

터널 슛크리트 라이닝의 장기 내구성 저하 평가를 위한 수치모델의 개발 Development of a Numerical Model for Evaluation of Long-Term Mechanical Degradation of Shotcrete Lining in Tunnels

신휴성¹⁾, Hyu-Soung Shin, 임종진²⁾, Jong-Jin Lim, 김동규¹⁾, Dong-Gyu Kim, 이규필¹⁾, Gyu-Phil, Lee, 배규진³⁾, Gyu-Jin Bae

¹⁾ 건기연 지반연구부 선임연구원, Senior Researcher, Geotechnical Engineering Division, KICT

²⁾ 건기연 지반연구부 연구원, Researcher, Geotechnical Engineering Division, KICT

³⁾ 건기연 지반연구부 연구위원, Senior Research Fellow, Geotechnical Engineering Division, KICT

SYNOPSIS : In this study, a new concept for simulating a long-term mechanical degradation mechanism of shotcrete in tunnels has been proposed. In fact, it is known that the degradation takes place mainly by internal cracks and reduced stiffness, which results mainly from volume expansion of shotcrete and corrosion of cement materials, respectively. This degradation mechanism of shotcrete in tunnels appears similar to those of the most kinds of chemical reactions in tunnels. Therefore, the mechanical degradation induced by a kinds of chemical reaction was generalized and mathematically formulated in the framework of thermodynamics. The numerical model was implemented to a 3D finite element code, which can be used to simulate behaviour of shotcrete structures undergoing external forces as well as chemical degradation in time. A number of illustrative examples were given to show the feasibility of the model in tunnel designs with consideration of long-term degradation effect of shotcrete quantitatively for increase of long-term safety of tunnels.

Key words : long-term mechanical degradation of shotcrete in tunnels, numerical model, 3-D finite element analysis, mechanical damage of shotcrete due to chemical reactions

1. 서 론

본 연구에서는 일반적으로 알려진 터널 슛크리트 지보재의 주요 화학적 열화과정의 특성을 알아보고 각 화학반응들이 슛크리트 구조체에 어떠한 물리적 손상을 초래하는지에 대하여 파악하고 이들을 표 1에서 간략하게 분류하여 일반화 하였다.

표 1. 대표적인 슛크리트의 열화반응 및 일반화시킨 물리적 손상원인

화학적 열화과정의 종류	주요 열화반응 결과	주요 물리적 손상원인
중성화 반응	강재부식 및 다공질화	내부압 발생 + 재료강성 저하
염해	강재부식 및 화학 부산물 생성	내부압 발생
산성 및 황산염 반응	강재부식, 화학 부산물 생성, 침식	내부압 발생 + 재료강성 저하
알카리 골재 반응	화학 부산물 생성	내부압 발생
동결융해	공극수의 동결로 부피 팽창	내부압 발생

표 1에서와 같이 다양한 숯크리트의 열화반응들은 강섬유 및 와이어 메쉬와 같은 철재를 부식시키고 다양한 화학반응을 통해 생성된 부산물들에 의해 공극의 부피 팽창을 유발하여 궁극적으로 내부압력으로 작용하게 되므로 내부균열 뿐만 아니라 표면부에서는 박리현상을 초래한다. 또한, 다양한 화학반응들에서 공통적으로 요구되는 주요 반응물질은 지하수와 지하수 구성성분 그리고 숯크리트내의 석회질이므로 이러한 화학반응은 숯크리트의 강성을 좌우하는 석회질 함량을 감소시킴으로써 숯크리트의 다공질화를 초래한다. 이는 즉각적으로 탄성계수와 같은 숯크리트의 역학적 강성뿐만 아니라 강도저하를 초래하여 파괴에 대한 내성을 저하시킨다.

