

核分裂 中性子스펙트럼이 核臨界도에 미치는 效果

魯聖基 · 閔德基 · 陸根億 · 吳熙弼*

韓國에너지研究所 大德工學센터

抄 錄

核分裂 即發中性子스펙트럼의 表現式인 왓트式, 크란버그式 및 맥스웰式을 核分裂의 線源項으로 取하여 고디바系와 제제벨系의 有效增倍係數를 ANISN 電算코드로 算出하고 他 研究者의 實驗値와 比較해 보았다.

그 結果 實驗値에 가장 가까운 값을 주는 것은 맥스웰式으로 보였다. 이것은 곧 맥스웰式이 核分裂 即發中性子스펙트럼의 適切한 表現式임을 意味한다.

1. 序 論

核分裂 即發中性子스펙트럼(以下 核分裂 中性子스펙트럼이라는 用語와 같은 뜻으로 쓸 것이다)은 原子爐 心の 核特性分析, 核臨界爆走事故時 漏洩中性子線量の 測定·評價 및 核物質의 核臨界度 算出等에 있어서 基本 入力資料의 하나로 쓰인다.

지금까지 核分裂 中性子스펙트럼에 대한 여러가지 解析의 表現式이 提案되었다. 中 代表的인 것은 바이스코프(Weisskopf)式¹⁾, 왓트(Watt)式²⁾, 크란버그(Cranberg)式³⁾ 및 맥스웰(Maxwell)式⁴⁾ 등인데 蒸發理論에 바탕을 둔 Weisskopf式은 오늘날 거의 쓰이지 않고 있다. 現在 가장 널리 쓰이고 있는 表現式은 Watt 式 또는 Cranberg式과 Maxwell式인데 Watt式과 Cranberg式間에는 큰 差異가 없으므로 必要에 따라 이 兩者中 하나를 擇하여 쓰게 된다.

그런데 Watt式 또는 Cranberg 式과 Maxwell 式중에서 어느式을 取해야 할 것인가가 오랫동안 論議의 對象이 되어 왔다. 例컨대 Campbell 및 Rowland⁴⁾와 Steen⁵⁾은 實驗値와 잘 맞는 式으로 Watt 式을 든 反面에 Koster⁶⁾ 및 Knitter等⁷⁾은 Maxwell 式을 들었다. 이에 對한 論議는 아직도 繼續되고 있으며 따라서 最

適表現式도 알려지지 않고 있다. 大概 核分裂 中性子스펙트럼의 表現式을 任意로 選擇하는데 이것은 바람직한 方法이 못된다.

그래서 本 研究은 이의 適切한 表現式을 選定할 目的(豫備的)으로 着手되었다. 이것은 核分裂 即發中性子스펙트럼의 表現式인 Watt式, Cranberg式 및 Maxwell 式을 核分裂의 線源項으로 取하여 無反射體 球形 우라늄金屬系인 고디바(GODIVA)와 無反射體 球形 플루토늄金屬系인 제제벨(JEZEBEL)의 有效增倍係數(Keff)를 算出하고 他 研究者⁸⁾의 實驗値와 比較한 다음 가장 近似한 計算結果를 주는 式을 選定하는 方法이다. 이때 有效增倍係數는 一次元 輸送理論電算코드 ANISN⁹⁾으로 算出되었다.

2. 核分裂 即發中性子스펙트럼

우라늄 ^{235}U 가 熱中性子로 因하여 核分裂이 일어난 때 放出되는 即發中性子스펙트럼(prompt fission neutron spectrum)의 解析의 表現式인 Watt式²⁾, Cranberg式³⁾ 및 Maxwell式⁴⁾은 다음과 같이 주어진다.

$$n_w(E) = 0.484 \exp(-E) \sinh \sqrt{2E} \dots\dots\dots (1)$$

$$n_c(E) = 0.453 \exp(-E/0.965) \sinh \sqrt{2.29E} \dots\dots\dots (2)$$

$$n_m(E) = 0.77 \sqrt{E} \exp(-0.775E) \dots\dots\dots (3)$$

* 忠南大學校 理科大學 物理學科

* Department of Physics, College of Science, Chungnam National University, Chung-Nam, Korea

여기서 $n(E)$ 는 $E(\text{MeV})$ 의 에너지를 갖는 中性子の 數를 나타내고 接尾添字 w, c 및 m 은 各各 Watt式, Cranberg式 및 Maxwell式을 意味한다.

