

# 비균일 전송선의 기존 해석에 관한 연구 (A Study on Conventional Analysis of Nonuniform Transmission Line)

金世潤\* · 河憲兌\* · 洪性溶\*\*  
(Se Yun Kim\*, Huen Tae Ha\*, Sung Yong Hong\*\*)

## 要 約

본 연구에서는 비균일 전송선의 특성분석에 사용되는 기존 해석 방법들의 유용성과 한계점에 관하여 살펴보았다. 기존 해석 방법으로 구한 지수함수 형태로 변하는 비균일 전송선의 입력 임피던스는 특정한 조건하에서만 해의 유일성을 갖음을 알았다. 또한 각진 두 평판으로 구성된 전송선의 입력 임피던스를 기존의 평면 TEM 모우드를 이용하여 구한 값이 정확한 해와 오차가 생김을 보였다.

## ABSTRACT

Validity and limitation of conventional methods for analyzing the characteristics of nonuniform transmission lines are discussed here. It is found that uniqueness of calculated input impedance of an exponential transmission line by employing conventional methods is not assured in general but only under specific conditions. And the calculated input impedance of an angled two-plane transmission line based on the conventional planar TEM mode devices from its rigorous solution.

## I. 서 론

전송선의 단면구조가 전송방향으로 일정하지 않고 변화가 있는 비균일 전송선 (nonuniform transmission line) 에서는 특성 임피던스와 전파상수가 위치에 따른 함수형태로 주어지기 때문에 해석적인 방법으로 정확히 풀기 어렵다. 이러한 비균일 전송선을 풀기 위하여 19세기 말 Heaviside 이후 다양한 해석기법들이 개발되어 왔는데[1], 구하고자 하는 주요 변수에 따라 크게 다음과 같은 세가지 방법으로 분류할 수 있다.

먼저, 단면구조가 균일한 전송선 방정식에서 상수

로 주어지는 단위 길이당 임피던스와 어드미턴스를 비균일 전송선의 구조에 맞는 함수형태로 바꾸어 대입한 비균일 전송선 방정식으로 부터 전압 또는 전류를 구하는 방법이다[2]. 일반적으로 비균일 전송선 방정식은 풀리지 않으므로 전송선의 길이당 임피던스와 어드미턴스의 비가 전송방향에 따라 exponential, Bessel, Whittaker, Hermite, Chebyshev, hypergeometric 함수와 같이 특수하게 변할 경우에 한하여 변수치환으로 부터 전압과 전류를 구하였다[3-5].

다음으로, Walker와 Wax[6]에 의해 비균일 전송선 방정식으로 부터 균일 전송선에서의 반사계수와 전파상수의 정의를 도입하여 변환한 Riccati 미분 방정식을 이용하여 반사계수를 계산하는 방법이다[7,8].

그러나 Riccati 방정식 자체가 비선형 미분 방정식이어서 다루기가 매우 힘들다. 따라서

\* 正會員, 韓國科學技術研究院 應用電子研究室  
(Appl Electron. Lab., KIST)

\*\* 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科  
(Dept. of Elect. Eng., KAIST)

비선형 전송선의 특성 임피던스 변화가 매우 완만하여 반사계수가 1보다 매우 작다고 가정하면, 특성 임피던스와 반사계수간에 푸리에(Fourier) 변환 관계가 있음을 Bolinder[9]가 보였다.

이 방법의 일반화는 지금도 많은 관심이 쏠리고 있다[10,11].

마지막으로, 전송선을 분산회로로 보아 입력 임피던스를 회로문제로 바꾸어서 계산하는 방법이다[12]. 이 방법은 비균일 전송선을 마치 무한개의 균일 전송선이 연속적으로 연결되어 있다고 생각하여 입력 임피던스를 계산하는 것으로[13,14], 수치계산 방법으로도 쉽게 접근할 수 있다는 잇점이 있다.

위에서 기술한 기존 해석방법들의 공통된 가정은 비균일 전송선에 의해 전달되는 모우드가 평면 TEM (planar transverse electromagnetic) 모우드라는 것이다. 그러나 파동 방정식에 의거한 엄밀한 모우드 해석 (modal analysis) 이라는 관점에서 보면 비균일 전송선의 구조에 특정한 형태의 TEM 모우드와 그와 수반되는 고차 모우드가 존재해야 한다[15].

