :  $n$  영역에서의 유전률, 투자률, 그리고 전도도  
 $n_n$  :  $n$  영역에서의 외향 단위법선 벡터  
 $\Gamma_A$  : 유전체주를 포함하는 가상경계  
 $\Gamma_{cn}$  :  $n$  영역에서의 경계

다음과 같다 (3)(4).

$$I[\phi] = \iint_{R_1} \left\{ \frac{1}{\mu_{rn}} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - k_0^2 \epsilon_{rn} \phi \cdot \phi \right\} ds - \frac{1}{\mu_{rn}} \int_{\Gamma_A} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n_A} dl \quad (1)$$

여기서  $k_0 = 2\pi/\lambda$ 이고,  $\lambda$ 는 자유공간의 파장이다. 또한 영역  $R_1$ 는 가상경계를 포함한 내부의 전체영역을 나타내며, 가상경계상의 수직단위벡터  $\hat{n}_A$ 는 밖으로 향하도록 하였다.

식(1)에서 영역  $R_1$ 에 대한 적분방정식은 유한요소법으로 해석될 수 있으나 경계적분항은 많은 경계조건 규약을 갖게 된다. 따라서 경계적분항을 포함하고 있는 유한요소 해석법은 확실한 경계조건을 적용해야만 된다. 그러므로 이와 같은 난제를 극복하기 위하여 경계적분방정식이 도입되게 된다.

영역  $R_1$ 는 유한요소법의 요소분할 형식에 따라  $M$ 개의 삼각형요소로 분할하고, 각 요소에 선형보간함수를 이용한다면 개개의 요소들이 물리적 특성을 가지므로 이들을 합하여 구성된 방정식이 영역전체를 포함하므로 주어진 미분방정식과 같은 값을 갖는 해가 된다. 영역  $R_1$ 를 삼각형 요소로 분할한 선형보간함수로서 내부장은 다음과 같이 나타낸다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \phi_i^e \quad (2)$$

식(2)에서 위첨자  $e$ 는 영역  $R_1$ 에 포함된 대표요소를 의미하며,  $N_i^e(x, y)$  ( $i=1, 2, 3$ )은  $e$  번째 요소의 보간함수를 의미한다. 따라서  $\phi_i^e$ 는  $e$  번째 요소의  $i$  번째 절점에서 미지의 장을 의미한다.

하나의 요소에 3개의 절점을 갖는 삼각형 요소로

서, 영역  $R_1$ 내의 대표요소에 대한 범함수식 표현은 다음과 같이 다변수함수로 나타낸다.

$$I^e = I^e[\phi_{1e}, \phi_{2e}, \phi_{3e}] \quad (3)$$

또한 범함수가 전체  $\ell$ 개의 각 요소절점에서 동일한 형태의 식으로 성립한다고 보아, 이들의 합으로서 전체 해석영역의 범함수로 구성된 요소들의 절점 표현을 나타낸다면 다음과 같다.

$$I^e = I^e[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_\ell] \quad (4)$$

식(4)에서 첨자  $\ell$ 은 전체 계절점의 총수를 나타낸다.

유한요소법의 정식화 과정으로서 범함수식을 최소화 하는 조건으로부터 개개의 절점들 사이의 관계를 동일한 원칙아래 순서적인 계절점 방정식을 얻기 위한 요소의 전체수들에 대한 변분원리는 다음과 같다.

$$\sum_{e=1}^M \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}} = \{0\} \quad (5)$$

식(5)에서  $M$ 은 요소의 총수를 나타내며,  $n$ 개의 계절점에 대한 독립된 미지수 값을  $\phi$ 의 함수로 표현되는 경우에는 최소화 조건이 성립한다.