Watt式은 核分裂破片(fission fragment)으로 부터 放出되는 中性子が 質量中心系에서 Maxwell分布를 갖는다고 假定하므로써 얻어지는 實驗室系 中性子스펙트럼의 表現式임을 Watt는 記述하고 있다. 그리고 Terrell¹⁰⁾은 質量中心系에서 放出中性子の 에너지分布를 蒸發스펙트럼¹¹⁾으로 假定하면 實驗室系에서는 Maxwell分布를 갖게됨을 證明하였다. 아울러 Terrell¹⁰⁾은 Maxwell스펙트럼의 平均에너지, $\bar{E}(\text{MeV})$ 는 核分裂破片의 核溫度, $T(\text{MeV})$ 와 다음과 같은 關係

$$\bar{E} = 1.5 T \dots\dots\dots(4)$$

를 갖고 있으며 또 \bar{E} 는 核分裂當 放出되는 平均中性子數, $\bar{\nu}$, 와도 關係됨을 밝혔다. 즉, \bar{E} 는

$$\bar{E} = 0.78 + 0.621\sqrt{\bar{\nu} + 1} \dots\dots\dots(5)$$

으로도 주어지는데¹⁰⁾ 이 (5)式은 1962년에 다음과 같이 修正¹¹⁾

$$\bar{E} = 0.74 + 0.653\sqrt{\bar{\nu} + 1} \dots\dots\dots(6)$$

되었다가 1965년에 다시 修正¹²⁾

$$\bar{E} = 0.75 + 0.645\sqrt{\bar{\nu} + 1} \dots\dots\dots(7)$$

되어 오늘에 이르고 있다. 以上 (5)~(7)式은 核分裂 核種에 따라 核分裂 即發中性子스펙트럼이 달라질 수 있음을 暗示하고 있다.

이와 同時에 여러 研究者들^{13)~17)}은 核分裂 即發中性子스펙트럼이 核分裂을 일으키는 中性子(또는 核分裂 誘起中性子)의 에너지에 따라 달라진다는 것을 報告하였다. 以上의 特性을 考慮하여 Heertje¹³⁾, Jaffey¹⁴⁾, Kim²⁰⁾ 및 Ro²¹⁾ 등은 (1)式과 (3)式을 一般化된 式으로 表示하였는데 Ro²¹⁾의 表現式을 쓰면 다음과 같이 된다.

$$n_w(E) = k \exp(-\alpha E) \sinh(\beta \sqrt{E}) \dots\dots\dots(8)$$

$$n_m(E) = k E^2 \exp(-\beta E) \dots\dots\dots(9)$$

여기서 一般化된 Cranberg式은 Watt式과 같은 形式을 가지며 k 는 規格化, $\int_0^\infty n(E) dE = 1$, 常數로서 Watt式과 Maxwell式에 對하여 各各 다음과 같이 주어진다.

$$K_w = \frac{2\sqrt{\alpha^3}}{\beta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \dots\dots\dots(10)$$

$$K_m = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \dots\dots\dots(11)$$

(10) 및 (11)式에서 接尾添字 w 와 m 은 앞에서 說明한 바와 같다. 平均에너지, 最頻에너지 [$E_p(\text{MeV})$] 및 rms (root-mean-square), $s^2(E) = \int_{-\infty}^{\infty} (E - \bar{E})^2 n(E) dE$ 는 W-

att式과 Maxwell式에 對하여 各各 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{E}_w = \frac{3}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \dots\dots\dots(12a)$$

$$\bar{E}_m = \frac{\alpha + 1}{\beta} \dots\dots\dots(12b)$$

$$\sqrt{E_{p,w}} \tanh(\beta \sqrt{E_{p,w}}) = \frac{\beta}{2\alpha} \dots\dots\dots(13a)$$