따라서 본 논문에서는 비균일 전송선중 가장 잘 알려진 구조인 특성 임피던스가 지수함수적으로 변하는 전송선에 대해 Walker와 Wax에 의한 방법과 Pierce 등의 방법들을 적용하여 간략히 살펴보고, 이들 해석방법들을 이용하여 일정한 각을 이루는 두개의 무한 평판으로 이루어진 비균일 전송선[16]의 입력 임피던스를 각각 계산하였다. 이 경우 계산된 결과들을 이미 잘 알려진 정확한 해와 비교해 봄으로서, 기존 해석 방법들의 문제점을 조사하였다.

본 연구에서는 편의상 전송선을 구성하는 도체의 도전율은 무한대이고, 전송선 주변 매질은 손실이 없다고 가정하였다. 또한 시간 조화함수는  $e^{j\omega t}$ 로 나타내었으며, 그 표현은 생략하였다.

## II. 기존 해석 방법

### 1. 반사 계수 개념

그림 1과 같이 전송선 방향인 x방향으로의 단위 길이당 임피던스와 어드미턴스가 각각  $Z(x)$ 와  $Y(x)$ 로 주어질 경우, 임의의 x지점에서의 전압 V와 전류 I는 다음과 같은 전송선 방정식으로 표현된다[2-5].

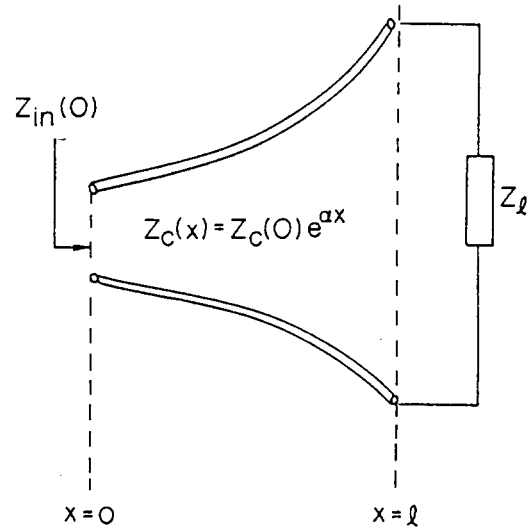


그림 1. 지수함수 형태의 전송선 구조

Fig. 1 Geometry of an exponential transmission line

$$V'(x) + Z(x)I(x) = 0 \quad (1. a)$$

$$I'(x) + Y(x)V(x) = 0 \quad (1. b)$$

여기서  $V(x)$ 와  $I(x)$ 는 각각  $V(x)$ 와  $I(x)$ 의 x에 대한 미분을 나타낸다. Walker와 Wax[6]는 반사 계수  $p(x)$ 를 도입하여,

$$\frac{(x)I(x)^2 Z + (x)\Lambda}{(x)I(x)^2 Z - (x)\Lambda} = (x)d \quad (2)$$

이를 식(1. a)와 (1. b)에 대입함으로써 다음과 같은 Riccati 방정식을 유도하였다(6).

$$p'(x) - 2\Gamma(x)p(x) + \frac{1}{2}[\log Z_c(x)]' [1 - p^2(x)] = 0 \quad (3)$$

여기서  $Z_c$ 와  $\Gamma(x)$ 는 각각 특성 임피던스와 전파상수로 다음과 같다.

$$Z_c(x) = \sqrt{Z(x)/Y(x)} \quad (4. a)$$

$$\Gamma(x) = \sqrt{Z(x)Y(x)} \quad (4. b)$$

일반적으로 식(3)으로부터  $p(x)$ 를 구하기는 불가능 하지만, 식(4. a)와 (4. b)에 주어진  $Z_c$ 와  $\Gamma(x)$ 가 특수한 경우에 대해서는 정확한  $p(x)$ 를 구할

수 있다. 가장 대표적인 예로서 식(4. a)의 특성 임피던스가 지수함수적으로 변하며, 전파상수인  $\Gamma(x)$ 가 허수만으로 표현되는 상수로 주어지는 경우에 대해 살펴보기로 한다.

$$Z_c(x) = Z_c(0)e^{\alpha x} \quad (5. a)$$

$$\Gamma(x) = j\beta \quad (5. b)$$

식(5. a)와 (5. b)를 식(3)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 주어진다.