따라서 계절점 위치함수  $\phi_i$  ( $i=1, 2, \dots, \ell$ )에 대한 편도함수의 합은 그 절점  $i$ 를 공유하는 요소수 만큼의 합으로 되므로 계절점  $i$ 를 공유하는 요소의 수를  $m_i$ 를 나타낸다면  $m_i \leq M$ 인 관계를 갖게 된다. 따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^{m_i} \frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} \quad (6)$$

식(6)으로부터 전체 해석영역중의 선택된 대표요소에 대한 계절점  $i$ 에 대응하는 대표요소절점을  $i_e$ 로 나타낸다면, 위치함수는  $\phi_{i_e}$ 로 표현된다.

$$\frac{\partial I^e}{\partial \phi_{i_e}} = \iint_{R_{1e}} \left\{ \frac{1}{\mu_{rn}} \frac{\partial}{\partial \phi_{i_e}} [|\nabla \phi^e|^2] - k_0^2 \epsilon_{rn} \frac{\partial}{\partial \phi_{i_e}} [\phi^e]^2 \right\} ds - \frac{1}{\mu_{rn}} \int_{\Gamma_A} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_{i_e}} [\phi^e \frac{\partial \phi^e}{\partial n_A}] \right\} dl \quad (7)$$

결과적으로 영역전체에 대한 행렬관계식을 얻기 위하여 식(2)를 식(7)에 적용하면 다음과 같이 나타

낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & 2 \iint_{R_{ie}} \left[ \frac{1}{\mu_{rn}} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial N_{je}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - k_0^2 \epsilon_{rn} \sum_{j=1}^3 N_{je} N_{je} \right] ds \cdot \phi_{ie} \\
 & - \frac{1}{\mu_{rn}} \int_{\Gamma_A} \left\{ \sum_{j=1}^3 N_{je} \frac{\partial N_{je}}{\partial n_A} \right\} dl \cdot \phi_{ie} \\
 & - \frac{1}{\mu_{rn}} \int_{\Gamma_A} \left\{ \sum_{j=1}^3 N_{je} \frac{\partial N_{je}}{\partial n} \right\} dl \cdot \phi_{je} = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

식(8)로부터 영역내부의 임의의 위치에서 미지함수를 계산할 수 있으나, 경계  $\Gamma_A$  전상에서의 단위 수직벡터에 대한 도함수를 계산하기는 대단히 까다롭게 되므로 경계조건을 정확히 알고 있어야만 식(8)의 관계식을 해석할 수 있게 된다. 따라서 식(8)의 경계적분항을 독립적인 미지함수로 놓고 영역전체에 대한 방정식을 행렬표현식으로 나타낼 수 있다. 따라서 그림1로부터  $n=1$ 이고, 영역2의 요소분할층수를 임의의 첨자 I로 나타내면 식(9)와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K_{AA} \phi_A + K_{AC_2} \phi_{C_2} + 0 + 0 &= \Psi_A \\
 K_{C_2A} \phi_A + K_{C_2C_2} \phi_{C_2} + K_{C_2I} \phi_I + 0 &= 0 \\
 0 + K_{IC_2} \phi_{C_2} + K_{II} \phi_I + K_{IC_1} \phi_{C_1} &= 0 \\
 0 + 0 + K_{CI} \phi_I + K_{C_1C_1} \phi_{C_1} &= 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

식(9)에서 첨자 I는 임의적으로 선택할 수 있는 내부영역의 요소분할 층수를 나타내게 되고, 첫줄 오른쪽의  $\Psi_A$ 는 식(8)에서 경계적분항을 포함하고 있다. 앞에서 언급하였듯이 식(9)로 구성된 영역전체의 방정식으로 부터 미지함수를 구하기는 대단히