$$E_{s,m} = \frac{\alpha}{\beta} \dots\dots\dots(13b)$$

$$S_w^2(E) = \frac{\alpha^{-2}}{2} \left(3 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \dots\dots\dots(14a)$$

$$S_m^2(E) = \frac{\alpha + 1}{\beta^2} \dots\dots\dots(14b)$$

\bar{E} 와 $S(E)$ 의 比, R ,를 求하면 Watt式 및 Maxwell式에 對하여 各各

$$R_w = \frac{S_w(E)}{\bar{E}_w} = \sqrt{\frac{2}{3}} \theta, \theta = \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3\alpha}}}{1 + \frac{\beta^2}{6\alpha}} \dots\dots\dots(15a)$$

$$R_m = \frac{S_m(E)}{\bar{E}_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} \dots\dots\dots(15b)$$

로 된다.

Table 1. α and β Values for Prompt Fission Neutron Spectrum due to $^{235}\text{U} + n(\text{th})$ Fission

α and β	Spectral Form		
	Watt	Cranberg	Maxwell
α	1	$\frac{1}{0.965}$	$\frac{1}{2}$
β	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2.29}$	0.775

우라늄-235의 熱中性子 核分裂에 對하여 Watt式, Cranberg式 및 Maxwell式의 α 및 β 값은 表 1과 같이 주어지므로 이들 表 1의 값을 (15)式에 代入하여 R_w 및 R_m 을 求하면 各各 0.791 및 0.816이 된다. 이것은 Watt式으로 나타낸 核分裂 中性子스펙트럼이 Maxwell式보다 좁은 分布를 하고 있다는 것을 뜻한다.

Watt²⁾ 및 Terrell¹⁰⁾에 依하면 α (Maxwell式에서의 α 는 除外)와 β 는 核分裂破片의 核溫度와 關聯된 것 같이 보인다. 그러나 一般化된 스펙트럼을 α 및 β 로 記述할 수 있을지는 疑問이다. 또 이런 表現式이 妥當하다고 할지라도 α 및 β 를 一意的으로 決定하기란 쉽지 않다. 그래서 表 1에 주어진 α 값을 (8) 및 (9)式에 代入하고 β 만의 媒介變數로서 核分裂 中性子스펙트럼을 一般化시키는데 이것은 取扱上的 簡便性 때문이다. 이때 α 값을 (12)式에 代入하고 平均値의 函數로서 β 값을 求하여 (8) 및 (9)式에 代入하면 (16)~

(18)식과 같은 一般化된 表現式을 얻게된다.

$$n_w(E) = \frac{5.057}{\sqrt{4\bar{E}-6}} \exp[-(\bar{E}+E)] \times \sinh \sqrt{(4\bar{E}-6)E} \dots\dots\dots(16)$$

$$n_w(E) = \frac{0.655}{\sqrt{4.295\bar{E}-6.218}} \exp[-1.036(\bar{E}+E)] \times \sinh \sqrt{(4.295\bar{E}-6.218)E} \dots\dots\dots(17)$$

$$n_m(E) = \frac{2.073}{E} \sqrt{\frac{E}{E}} \exp\left(-1.5 \frac{E}{E}\right) \dots\dots\dots(18)$$

(4)식에 따라 Maxwell式을 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$n_m(E) = 1.128 \sqrt{\frac{E}{T^3}} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \dots\dots\dots(19)$$

核分裂 誘起中성자의 에너지에 따라 變하는 몇가지 核分裂核種에 對한 $\bar{\nu}$, T 및 \bar{E} 를 提示하면 表 2와 같다. 表 2의 資料를 (12b), (13b) 및 (14b)에 代入하여 \bar{E}_m , $E_{p,m}$ 및 $S_m^2(E)$ 를 求하면 核分裂 誘起中성자의 에너지에 따라 \bar{E}_m , $E_{p,m}$ 은 增加하고 $S_m^2(E)$ 이 커지므로 分散程度는 더욱 커짐을 알 수 있다.