숯크리트의 열화에 의해 발생하는 내부균열 및 표면 박리현상은 화학반응의 부산물들이 팽창하는 것에 주로 기인하고 팽창 정도에 따라 균열발생 가능성은 높아지게 된다. 이를 일반화된 역학적 손상 메카니즘으로 표현하기 위하여 주어진 화학적 열화조건 및 열화특성은 시간에 따른 시료의 부피 팽창율을 이용하여 표현할 수 있다. 이러한 부피 팽창을 활용개념은 고려되는 화학적 열화종류가 부피팽창을 초래하여 구조물에 물리적 손상을 주는 것이라면 해당되는 화학반응의 종류와 상관없이 일반화된 손상평가 방법으로 사용될 수 있을 것이다.

또 다른 하나의 주요한 물리적 손상 요인은 숯크리트의 강성 저하이다. 위에서도 언급하였지만 시간에 따른 탄성계수의 저하와 강도정수값들의 감소곡선을 통해 표현될 수 있을 것이다. 이들을 얻어내기 위해서는 체계적인 실험과정과 분석체계가 만들어 져야 한다(임종진 등, 2005). 실험을 통해 주어진 열화환경에 대하여 숯크리트의 시간에 따른 매질정수값들의 변화곡선이 결정이 된다면 이를 고려하여 모사할 수 있는 수치모델이 유도되어야 한다. 이러한 수치모델은 유한요소와 같은 일반적인 구조해석 코드에 접목되어 주어진 터널의 기하와 주변 초기응력 조건을 고려한 구조해석을 수행하기 위하여 사용될 수 있다. 여기서 고려되어야 할 중요한 사실은 숯크리트 구조체의 물리적 손상은 화학적 열화반응만에 의해 좌우되는 것이 아니고, 이러한 열화반응에 의한 내구성 저하는 숯크리트 구조체가 받고 있는 하중조건과 연계되어 물리적 손상이 평가되어야 한다는 것이다. 같은 열화과정을 겪는 숯크리트라도 주어진 외부 하중조건에 따라 예상되는 내부균열 등의 물리적 손상경향이 분명히 달라진다.

이러한 배경으로 본 연구에서는 상기에서 언급된 다양한 논리를 가지고 터널내에 발생 가능한 열화 메카니즘을 일반적으로 표현할 수 있는 수치모델을 개발하고 유한요소해석에 활용할 수 있는 기반을 마련하였다. 이러한 목적으로 설정된 연구체계는 다음의 그림 1와 같다.

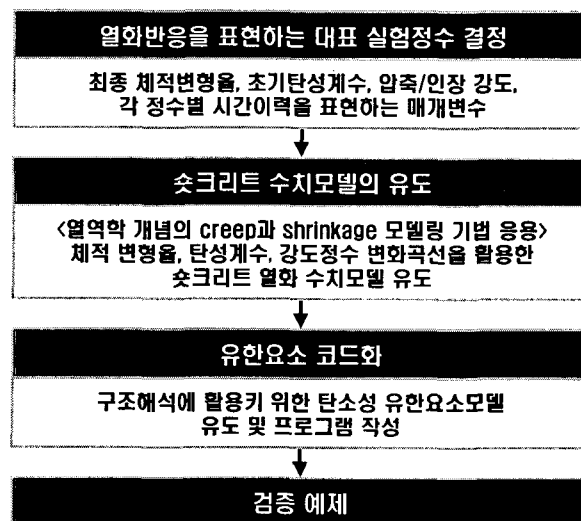


그림 1. 숯크리트 장기 내구성 평가용 수치모델 개발 체계

2. 숯크리트 터널 지보재의 장기 내구성 저하 수치모델의 유도

본 연구에서 적용코자 하는 이론적 개념은 열역학에서 사용하는 매질의 열팽창 특성을 모사하는 방식

과 유사한 방식이다. 열역학에서는 매질의 열팽창에 의한 크립(creep)과 움츠러짐(shrinkage)현상을 적절히 묘사하기 위한 다양한 구성방정식이 제안되어 왔다(Bazant, 1988; Bathe, 1982). 이러한 개념을 도입하여 유사한 형태로 댐 구조물의 알칼리 골재반응에 의한 구조물의 물리적 손상에 대한 매우 단순한 형태의 구성방정식이 유도된 바 있다(Pietruszczak, 1996). 유도된 구성방정식은 캐나다 몬크리올 근처에 위치한 Beauharnois 댐의 알칼리 골재반응에 의한 구조물의 내구성 저하를 평가에 적용되었다(Huang & Pietruszczak, 1999).