$$\rho'(x) - 2j\beta\rho(x) + \frac{\alpha}{2}[1 - \rho^2(x)] = 0 \quad (6)$$

Ghose[7]는 식(6)에 다음과 같은 변수치환을 가하여

$$\bar{\rho}(x) = \rho(x) + \frac{j2\beta}{\alpha} \quad (7. a)$$

$$S^2 = 1 - \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^2 \quad (7. b)$$

$\bar{\rho}(x)$ 를 구한 후, 이로부터  $\rho(x)$ 를 다음과 같이 구하였다.

$$\rho(x) = -\frac{j2\beta}{\alpha} - S \tanh\left(\frac{S\alpha}{2}x + SC\right) \quad (8)$$

여기서 C는 임의의 상수이다. 경계조건으로서  $p(l) = p_l$ 이라고 하고, 이를 식[8]에 대입하여 상수 C를 정하면 Womack[8]이 유도한  $\rho(x)$ 와 같이 표현할 수 있다.

$$\rho(x) = -\frac{j2\beta}{\alpha} - S \frac{1 - B \tanh \frac{S\alpha x}{2}}{\tanh \frac{S\alpha x}{2} - B} \quad (9)$$

여기서 B는 다음과 같이 정의된다.

$$B = \frac{S + (\rho_l + \frac{j2\beta}{\alpha}) \tanh \frac{S\alpha l}{2}}{S \tanh \frac{S\alpha l}{2} + (\rho_l + \frac{j2\beta}{\alpha})} \quad (10)$$

Womack[8]이 유도한  $\rho(x)$ 는 식(9)와 거의 같으나 부호가 틀림을 알 수 있다. 식(9)를 이용하면,  $x=0$ 에서의 입력 임피던스  $Z_{in}(0)$ 는 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$Z_{in}(0) = Z_c(0) \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)} \quad (11)$$

$$Z_l[A + \tanh \frac{S\alpha l}{2}] + j\frac{2\beta}{\alpha} Z_c(l) \tanh \frac{S\alpha l}{2} \\ = Z_c(0) \frac{Z_l[A + \tanh \frac{S\alpha l}{2}] + j\frac{2\beta}{\alpha} Z_c(l) \tanh \frac{S\alpha l}{2}}{Z_c(l)[A - \tanh \frac{S\alpha l}{2}] + j\frac{2\beta}{\alpha} Z_l \tanh \frac{S\alpha l}{2}}$$

여기서  $Z_l$ 은  $X=1$ 에 달린 부하 임피던스로서  $p_l$ 과는 다음과 같은 관계가 있다.

$$Z_l = Z_c(l) \frac{1 + \rho_l}{1 - \rho_l} = Z_{in}(l) \quad (12)$$

식(11)에서 다음과 같은 정의를 대입하면,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad \lambda_c = \frac{4\pi}{\alpha}, \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (13)$$

식(11)은 Ahmed[13]가 구한 것과 동일한 표현식을 얻을 수 있다.

$$Z_{in}(0) = Z_c(0) \frac{Z_l \left[ \frac{1}{\lambda_g} + \frac{1}{\lambda_c} \tan \frac{2\pi l}{\lambda_g} \right] + j \frac{Z_c(l)}{\lambda} \tan \frac{2\pi l}{\lambda_g}}{Z_c(l) \left[ \frac{1}{\lambda_g} - \frac{1}{\lambda_c} \tan \frac{2\pi l}{\lambda_g} \right] + j \frac{Z_c(l)}{\lambda} \tan \frac{2\pi l}{\lambda_g}} \quad (14)$$

## 2. 임피던스 개념

그림 1의 비균일 전송선을 Ahmed[13]가 제시한 여러개의 균일 전송선이 연속적으로 연결되어있는 다단 연속된 균일 전송선이라 생각하자. 따라서 그림 2와 같이 임의의 구간  $[x - \Delta x, x]$  내에서의 특성 임피던스가  $Z_c(x)$ 이고 전파상수가  $\beta$ 인 균일 전송선으로  $x$ 지점에  $Z_{in}(x)$ 인 부하가 달려 있다고 가정하면  $x - \Delta x$  지점에서의 입력 임피던스  $Z_{in}(x - \Delta x)$ 는 다음과 같이 둘 수 있다.

$$Z_{in}(x - \Delta x) = Z_c(x) \frac{Z_{in}(x) + jZ_c(x) \tan \beta \Delta x}{Z_c(x) + jZ_{in}(x) \tan \beta \Delta x} \quad (15)$$