(16)~(19)식에 依한 計算値는 低 및 高에너지 領域에서 實驗値보다 낮은 값을 준다는 事實이 밝혀졌다.^{24), 25)} Frehaut 등²⁴⁾에 依하면 ²³⁵U의 경우, 實驗値는 1MeV 以下の 領域에서 Maxwell式보다 8% 程度 높다고 하며 Starostov 등²⁵⁾의 研究結果에 따르면 $T=1.31$ MeV의 Maxwell式은 0.05~0.15MeV 領域에서 實驗値 보다 約 30% 낮고 0.15~0.3MeV 사이에서 10% 程度 낮다. 이런 不一致가 생기는 原因을 Davey²²⁾ 및 Stewart²⁶⁾는 $(n, n'f)$ 및 $(n, 2n'f)$ 核反應에서 放出되는 中성자의 重疊때문이라 說明하고 있다. 예를 들면 ²³⁵U의 경우 核分裂 誘起中성자(또는 入射中성자)의 에너지가 5~6MeV 以上이면 複合核으로 부터 非彈性 散亂中성자가 放出될 수 있으며 殘留核(²³⁴U)은 이 中성자에 依하여 核分裂을 일으킨다. 또 入射中성자가 10~12MeV 以上이 되면 2個의 非彈性 散亂中성자가 放出되고 非彈性 散亂中성자의 入射로 殘留核

(²³⁵U)은 核分裂을 일으킬 수 있다. 決局 Watt式이나 Maxwell式에서 偏倚를 일으키게 하는 하나의 要因은 이들 中성자로 볼 수 있다. 이것을 解決하기 위한 方案의 하나로 Jaffey¹⁹⁾는 다음과 같은 두 Maxwell式的 重疊形態를 提案하게 되었다.

$$n_m(E) = a_1 k_1 \sqrt{E} \exp(-E/T_1) + a_2 k_2 \sqrt{E} \times \exp(-E/T_2) \dots\dots\dots(20)$$

여기서 $a_1+a_2=1$ 이고 k_1 및 k_2 는 規格化常數며 T_1 및 T_2 는 核分裂破片의 核溫度를 나타낸다. 이 (20)式을 一意的으로 論다는 것은 쉬운일이 아니며 理論的인 뒷받침도 받지 못하여 核分裂 中성자스펙트럼의 解析的인 表現式을 (16)~(18)또는 (19)式으로 取하는 것이 普通이다.

3. 計 算

本 研究에서 考慮對象으로 삼은 核物質系의 特性은 表 3 과 같다.⁸⁾ 各系의 殘餘 核物質構成成分이 알려져 있지 않기 때문에 여기서는 便宜上 GODIVA系 및 JEZEBEL系에 對해서 殘餘成分은 각각 ²³⁸U과 ²⁴⁰Pu으로 보았다. 考慮對象系는 高速臨界裝置이므로 核分裂을 일으키는 中성자는 바로 核分裂로 因해 放出된 即發中성자가 된다. 그러므로 表 4의 4째 및 5째칸의 資料를 (16)~(18)식에 代入하여 얻은 即發中성자스펙트럼을 核分裂中성자의 線源項으로 取했다. 그러나 ²³⁸U 및 ²⁴⁰Pu에 對한 實驗資料는 알려져 있지 않으므로 이들에 對해서는 2.09MeV(表 2 參照) 資料를 썼다.

이것을 根據로 하여 一次元 輸送方程式을 S_m 近似法이라고도 부르는 角分割方法²⁷⁾으로 풀어서 對象系의 有效增倍係數를 求했는데 本 研究에서는 中성子 散亂을 等方으로 假定하고 角 및 空間을 各各 16 및 40個 區間으로 나누었으며 中성子의 에너지스펙트럼을 16個 區間으로 分割하였다. 여기서 쓴 16個 核群斷面積은 Hansen-Roach²⁸⁾ 資料에서 拔萃되었으므로 有效增倍係數

Table 2. Prompt Fission Neutron Spectral Parameters for Some Fissile Nuclides

Fissile Nuclide	Incident Neutron Energy	$\bar{\nu}$	Maxwellian Temp., T (MeV)	\bar{E} (MeV)	Ref.
²³⁵ U	Thermal	2.418	1.29	1.94	22
²³⁵ U	Fission Neutron	2.800	1.34	2.01	13
²³⁸ U	2.09MeV	2.580	1.31	1.97	16
²³⁹ Pu	Thermal	2.871	1.35	2.02	22
²³⁹ Pu	Fission Neutron	3.120	1.37	2.06	13
²⁴⁰ Pu	2.09MeV	3.200	1.38	2.07	23

의 計算에 쓰인 電算코드는 ANISN⁹⁾이었다. 原則的으로 對象核物質系 및 核分裂의 特性을 考慮하여 求한 核群斷面積資料를 入力으로 써야 할 것이다. 그러나 이에 對한 것은 앞으로의 研究課題로 남기코자 한다.