본 연구에서도 숏크리트의 화학적 열화과정에 의해 생성된 부산물의 부피팽창이 숏크리트의 물리적 손상을 초래한다는 점에 착안하여 상기 열팽창 개념으로 매질의 역학적 거동을 묘사하고자 하였다. 여기서 매질의 물리적 손상을 묘사하기 위해 적용되는 체적 변형율과 탄성계수 그리고 압축/전단장도는 화학적 열화반응시간 (pseudo chemical reaction time)에 따라 변화하는 함수가 된다. 이러한 시간의존 매질계수들을 사용하여 매질의 역학적 거동을 묘사하기 위해 사용된 구성방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

2.1 숏크리트의 화학적 열화에 대한 구성방정식의 유도

탄성영역내에서 매질의 부피팽창에 대한 매질의 변형과정의 일반적인 구성관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\epsilon\} = [C^e]\{\sigma\} + \frac{1}{3}\epsilon_A\{m\} + \{\epsilon_T\} \quad (1)$$

여기서 $[C^e]$ 는 탄성행렬의 역행렬인 컴플라이언스(compliance) 행렬이며, $\{m\}$ 은 Kronecker delta와 유사한 형태의 연산자 벡터이다. 또한, ϵ_A 는 화학적 열화반응에 기인한 체적 변형율이며 $\{\epsilon_T\}$ 는 열변형을 벡터이다. 식 (1)의 우측변 마지막항의 열변형을 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\{\epsilon_T\} = \frac{1}{3}\beta_T(T - \bar{T})\{m\} \quad (2)$$

여기서 β_T 는 열팽창 계수이며 T 와 \bar{T} 는 각각 현 시점의 온도와 기준온도를 의미한다. 식 (1)을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{\dot{\epsilon}\} = [C^e]\{\dot{\sigma}\} + [\dot{C}^e]\{\sigma\} + \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_A\{m\} + \frac{1}{3}\beta_T\dot{T}\{m\} \quad (3)$$

식 (3)의 우측항 두 번째 항은 지속적인 화학적 열화반응에 기인한 숏크리트 매질의 탄성물성의 저하를 묘사한다. 상기식들을 기반으로 숏크리트 라이닝의 화학적 열화반응에 대한 역학적 거동특성을 수학적으로 묘사하기 위하여 다음과 같은 화학적 열화진행 시간 t' 를 도입한다. 이는 화학적 열화반응 이력에 의하여 영향을 받는 하나의 국부적인 매질특성으로 고려될 수 있다. 이러한 열화진행 시간 t' 에 대하여 매질의 물리적인 거동특성 변화는 다음과 같은 형태로 진행되는 것으로 가정한다.

$$\dot{\epsilon}_T = g_1(\{m\}^T\{\sigma\})\dot{g}_3(t'); \quad dt' = g_2(T)dt \quad (4)$$

여기서 g_3 는 주어진 화학적 열화조건하에서의 자유 체적 팽창율을 나타내며, g_1 과 g_2 는 각각 정수압 및 온도에 의한 구속효과를 나타낸다. 기존의 실험적 연구결과(Magni et al., 1986; Hobbs, 1988)에 따르면

함수 g_1 과 g_3 는 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$g_3(t') = \frac{\epsilon_{\max} t'}{A_3 + t'}, \quad t' \rightarrow \infty \rightarrow g_3 \rightarrow \epsilon_{\max} \quad (5)$$

$$g_1(\{m\}^T\{\sigma\}) = \exp(A_1\{m\}^T\{\sigma\}/f_{c_0}), \quad 0 \leq g_1 \leq 1 \quad (6)$$