여기서

$$Z_{in}(x - \Delta x) = Z_{in}(x) - \delta Z_{in}(x) \quad (16)$$

식(16)을 식(15)에 대입하여,  $\Delta x \rightarrow 0$ 이라고 가정하면 다음과 같은 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$Z_{in}'(x) = -j\beta Z_c(x) \\ + j\beta \frac{[Z_{in}(x) - \delta Z_{in}(x)]Z_{in}(x)}{Z_c(x)} \quad (17)$$

만약  $Z_{in}(x)$ 가  $\delta Z_{in}(x)$ 보다 매우 크다고 가정하면,

식(17)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z'_{in}(x) = -j\beta Z_c(x) + j\beta \frac{Z_{in}^2(x)}{Z_c(x)} \quad (18)$$

식(18)에 다음과 같은 변수치환을 대입하면,

$$Z_{in}(x) = -\frac{Z_c(x)}{j\beta} \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (19)$$

$u(x)$ 에 대해 다음과 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$u''(x) + \frac{Z'_c(x)}{Z_c(x)}u'(x) + \beta^2 u(x) = 0 \quad (20)$$

식(5. a)와 같이 특성 임피던스  $Z_c(x)$ 가 지수적으로 변할 경우 식(20)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u''(x) + \alpha u'(x) + \beta^2 u(x) = 0 \quad (21)$$

식(21)을 풀고, 이를 식(19)에 대입한 뒤, 식(12)와 같은  $x=1$ 에서의 경계조건을 대입하여  $x=0$ 에서의 입력 임피던스를 구하면 식(14)와 같은 결과를 얻을 수 있다. Ajaji와 Ajose[14]가 지적인 바와 같이 Ahmed[13]의 유도결과는 식(13)의  $\lambda_c$ 의 정의에 오류가 있음을 확인할 수 있었다. 이 방법은 그림 2에서 보인 바와 같이 임의의 비균일 전송선이라도 여러개의 균일 전송선으로 나누어 연속적인 수치계산으로부터 입력 임피던스를 계산할 수 있다는 장점이 있음을 알 수 있다.

### III. 이론 및 수치계산에 의한 검토

#### 1. Ahmed 방법의 검토

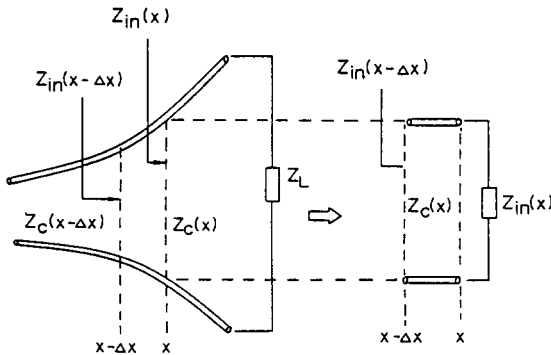


그림 2. 지수함수 형태의 전송선과 등가인 다단 접속된 균일 전송선

Fig. 2 Cascaded uniform transmission lines equivalent to an exponential transmission line

그림 2에서 구간  $[x-\Delta x, x]$  내에서의 특성 임피

던스  $Z_c$ 를  $Z_c(x)$ 로 가정하여 풀었는데, 이 구간내의 임의의 위치의 특성 임피던스인  $Z_c(x-T\Delta x)$ 로 취할 경우에 대해 앞 II-2절에서 다른 방법대로 계산해 보기로 한다. 물론  $T$ 는 0과 1사이의 임의의 상수이다. 이 경우 식(15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_{in}(x-\Delta x) = Z_c(x-\tau x) \frac{Z_{in}(x) + jZ_c(x-\tau\Delta x)\tan\beta\Delta x}{Z_c(x-\tau\Delta x) + jZ_{in}(x)\tan\beta\Delta x} \quad (22)$$

식(22)에 식(16)을 대입하고, 마찬가지로  $\Delta x \rightarrow 0$ 이라고 가정하면, 식(16)대신 다음과 같은 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$Z'_{in}(x) = -j\beta Z_c(x-\tau dx) + j\beta \frac{[Z_{in}(x) - \delta Z_{in}(x)]Z_{in}(x)}{Z_c(x-\tau dx)} \quad (23)$$