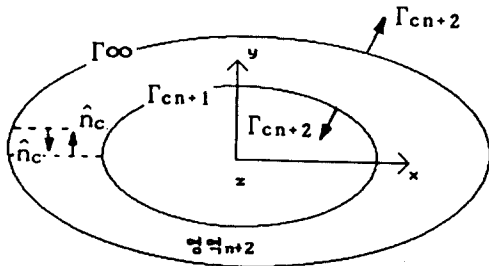


그림 2. 경계적분방정식을 위한 영역 3의 좌표표현

전자파 산란문제를 해결하기위한 혼합유한요소법에 관한 연구

어려우므로 경계적분항을 갖는 미지함수  $\Psi_A$ 을 독립적으로 삭제하게 된다. 따라서 나머지 3개의 연립방정식으로 부터 미지함수를 해석해야 하므로 식(9)의 두번째 방정식에서  $\phi_A$ 을 미리 알고 있어야만 한다. 그러므로 이때의  $\phi_A$ 는 영역화된 경계  $\Gamma_{C_2}$ 와  $\Gamma_A$ 상의 경계 적분 방정식으로 부터 구할 수 있으므로 그림2와 같이 표현할 수 있다.

그림2로부터  $\phi_A$ 에 해당되는 경계값 위치함수는 표면경계적분방정식으로 부터 유도하게 된다. 따라서 관측점이 영역3에 존재할 때 경계적분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \phi_A - \int_{\Gamma_{C_2}} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n_3} dl \\
 = - \int_{\Gamma_{C_2}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n_3} \phi^* dl \quad (10)
 \end{aligned}$$

식(10)에서 Green 함수는 주요해로 나타내고, 주요해가 자유공간 영역내에서 연속 2차 미분가능한 Green 함수  $\phi^*$ 를 도입한다. 따라서 식(10)을 행렬관계식으로 표현한다면 다음과 같다.

$$[\phi_A] = [P_{AA}] [\phi_{C_2}] \quad (11)$$

여기서 본 논문은 유한요소법과 경계요소법을 혼합하게 되므로 구조적으로 분리된 영역 2 그리고 영역 3을 각각 독립적으로 분리한다. 따라서 영역 2에 포함된 경계  $\Gamma_{C_2}$ 는 충전자계를 나타내고, 영역 3에 포함되는 경계  $\Gamma_{C_2}$ 는 산란전자계만을 나타낸다. 또한 가상경계  $\Gamma_A$ 는 영역 3에 포함되어 있으므로 충전자계를 갖게 되며, 각각의 경계상에서 접선성분에 대한 충전자계의 경계조건을 추가시키게 된다.

$$\begin{aligned}
 \phi_{C_2} &= \phi_{C_2}^{total} & : \Gamma_{C_2} \in \text{영역 2} \\
 \phi_{C_2} &= \phi_{C_2}^{sc} & : \Gamma_{C_2} \in \text{영역 3} \\
 \phi_A &= \phi_A^{total} & : \Gamma_A \in \text{영역 3}
 \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)의 total는 충전계로서 입사전장과 산란전장의 합을 나타낸다. 식(11)과 식(12)에 경계조건을 추가시키고, 식(9)에 적용하게 되면 최종적으로 구성된 행렬관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [K_{C_2A}] [P_{AA}] + [K_{C_2C_2}], [K_{C_2I}], & 0 \\ [K_{IC_2}] & , [K_{II}], [K_{IC_1}] \\ 0 & , [K_{CI}], [K_{C_1C_1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi_{C_2}]^{sc} \\ [\phi_I] \\ [\phi_{C_1}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -[K_{C_2 C_2}] [\phi_{C_2}]^{inc} \\ -[K_1 C_2] [\phi_{C_2}]^{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

결과적으로 식(13)으로 부터 경계  $\Gamma_{C_2}$  상에서의 산란장을 해석할 수 있으므로  $\phi_{C_2}$ 을 식(10)에 적용하여 무한경계에서의 산란장을 해석하게 된다. 또한 본 논문에서의 수치해석방법은 E 분극인 경우를 고려하였으나, H 분극인 경우에도 확장이 가능하다. H 분극으로의 확장에서는 식(7)의  $\mu_m$ 과  $\epsilon_m$ 의 위치를 바꾸면 동일한 관계식으로 부터 충분히 해석될 수 있다.

