

# Top-Covered 마이크로스트립구조의 Closed-form 그린함수

°김 건 우\*, 고지환\*\*, 이 영 순\*\*, 조 영 기\*

\*경북대학교 전자공학과

\*\*금오공과대학교 전자공학부

kkw0073@rose0.knu.ac.kr

## A Closed-form Green's Function for Top-Covered Microstrip Substrate

°K. W. Kim\*, J. H. Ko\*\*, Y. S. Lee\*\*, Y. K. Cho\*

\*School of Electrical Engineering and Computer Science, Kyungpook National

\*\*School of Electronic Engineering, Kumoh National University of Technology

### Abstract

So far, the closed-form Green's functions have been derived almost for the open microstrip structures. In the present study, closed-form Green's functions for a top-covered microstrip structure are derived. And an effect of top-cover is discussed in comparison with open structure.

### I. 서론

마이크로스트립구조의 공간영역 그린함수는 파수영역 그린함수를 피적분 함수로 갖는 Sommerfeld 적분 형태로 표현된다. 공간영역 그린함수를 수치적분법에 의해 계산하게 되면 많은 계산시간을 필요로 한다. 이러한 계산시간을 줄이기 위하여 적분식 형태의 그린함수를 closed-form으로 바꾸는 방법들<sup>[1-3]</sup>이 제안되었다.

이러한 방법들은 Complex image method<sup>[1,2]</sup>로도 불리고 있으며, 파수영역 그린함수를 GPOF법이나 Prony법을 이용하여 복소지수함수의 합으로 근사화한 후, Sommerfeld identity를 사용하여 해석적 역변환 함으로써 공간영역 그린함수를 closed-form 형태로 표현하게 된다.

최근에 와서는 그린함수 계산의 효율성뿐만 아니라 그린함수가 MoM에 사용되어질 경우, 효율적인

행렬요소 계산을 할 수 있는 새로운 closed-form 그린함수법이 제안되고 있다. Y. Ge 등은 이러한 새로운 closed-form 그린함수법<sup>[3]</sup>에서 Sommerfeld identity 대신에 Bessel 함수의 적분공식을 이용하여 그린함수를 closed-form 형태로 표현하는 방법 (General complex image method)을 제안하였다. General complex image method에 의해 구해진 그린함수는 기존의 방법으로부터 구해진 closed-form 표현식과 달리  $\frac{e^{-jkr}}{r}$  형태를 갖지 않게 되어 new closed-form으로 불린다.

이와같은 closed-form 그린함수는 지금까지 대부분 개방된(open) 마이크로스트립 구조체에 관하여 유도되어져 왔다. 따라서, 본 논문에서는 몰딩(molding)된 PCB와 같은 구조체의 산란문제 해석을 위해 top-cover된 마이크로스트립 구조체에 관한 closed-form 그린함수를 유도하고자 한다.

## II. Complex image method

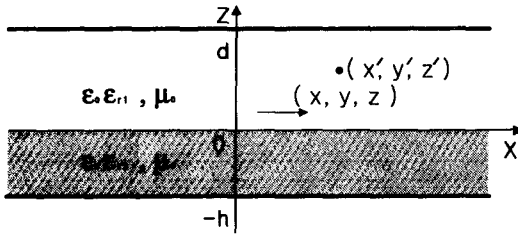


그림1. top-covered 마이크로스트립구조내의 무한소 전류원

그림1은 top-covered 마이크로스트립구조에서 closed-form 그린함수를 구하기 위한 그림이다. 그림1과 같은 두 유전체와 top-covered 마이크로스트립구조에서의 벡터 포텐셜 그린함수는 다음과 같이 표현된다.

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta k_{z1}} T_{TE} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (1)$$

여기에서,

$$T_{TE} = \frac{(1 - e^{-\beta k_{z1}(d-z)})(1 + R_{TE} e^{-\beta k_{z1}z})}{1 + R_{TE} e^{-\beta k_{z1}d}} e^{-\beta k_{z1}(z-z')},$$

$$R_{TE} = -\frac{r_{z1}^{TE} + e^{-\beta k_{z1}h}}{1 + r_{z1}^{TE} e^{-\beta k_{z1}h}}, \quad r_{z1}^{TE} = \frac{k_{z2} - k_{z1}}{k_{z2} + k_{z1}},$$

$$k_{z1}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_{r1} k_0^2, \quad k_{z2}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_{r2} k_0^2$$

### 1. 기존의 Complex image method

기존의 Complex image method에서는 Sommerfeld 적분의 피적분 함수에 포함되어 있는  $T_{TE}$  함수를 복소지수함수의 합으로 변환하여 Sommerfeld identity를 이용하여 해석적 역변환 하게된다. 즉, 벡터 포텐셜 그린함수  $G_A^{xx}$ 에서  $T_{TE}$  함수를 식(2)와 같이 표현한 다음 GPOF법을 이용하여 복소지수함수의 합으로 변환하게된다.