여기서 A_1 와 A_3 는 숏크리트 라이닝의 매질상수이며, f_{c_0} 는 초기 일축 압축강도이다. 또한, ϵ_{\max} 는 화학적 열화반응이 완료된 후에 측정된 최대 체적 팽창율이다. 일반적으로 매질의 부피팽창에 직접적으로 영향을 주는 화학 열화반응속도는 대상 매질내에 대상 화학반응식에 사용되는 성분들이 얼마만큼 함유되어 있는가에 좌우된다. 또한, 터널의 숏크리트 라이닝에 작용 가능한 열화반응 중 중성화 반응과 알칼리 골재반응 등의 열화 반응속도는 온도에 큰 영향을 받는다. 이러한 온도의 영향을 모델링하기 위하여 함수 $g_2(T)$ 를 사용할 수 있다. 범함수 형태의 g_2 는 기존 실험적 연구결과(Pleau et al., 1989)에 기초하여 식 (7)과 같이 표현된다.

$$g_2(T) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{T - T_0}{A_2} \right) \right) \quad (7)$$

여기서 A_2 와 T_0 는 매질상수들이다. 일반적으로 g_2 는 0과 1사이의 범위내에서 정의된다. 낮은 온도에서는 반응속도가 늦어지며 즉, $g_2 \rightarrow 0$ 으로 되며, 높은 온도에서는 1에 가까워 진다, 즉, 식 (4)에서 $dt' = dt$ 이 된다. 온도가 올라가면 가상의 시간 개념인 화학적 열화진행 시간 t' 가 실시간 개념의 t 에 가까워 진다는 것을 의미한다. 주어진 상기의 정의에 의하여 반응속도를 지배하는 상관관계식은 식(4)-식(6)으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{g}_3 = \frac{\epsilon_{\max} \left(1 - \frac{g_3}{\epsilon_{\max}} \right)^2}{A_3} g_2(T) \quad (8)$$

여기서 $\frac{g_3}{\epsilon_{\max}}$ 은 0에서 1사이의 값을 갖으며, 화학적 열화반응의 진전과정을 나타낸다. 숏크리트 라이닝의 역학적 매질특성, 특히 탄성계수와 압축 및 인장강도의 저하는 주로 매질의 역학적 손상에 의해 초래된다. 이러한 역학적 손상은 지속되는 화학적 열화과정동안 생성되는 화학반응의 부산물들에 의해 발생하는 내부압에 기인한 내부균열과 화학반응을 통해 숏크리트의 주요성분의 함량이 감소함에 따른 다공질화에 의해 발생한다. 이러한 탄성계수와 강도정수들의 감소현상은 다음과 같은 간단한 형태의 함수로 표현될 수 있다.

$$E = E_0 \left[1 - (1 - B_1) \frac{g_3}{\epsilon_{\max}} \right]; \quad f_c = f_{c_0} \left[1 - (1 - B_2) \frac{g_3}{\epsilon_{\max}} \right] \quad (9)$$

여기서 B_1 과 B_2 는 매질상수이며, 명백히 g_3 가 ϵ_{\max} 에 가까워짐에 따라 $E \rightarrow B_1 E_0$ 이 되며 $f_c \rightarrow B_2 f_{c_0}$ 가 된다. 따라서 매질정수들은 본 유도에서 도입한 화학적 열화진행 시간 t' 에 대해 변화하

는 함수이면서 실시간 개념의 t 와도 관련이 있다. 하지만 일반적인 수치해석과정에서는 실험결과와 연계하여 실시간 t 개념으로 수행될 수 있을 것이다.

이상과 같이 유도된 슛크리트의 화학적 열화모델은 정의된 변형율을 일반적인 탄소성 매질모델의 응력 및 변형율항에 추가함으로써 일반적인 구조해석에 적용될 수 있다. 따라서 식 (3)에서 정의된 구성관계식을 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$$\{\dot{\epsilon}\} = [C^e]\{\dot{\sigma}\} + [\dot{C}^e]\{\sigma\} + \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_A\{m\} + \frac{1}{3}\beta_T\dot{T}\{m\} + \dot{\epsilon}^p \quad (10)$$

또는

$$\{\dot{\sigma}\} = [D^e](\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p - [\dot{C}^e]\{\sigma\} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_A\{m\} - \frac{1}{3}\beta_T\dot{T}\{m\}) \quad (11)$$