식(23)이 정확하다면, 식(23)의 결과도 식(17)과 같은 결과를 주어야만 한다. 따라서 식(17)에서 식(23)을 빼 뒤, 양변을  $\frac{j\beta}{\tau dx}$ 로 곱하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$[Z_{in}(x) - \delta Z_{in}(x)]Z_{in}(x) \frac{1}{\tau dx} \left[ \frac{1}{Z_c(x)} - \frac{1}{Z_c(x-\tau dx)} \right] - \frac{Z_c(x) - Z_c(x-\tau dx)}{\tau dx} = 0 \quad (24)$$

식(24)에서도  $\delta Z_{in}(x)$ 는  $Z_{in}(x)$ 보다 매우 작으므로 무시하면 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$Z'_c(x) \left[ 1 + \frac{Z_{in}^2(x)}{Z_c^2(x)} \right] = 0 \quad (25)$$

식(25)을 만족하기 위해서는  $Z_c(x)$ 가 상수, 즉 균일 전송선이거나  $\pm jZ_{in}(x)$ 가 되어야만 한다. 후자의 경우 이 관계를 식(18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 조건을 유도할 수 있다.

$$Z'_c(x) = \pm 2\beta Z_c(x) \quad (26)$$

식(26)을 풀면  $Z_c(x)$ 가 다음과 같은 경우에 대해 가능하다.

$$Z_c(x) = Z_c(0)e^{\pm 2\beta x} \quad (27)$$

식(25)-(27)의 결과는 다음과 같은 의미가 있다. 즉 앞 II-2절에 기술한 비균일 전송선의 해석방법은 엄밀한 의미로 균일 전송선이나 식(27)에서 보인 바와 같이 한 주파수에 대해 특정한 지수함수 형태의 비균일 전송선에 대해서만 성립한다고 볼 수 있

다.

2. 각진 두 평판으로 구성된 전송선의 검토

임의의 비균일 전송선으로 전파되는 모우드는 항상 평면 (planar) TEM 인가 여부를 확인하기 위하여 그림3과 같은 극히 간단한 구조의 비균일 전송선에 대해 살펴 보기로 한다.  $z=0$ 인 평면과 직교하여 길이가  $d$ 인 두 무한 도체 평판이  $180^\circ$ 보다 작은  $2\theta_c$ 의 각을 이루며, 한 쪽 끝인  $\rho=l$ 인 위치에서 두 평판간의 간격을  $h$ 를 이루며 임피던스가  $Z_l$ 인 부하가 달려 있을 경우, 반대편 끝인  $\rho$ 에서 부하측으로 들여다 본 입력 임피던스  $Z_{in}$ 은 다음과 같이 정확한 해가 알려져 있다[16].

$$Z_{in}(\rho) = -jZ_c(\rho) \frac{\Gamma H_1^{(1)}(k\rho) + H_1^{(2)}(k\rho)}{\Gamma H_0^{(1)}(k\rho) + H_0^{(2)}(k\rho)} \quad (28)$$

여기서  $H_m^{(n)}$ 은 제  $n$ 종  $m$ 차 order인 Hankel 함수를 의미한다. 이때  $\rho$ 방향으로의 특성 임피던스  $Z_c$ 는 두 평판 사이의 매질이 유전체  $\epsilon$ , 투자율  $\mu$  일때 다음과 같이  $\rho$ 에 따라 변한다.

$$Z_c(\rho) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \theta_c \rho \quad (29)$$

또 반사계수  $\Gamma$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma = -\frac{Z_l H_0^{(2)}(kl) + jZ_c(l)H_1^{(2)}(kl)}{Z_l H_0^{(1)}(kl) + jZ_c(l)H_1^{(1)}(kl)} \quad (30)$$

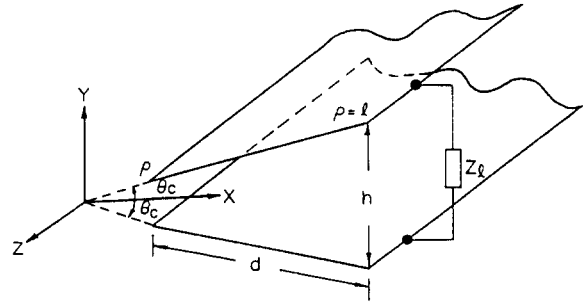
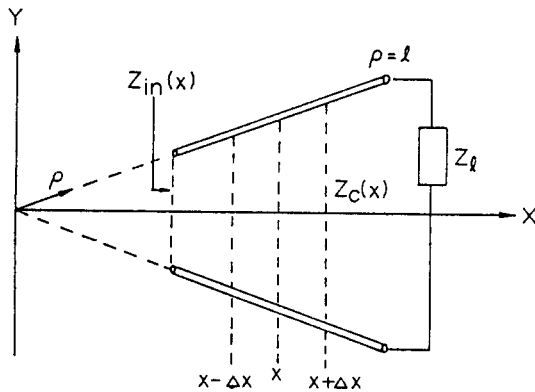