### III. 수치해석 결과 및 고찰

다층 유전체주의 해석적 타당성을 입증하기 위하여 세워진 다층원통주에 대한 Harrington<sup>(5)</sup>의 결과와 순수경계요소법에 의한 해석결과를 비교하였으며, 또한 본 논문의 연산법에 의한 해석적 결과와도 비교하였다. 산란체 표적은 내부영역의 반경을  $0.25 \lambda$  그리고 외부영역의 반경을  $0.3 \lambda$ 로 하였으며, 내부영역 1은 완전도체이고, 영역 2의 유전률 값을 4.0으로 선택했다. 또한 하나의 원통주에서 갖는 절점수를 72개로 하였으며, 두 방법의 총 절점수 및 총 요소수를 다층의 문제로 확장하였을 때의 최종행렬 차원을 표로서 비교하였다.

표 1. 혼합유한요소법과 경계요소법의 총절점수, 총요소수 그리고 최종행렬차원의 비교

혼합유한 요소법			
층수	총절점수	총요소수	최종행렬차원
5	432	720	$360 * 350$
6	504	864	$432 * 432$
7	576	1008	$504 * 504$

혼합유한 요소법			
층수	총절점수	총요소수	최종행렬차원
2	144	72	$288 * 288$
3	216	108	$432 * 432$
4	288	144	$576 * 576$

원형유전체관의 2차원적  $TM_z$  Bistatic 산란폭을 해석하기 위하여 내부반경  $a_1=0.25 \lambda$ 이고, 외부반경  $a_2=0.3 \lambda$ 이며, 내부 및 외부영역의 유전율은 각각  $\epsilon_{r1}=1.0$ ,  $\epsilon_{r2}=4.0$ 으로 나타내었다. 따라서 R. F.

Harrington<sup>(5)</sup>의 Moment법과 순수경계요소법에 의한 해석결과는 그림3에 나타내었다.

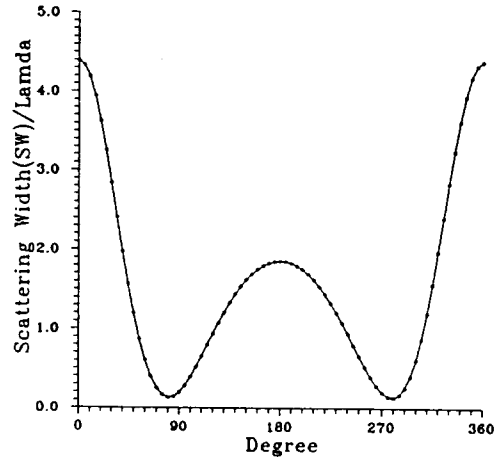


그림 3. 원형유전체관의 2차원적  $TM_z$  Bistatic 산란폭 경계요소법에 의한 결과  
 $a_1=0.25 \lambda$   $a_2=0.3 \lambda$   $\epsilon_{r1}=1.0$   $\epsilon_{r2}=4.0$

또한 본 논문의 연산법에 의한 혼합유한요소법의 해석적 결과는 그림4에 나타내었으며, 동일한 크기와 매질에 대하여 그림3과 비교하여 좋은 일치율을 보이며, 중간 부분에서의 다소 불완전한 차이는 식(10)의 경계적분항에서 법선성분에 대한 산란장의 도함수로 부터 나타나게 된다.