여기서 $[D^e]$ 는 탄성 구성행렬이다. 소성변형율을 정의하기 위하여 적용되는 항복함수 $f = 0$ 은 t 에 대한 화학적 열화과정에 의해 영향을 받는 것으로 가정한다. 따라서

$$f(\{\sigma\}, \{\epsilon^p\}, t) = 0; \quad \{\dot{\epsilon}^p\} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \quad (12)$$

이다. 여기서, $Q(\{\sigma\})$ 은 표준 소성 포텐셜 함수이다. 주어진 항복함수에 대한 항복조건 $df = 0$ 을 만족시키기 위한 조건식을 시간에 대하여 다음과 같이 유도하고

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \{\epsilon^p\}} \right)^T \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} + g_2 \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

표준 탄소성 유도과정에 따르면 다음과 같은 최종적인 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} = [D^{ep}] \left(\dot{\epsilon} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_A\{m\} - \frac{1}{3}\beta_T\dot{T}\{m\} \right) - \\ \left(\frac{1}{H} [D^e] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \left(\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right)^T - [I] \right) [\dot{D}^e][C^e]\{\sigma\} - \\ \frac{g_2}{H} \frac{\partial f}{\partial t} [D^e] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $[I]$ 는 단위행렬이며,

$$\begin{aligned} [D^{ep}] = [D^e] \left(1 - \frac{1}{H} [D^e] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \left(\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \right); \\ H = \left(\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D^e] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \{\epsilon^p\}} \right)^T \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \end{aligned} \quad (15)$$

이다. 구성방정식 (14)는 일반적인 유한요소코드내의 매질모델로써 코드화되어 다양한 구조형상 및 초기 응력조건하의 구조해석에 활용된다. 그림 2는 상기의 수치모델이 유한요소 코드에 프로그램화된 개념도를 보여준다. 상기에서 유도된 수치모델은 일반적인 유한요소 해석과정에서 주어진 time step에서의 저하된 물성값들을 결정함으로써 적절한 매질의 탄성행렬을 계산할 수 있도록 하며, 항복조건과 응력누적과정에서 요구되는 탄소성행렬을 제공한다.

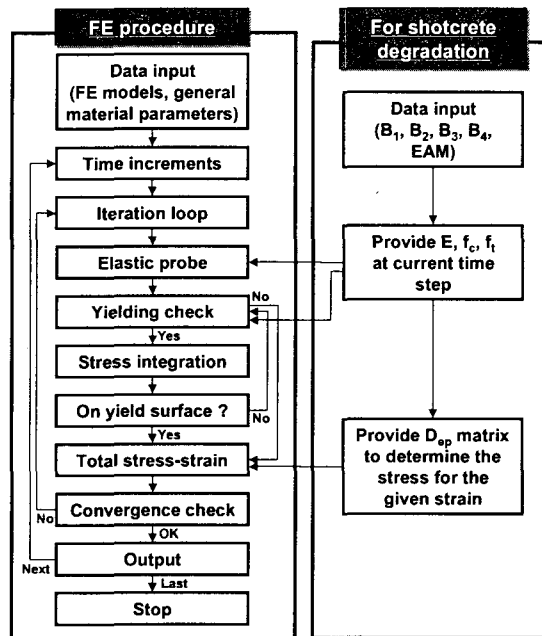


그림 2. 숏크리트 내구성 저하 수치모델과 연계된 유한요소 계산과정

그림 2의 우측에 나타난 바와 같이, 본 연구에서 유도된 수치모델에서 요구되는 매질정수들은 일반적인 매질물성 외에 다음과 같은 것들이 있다.

- A_1 : 정수압의 영향을 모사키 위하여 설정된 매개변수 (함수 g_1 과 관련)
- A_3 : 시간에 따른 체적변형율의 변화를 정의하기 위한 정수
- B_1 : 시간에 따른 초기 탄성계수의 저하를 정의하기 위한 정수
- B_2 : 시간에 따른 초기 강도정수의 저하를 정의하기 위한 정수
- EAM: 최대 체적변형율

이외에 유도수식들에 포함되어 있는 정수 A_2 는 열팽창에 관련된 항목이므로 본 연구에서는 고려하지 않는 것으로 한다.