4. 結果 및 檢討

前述한 바와 같이 有限角分割(16個) 및 等方散亂의 假定下에서 算出한 有效增殖係數値를 Lathrop²⁹⁾의 研究結果에 따라 補正하고 그 結果를 表 5에 실었다. 表 5에서 알 수 있는바와 같이 Watt 式과 Cranberg 式에 對한 計算値는 서로 비슷한 것 같으며 實驗値에 가장 가까운 有效增殖係數값을 주는 것은 Maxwell 式으로

보인다.

核反應斷面積에 對한 最新資料와 核分裂의 特性을 考慮하여 核群斷面積을 算出하지 못하고 既存 Hansen-Roach²⁹⁾의 核群斷面積資料를 써서 얻은 結果이기 때문에 Maxwell 式이 核分裂 即發中性子스펙트럼을 가장 잘 表現하는 것으로 結論을 내리기는 성급한 것 같다. 그러나 Hansen-Roach의 資料가 高速臨界裝置의 核臨界面 分析用으로 開發된 것이기 때문에 이 資料에 의한 結果로 부터 Maxwell 式을 核分裂 即發中性子스펙트럼의 適切한 表現式으로 풀이하더라도 큰 무리는 없어 보인다. 그러나 앞으로의 研究結果가 나올 때 까지 最終的인 結論은 유보코자 한다.

Table 3. Characteristics of Critical Assemblies

Characteristics	Critical Assembly	
	GODIVA	JEZEBEL
System	Bare Sphere of U	Bare Sphere of Pu
Enrichment	93.71% ²³⁵ U Metal	95.2% ²³⁹ Pu Metal
Density (g/cc)	18.74	15.61
Critical Radius (cm)	8.741	6.385
Critical Mass (kg)	52.425	17.021
K _{eff} (Measured)	1.0±0.3%	1.0±0.3%

Table 4. Average Energy of Prompt Fission Neutron

Spectral Form	Average Energy (MeV)			
	Thermal Fission		Fission due to Prompt Fission Neutron	
	²³⁵ U*	²³⁹ Pu	²³⁵ U	²³⁹ Pu
Watt	2.000	2.087**	2.074**	2.128**
Cranberg	1.980	2.066**	2.054**	2.107**
Maxwell	1.935	2.019*	2.007**	2.059**

* Calculated by Eq. (12) with α and β values in Table 1.

** Deduced from the average values for the thermal fission of ²³⁵U.

* Computed by Eq. (7) with $\bar{\nu}$ value from Ref. 22.

** Calculated by Eq. (7) with $\bar{\nu}$ values from Ref. 13.

Table 5. Calculated K_{eff} Value Using 16 Group Hansen-Roach Set

Assembly	K _{eff}			
	Experiment*	Calculation (Present Work)		
		Watt	Cranberg	Maxwell
GODIVA	1.000±0.003	0.998575	0.998248	0.998813
JEZEBEL	1.000±0.003	0.991326	—	0.994321

* Taken from Ref. 8.