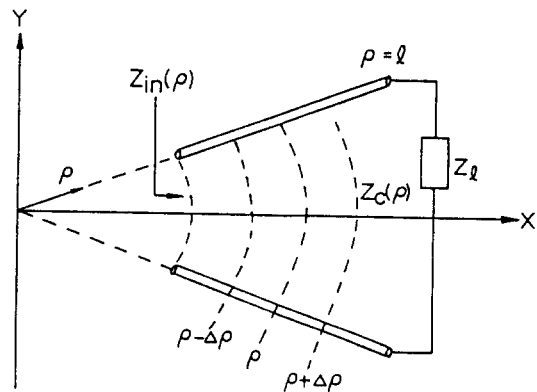
그림 3. 각진 두 평판으로 구성된 전송선 구조  
Fig. 3 Geometry of an angled two-plane transmission line

그림3과 같은 비균일 전송선 구조에서 평판길이를  $d=1.0\lambda$  (과장), 오른쪽 끝에서의 두 평판 간격을  $h=\frac{1}{6}\lambda$ 로 고정하고 여기에 부하 임피던스인  $Z_l=37.7\Omega$ 를 달았다고 하였을 경우에 대해 II-2 절에서 기술한 방법으로 두 평판의 왼쪽 끝에서 부하측으로 들여다 본 입력 임피던스를 계산해 보기로 한다. 이때  $\theta_c$ 가  $0^\circ$ 에  $70^\circ$ 까지 변할 경우 평판의 왼쪽 끝인  $\rho$ 에서 부하측으로 들여다 본 입력 임피던스를 구하였다. 먼저 그림4(a)와 같이 단면과 나란한 평면 TEM 모우드가 진행한다고 가정하여 단면과 나란히 총 100개의 구간으로 나누어 수치계산 하였다.

또한 그림4(b)와 같이 원통형(cylindrical) TEM 모우드가 전파된다고 가정하여  $\rho$  방향에 대해 100개의 구간으로 나누어 각각의 구간을 균일 전송선으로 보아 입력 임피던스를 수치계산 하였다.



(a) 평면 TEM 모우드  
(a) Planar TEM mode



(b) 원통형 TEM 모우드  
(b) cylindrical TEM mode

그림 4. 전파 모우드 형태에 따른 각진 두 평판으로 구성된 전송선의 분할

Fig. 4 Segmentation of an angled two-plane transmission line according to the type of propagation modes

그림5의 결과로부터 다음과 같은 사실을 얻을 수 있다. 먼저 임의의 비균일 전송선에 대한 입력 임피던스는 TEM 모우드의 단면 형태를 비균일 전송선의 구조에 맞도록 취하고, 특성 임피던스도 마찬가지로 해당되는 TEM 모우드의 단면 방향으로의 값을 취해야만 II-2 절과 같은 다단 접속된 전송선 모형을 이용한 임피던스 해석방법을 사용할 수 있을

을 알 수 있다. 이는 II 장에서 보인 기존 해석방법들의 기본 가정인 임의의 비균일 전송선에서도 평판 TEM 모우드가 전파한다는 것을 부정하는 것과 같다. 따라서 기존의 비균일 전송선 해석방법들 모두는 정확한 방법이 아니라는 사실이 입증됨을 알 수 있다.

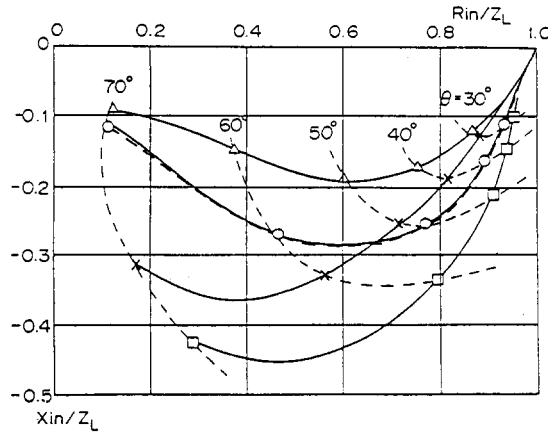


그림 5. 전송선을 이루는 두 평판사이의 각의 반인  $\theta_c$ 가  $0^\circ$ 에서  $70^\circ$ 까지 변할 경우 서로 다른 TEM 모우드 형태에 근거하여 수치계산된 입력 임피던스와 정확한 해와의 비교 (... : 정확한 해,  $-\Delta-$  : 원통형 모우드와 평면  $Z_c$ ,  $-o-$  : 원통형 모우드와 원통형  $Z_c$ ,  $-x-$  : 평면 모우드와 평면  $Z_c$ ,  $--$  : 평면 모우드와 원통형  $Z_c$ )