2.2 해석 예제

본 연구에서 유도된 숏크리트 내구성저하 수치모델을 개략적으로 검증하기 위하여 몇몇의 구속압에 대한 매개변수 연구를 수행하였다. 이때 본 연구에서 프로그램화된 숏크리트 열화 수치모델을 내장한 자체 개발 유한요소 코드 SELINA3D를 이용하였다. 문제를 단순화 하여 매개변수 연구결과를 명확히 확인하기 위하여 한개의 20절점 강체요소를 사용하였다. 숏크리트의 화학적 열화반응이 일어나기 이전에 구속압을 가하고 열화반응 동안 변화하는 매질의 축 변형율과 수평변형율의 변화추이를 관찰하였다. 숏크리트 열화 수치모델이외에 사용된 항복모델은 2개의 항복면으로 매질의 다양한 소성거동 특성을 모사할 수 있는 two surface모델이 적용되었다(Pietruszczak et al., 1988). 사용된 매질정수값들은 표 2와 같다.

표 2 매개변수 연구에 사용된 매질정수

매질정수	정수값	매질정수	정수값
초기 탄성계수	50 GPa	A ₃	200
포아송비	0.25	B ₁	0.3
초기 압축강도	30 MPa	B ₂	0.8
초기 인장강도	3 MPa	EAM	0.001

2.2.1 압축 구속압에서의 열화거동 특성

열화가 개시되는 시점의 압축력(10MPa, 20MPa, 25MPa)을 달리 설정하고 숯크리트 매질의 열화거동 특성을 알아보았다. 그림 3은 각 열화가 개시된 압축응력상태에 대한 축방향 변형을 변화를 보여준다.

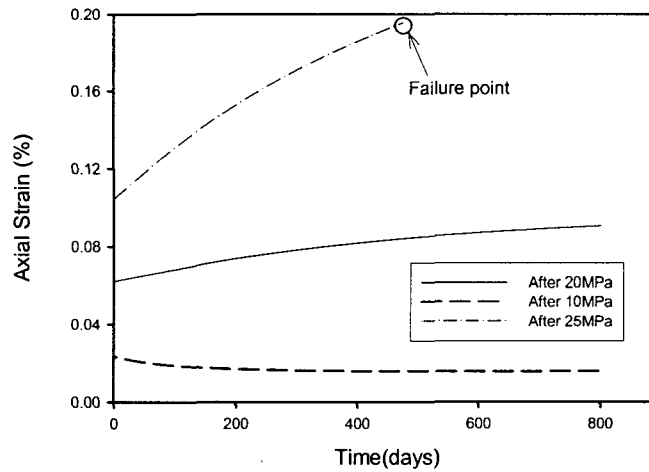


그림 3. 서로 다른 압축응력 상태에서 개시된 열화시료의 축 변형을 변화 추이

본 해석에서는 숯크리트의 화학적 열화가 발생함과 동시에 내부 체적변형율이 증가가 시작된다. 그림 3에서와 같이 증가되는 체적팽창은 압축내압을 유발하고, 가압되는 압축응력과 상충되어 오히려 열화시기가 빠를수록, 즉, 작은 압축응력상태에서 열화가 시작될수록 파괴에 보다 안정화된 거동을 보인다. 이로부터, 숯크리트 라이닝에 지속적인 하중이 가해진다면 열화시점이 늦을수록 압축력에 대한 구조물의 파괴 위험성이 커짐을 알 수 있다. 또한, 같은 속도로 압축력이 가해진다고 하여도 열화에 의해 발생하는 내부 팽창압과의 상쇄정도가 다르게 되며, 열화에 의한 숯크리트 구조물의 파괴 안전성은 열화시점의 응력상태에 크게 영향을 미침을 알 수 있다.

2.2.2 인장 구속압에서의 열화거동 특성

열화가 개시되는 시점의 인장력(2MPa, 2.5MPa, 2.8MPa)을 설정하고 숯크리트 매질의 열화거동 특성을 알아보았다. 그림 4는 각 인장 구속압 조건에 대한 축방향 변형을 변화를 보여준다.