參 考 文 獻

1) V. Weisskopf, Phys. Rev. **52**, 295(1937).
 2) B.E. Watt, Phys. Rev. **87**, 1037(1952).
 3) L. Cranberg, G. Frye, N. Nereson and L. Rosen, Phys. Rev. **103**, 662(1956).
 4) C.G. Campbell and J.L. Rowlands, "Discrepances between Integral and Differential Measurements of the Prompt Fission Neutron Energy Spectrum," in Prompt Fission Neutron Spectra (Proc. Consultants' Meeting, Vienna, 25~27 Aug. 1971), p. 33, IAEA, Vienna (1972).
 5) N.M. Steen, Trans. Am. Nucl. Soc. **28**, 712 (1978).
 6) A. Koster, "A Review of Prompt Fission Neutron Spectrum Data for ²³⁵U and ²³⁹Pu Neutron-Induced Fission and ²⁵²Cf Spontaneous Fission," in Prompt Fission Neutron Spectra (Proc. Consultants' Meeting, Vienna, 25~27 Aug. 1971) p. 19, IAEA, Vienna(1972).
 7) H.H. Knitter et al., "Fission Neutron Energy Spectra Induced by Fast Neutrons on ²³⁸U, ²³⁵U and ²³⁹Pu," *ibid*, p. 19, IAEA, Vienna (1972).
 8) National Neutron Cross Section Center, "ENDF-202 Cross Section Evaluation Working Group Benchmark Specifications," BNL-19302 (1974).
 9) W.W. Engle, Jr., K-1693 (1967).
 10) J. Terrell, Phys. Rev. **113**, 527 (1959).
 11) J. Terrell, Phys. Rev. **127**, 880 (1962).
 12) J. Terrell, "Prompt Neutrons from Fission," in Proc. Conf. on Physics and Chemistry of Fission, Vol. II, p. 3, IAEA, Vienna (1965).
 13) I.I. Bondarenko et al., "Average Number and Spectrum of Prompt Neutrons Fast-Neutron-Induced Fission," Proc. 2nd. U.N. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. II, U.N., New York, 193 (1956).
 14) J.C. Hopkins and B.C. Diven, Nucl. Phys. **48**, 433 (1963).
 15) D.S. Mather, P. Fieldhouse and A. Moat, Phys. Rev. **133**, 23 (1964).
 16) E. Barnard et al., Nucl. Phys. **71**, 228 (1965).
 17) H. Condé and G. During, Arkiv för Fysik **29**, 313 (1965).
 18) I. Heertje, "Fast Neutron Activation Detectors," Ph.D. Thesis of Univ. of Amsterdam (1963).
 19) A.H. Jaffey, ANL-7747 (1970).
 20) D.H. Kim, H.S. Kim and J.C. Yang, J. Kor. Nucl. Soc. **2**(2), 67 (1970).
 21) S.G. Ro, J. Kor. Nucl. Soc. **2**(2), 85 (1970).
 22) S.F. Mughabyhab and D.I. Garber, BNL-325 (3rd ed.) (1973).
 23) W.G. Davey, Nucl. Sci. Eng. **44**, 345 (1971).
 24) J. Frehant, A. Bertin and R. Bois, Trans. Am. Nucl. Soc. **32**, 732 (1979).
 25) B.I. Starostov, A.F. Semenov and V.N. Nefedov, INDC(CCP)-164/L (Trans. by IAEA) (1981).
 26) L. Stewart, Trans. Am. Nucl. Soc. **32**, 725 (1979).
 27) B.G. Carlson and K.D. Lathrop, "Transport Theory, The Method of Discrete Ordinates," in Computing Methods in Reactor Physics (H. Greenspan, C.N. Kelber and D. Okrent eds.), p. 165, Gordon and Breach, New York (1968).
 28) G.E. Hansen and W.H. Roach, LAMS-2543 (1961).
 29) K.D. Lathrop, ANL-7416 (1968).

Effect of Prompt Fission Neutron Spectral Formulae on Nuclear Criticality

Seung Gy Ro. Duck Kee Min. Geun Uck Youk. Hi Peel Oh*

Daeduk Engineering Center, Korea Advanced Energy Research Institute, Chung-Nam, Korea

Abstract

A calculation of the effective multiplication factor has been made for GODIVA and JEZEBEL critical assemblies by using a computer code, ANISN, with having the Watt's, Cranberg's and Maxwellian formulae for the prompt fission neutron spectrum as a fission source. Then the calculated values have been compared with experimental data obtained by others.

The Maxwellian formula seems to be the best one for representing the prompt fission neutron spectrum since the effective multiplication factor based on it shows a better agreement with the experimental value compared to the rest formulae.