Fig. 5 Comparison of calculated input impedances on two-plane transmission line of an half-angle  $\theta_c$  according to different types of the TEM mode with the corresponding rigorous solution (... : exact solution,  $-\Delta-$  : cylindrical mode and planar

#### IV. 결 론

본 논문에서는 비균일 전송선으로 전파되는 모우드가 평면 TEM 이라는 가정이 틀림을 입증하였다. 먼저 정확한 해가 알려진 각진 두 무한 평판으로 구성된 비균일 전송선에 대해 기존 해석 모형으로 수치계산 결과가 정확한 해와 차이가 있음을 보였다. 또한 비균일 전송선을 다단 접속된 균일 전송선의 등가 모델로 바꾸어 해석하는 방법 자체가 특성 임피던스가 상수인 균일 전송선이거나 사용 주파수에 종속된 지수함수 형태의 전송선 이외의 경우는 유일한 해를 주지 못한다는 사실을 기존 해석방법만을 써서 보였다. 이는 기존 해석방법 자체에 오류가 있으며, 이러한 오류 원인은 비균일 전송선내의 전파되는 모우드가 해당 전송선 단면 구조에 따라 정해지는 고유한 형태의 TEM 대신 평면 TEM 이라고 근사하였기 때문임을 본 논문에서 입증하였다.

#### 參考文獻

- [1] M. Kaufmann, "Bibliography of nonuniform transmission lines," *IRE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-3, pp. 218-220, Oct. 1955.
- [2] A. T. Starr, "The nonuniform transmission line," *Proc. IRE.* vol. 20, pp. 1052-1063, Jun. 1932.
- [3] I. Jacobs, "A generalization of the exponential transmission line," *Proc. IRE.* vol. 47, pp. 97-98, Jan. 1959.
- [4] B. S. Westcott, "Generalized confluent hypergeometric and hypergeometric transmission lines," *IEEE Trans. Circuit Theory.* vol. CT-16, pp. 289-294, Aug. 1969.
- [5] C. Nwoke, "An exact solution for the

- nonuniform transmission line problem," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 944-946, Jul. 1990.
- [6] L. R. Walker and N. Wax, "Nonuniform transmission lines and reflection coefficients," *J. Appl. Phys.*, vol. 17, pp. 1043-1045, 1946.
- [7] R. N. Ghose, "Exponential transmission lines as resonators and transformers," *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-5, pp. 213-217, Jul. 1957.
- [8] C. P. Womack, "The use of exponential transmission lines in microwave components," *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-10, pp. 124-132, Mar. 1962.
- [9] F. Bolinder, "Fourier transforms in the theory of inhomogeneous transmission lines," *Proc. IRE*, vol. 38, p. 1354, Nov. 1950.
- [10] P. Promanick and P. Bhartia, "A generalized theory of tapered transmission line matching transformers and asymmetric couplers supporting non-TEM modes," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-37, pp. 1184-1191, Aug. 1989.
- [11] J. P. Mahon and R. S. Elliott, "Tapered transmission lines with a controlled ripple response," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 1415-1420, Oct. 1990.
- [12] J. R. Pierce, "A note on the transmission line equation in terms of impedance," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 22, pp. 263-265, Jul. 1943.
- [13] M. J. Ahmed, "Impedance transformation equations for exponential, cosine-squared, and parabolic tapered transmission lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-29, pp. 67-68, Jan. 1981.
- [14] O. O. Ajaji and S. O. Ajose, "Semi-analytical method for computing input impedance of general nonuniform transmission line," *IEEE Proc.*, vol. 135, Pt. H, pp. 269-271, Aug. 1988.
- [15] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York, 1960, Ch. 3.
- [16] S. Ramo, J. R. Whinnery, and T. V. Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, 1984, Ch. 9.