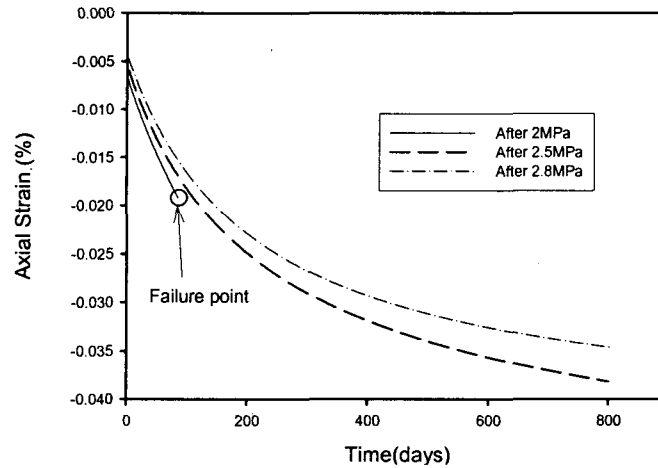


그림 4. 서로 다른 인장응력 상태에서 개시된 열화시료의 축 변형을 변화 추이

그림 4에서는 인장 구속압이 작을수록, 같은 속도로 인장력이 가짐에 따라 축방향 변형율이 급격히 변화하는 경향을 보여주고 있다. 특이할 사항은 같은 속도로 가해주는 인장 가압상태에서 열화 시점이 상이함에 따라 숏크리트 구조물의 파괴 위험성이 달라진다.

3. 결론

본 연구에서는 온천지역, 광산지역 및 해안 연안 등지에서 발생 가능한 염해, 황산염 반응 등과 같은 터널 숏크리트 지보재의 다양한 화학적 및 물리적 열화조건하에서 숏크리트의 장기 내구성 저하 정도를 정량적으로 예측하기 위한 수치모델을 유도하였다. 유도된 수치모델은 동반 논문(임종진 등, 2005)에서 제시된 현장조사 및 실험체계를 이용해 결정 가능한 열화정수들을 이용하여 다양한 경계 하중조건하에서 터널 숏크리트 구조체의 장기거동을 예측하고 시간 경과에 따른 물리적 손상정도를 예측하는데 적용된다. 간단한 예제를 통해 화학적 열화반응 뿐만 아니라 경계 하중조건에 따라 숏크리트 구조체의 유효 연령이나 물리적 손상속도에 큰 차이가 있음을 알 수 있었다. 현재 본 연구를 통해 제안된 수치모델은 실제 터널설계에 적용하기 위하여 다양한 현장조사와 실험실증 연구가 수행 중에 있다.

4. 참고문헌

1. 임종진, 신휴성, 배규진(2005), "터널 숏크리트 라이닝의 장기 내구성 평가를 위한 실험기법 개발", 한국지반공학회 춘계 학술발표회 논문집.
2. 한국건설기술연구원(2004), "한국형 싱글셀 터널공법개발(I)", 건설교통부 산학연 연구과제 연차보고서(1차년도).
3. Huang, M. and Pietruszczak, S.(1999), "Modelling of thermomechanical effects of alkali-silica reaction", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, Issue 4, pp. 476-485.
4. Pietruszczak, S.(1996), "On the mechanical behaviour of concrete subjected to alkali-aggregate reaction", *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 6, pp. 1093-1097.
5. Bazant, Z. P.(1988), *Mathematical modelling of creep and shrinkage of concrete*, Wiley, New York.
6. Bathe, K. J.(1982), *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall.
7. Magni, E. R., Rogers, C. A. and Grattan-Bellew, P. E.(1986), "The influence of the alkali-silica reaction on structures in the vicinity of Sudbury, Ontario", *Proc., 7th Int. Conf on Alkali-Aggregate Reaction in Concrete*, pp. 17-21.
8. Hobbs, D. W.(1988), *Alkali-silica reaction in concrete*, Thomas Telford, London.