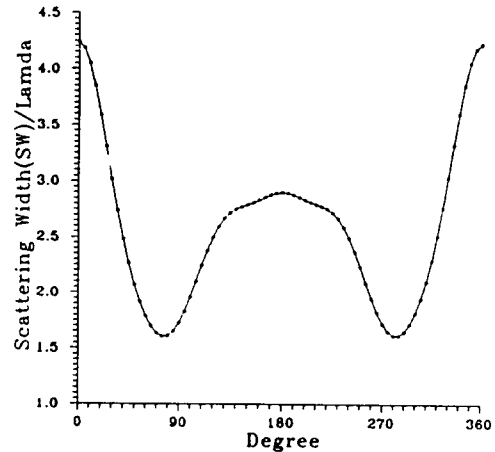


그림 4. 원형유전체관의 2차원적  $TM_z$  Bistatic 산란폭 혼합유한요소법에 의한 결과  
 $a_1=0.25 \lambda$   $a_2=0.3 \lambda$   $\epsilon_{r1}=1.0$   $\epsilon_{r2}=4.0$

REFERENCES

1. B. H. McDonald and A. Wexler, "Finite element solution of unbounded field problems," IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-20, pp. 841-847, Dec. 1972.
2. S. K. Chang and K. K. Mei, "Application of the unimoment method to electromagnetic scattering of dielectric cylinders," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-24, pp. 35-42, Jan. 1976.
3. J. M. Jin and V. V. Liepa, "Application of hybrid finite element method to electromagnetic scattering from coated cylinders," IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP-36, pp. 50-54, Jan. 1988.
4. J. M. Jin and V. V. Liepa, "A note on hybrid element method for solving scattering problems," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-36, pp. 1486-1490, Oct. 1988.
5. R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York : Macmillan, 1968.

그러므로 본 논문의 연산법에 의한 확장으로 해석 영역 2에서의 매질을 다양하게 변화시킬 수 있을 뿐만 아니라 형태상 모양과 크기를 변화시킬 수 있다. 따라서 확장의 기본으로 영역2가 복소유전율을 갖는 원형유전체관에 대하여 산란폭을 수치해석하였다.

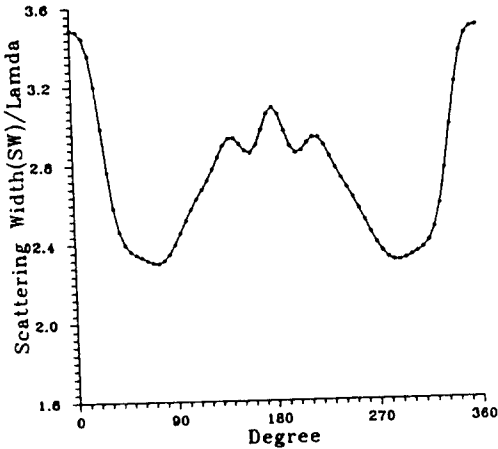


그림 5. 원형유전체관의 2차원적  $TM_z$  산란전장 혼합유한요소법에 의한 결과  
 $a_1 = 0.8\lambda, a_2 = 0.86\lambda, \epsilon_{r1} = 1.0, \mu_{r1} = 1.0,$   
 $\epsilon_{r2} = 2 - j2, \mu_{r2} = 2 - j2$

IV. 결 론

본 논문은 다층 유전체 원통주의 산란문제를 응용 해석하기 위한 이전의 혼합유한요소법을 구조적으로 분리하여 경계  $\Gamma_{c2}$ 와 가상경계  $\Gamma_A$ 상에서 행렬관계식을 개선시켰다. 또한 모든 영역을 구조화하여 수치해석할 수 있으므로 편의성과 다양성을 갖게 된다.

본 논문의 연산법은 무경계장 산란해석에 필요한 임의의 가상경계를 산란체의 형상에 따라 가능한 하나의 요소층 만큼의 간격으로 선택하였고, 무한원통주의 단면으로 부터 산란전자를 수치해석 하였다. 따라서 Jin과 Liepa<sup>(4)</sup>가 제시한 혼합유한요소법보다 효율적이다.

혼합유한요소법은 앞으로 전자파 분야에서 시간영역에서의 전자장 과도응답을 해석할 수 있도록 확장이 요구된다.