$$T_{TE} = e^{-\beta k_{z1}(z-z')} + (T_{TE} - e^{-\beta k_{z1}(z-z')} - \beta k_{z1} P_m) + \beta k_{z1} P_m \quad (2)$$

여기에서,

$$P_m = \frac{2k_{\rho p} RES_{TE}}{k_\rho^2 - k_{\rho p}^2} \quad (3)$$

$$RES_{TE} = \sum_{r_{z1}} \left[ \frac{e^{\beta k_{z1}(z-z')}}{\beta k_{z1}} \right]_{k_\rho = k_{\rho r}} \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho r}} (k_\rho - k_{\rho p}) T_{TE} \quad (4)$$

이고,  $k_{\rho p}$ 는 복소  $k_\rho$  평면상의 실수축에 pole을 의미한다.

식(2)로 표현된  $T_{TE}$ 를 복소지수의 합 형태로 근사

화하기 위해서는 Sommerfeld 적분경로를 대신하는 다음과 같은 근사화 적분경로 ( $C_{ap}$ )가 사용된다.

$$C_{ap}; k_{z1} = k_1 \left[ -jt + \left(1 - \frac{t}{T_0}\right) \right] \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (5)$$

식(5)로 표현되는 경로  $C_{ap}$ 는 복소  $k_{z1}$  평면상의 근사화 적분경로를 나타낸다.

식(2)로 표현되어진  $T_{TE}$  함수를 식(5)의 근사화 적분 경로를 따라 샘플링하여 GPOF법을 이용해 복소지수함수의 합 형태로 근사화 하게된다.

$$T_{TE} = \sum_{u=1}^M A_u e^{B_u k_{z1}} \quad (6)$$

여기에서,

$$A_u = a_u e^{b_u \frac{T_0}{1+jT_0}}, \quad B_u = -b_u \frac{T_0}{k_1(1+jT_0)} \quad \text{이고,}$$

$a_u, b_u$ 는 GPOF법에서 얻어진 계수,  $M$ 은 복소지수함수의 개수이다.

$T_{TE}$  함수를 복소지수함수의 합으로 근사화한 다음 다시 식(1)에 대입하면 벡터 포텐셜 그린함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{4\pi}{\mu_0} G_A^{xx} = [G_0 + G_{A,ci}^{xx} + G_{A,bm}^{xx}] \quad (7)$$

여기에서,

$$G_0 = \frac{e^{-\beta k_{z1} \gamma_0}}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$$

$$G_{A,ci}^{xx} = \sum_{u=1}^M a_u e^{b_u \frac{T_0}{1+jT_0}} \frac{e^{-\beta k_{z1} \gamma_i}}{\gamma_i}, \quad \gamma_i = \sqrt{\rho^2 + (-jb_i)^2}$$

$$G_{A,bm}^{xx} = (-2\pi j) RES_{TE} H_0^{(2)}(k_{\rho p} \rho) k_{\rho p}$$

본 논문에서는 top-covered 마이크로스트립구조에서 top-cover의 높이를 무한대로 높이면 기존의 논문<sup>[2]</sup>에 나와있는 개방된 마이크로스트립구조와 같게 되므로 개방된 마이크로스트립구조와 비교하기 위하여 개방된 마이크로스트립구조의 벡터 포텐셜 그린함수를 다음과 같이 표현하였다.

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta k_{z1}} (e^{-\beta k_{z1}(z-z')} + R_{TE} e^{-\beta k_{z1}(z+z')}) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (8)$$

여기에서,

$$R_{TE} = -\frac{r_{z1}^{TE} + e^{-\beta k_{z1}h}}{1 + r_{z1}^{TE} e^{-\beta k_{z1}h}}, \quad r_{z1}^{TE} = \frac{k_{z2} - k_{z1}}{k_{z2} + k_{z1}},$$

$$k_{z1}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_{r1} k_0^2, \quad k_{z2}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_{r2} k_0^2$$

그림2는 개방된 마이크로스트립구조의 closed-form 그린함수를 top-cover된 마이크로스트립구조와 동일한 방법으로 구하여 top-cover된 구조와 개방된 구조로 나누어 나타낸 것이다.

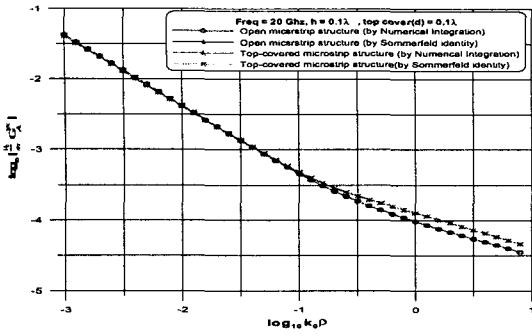


그림2. top-cover된 구조와 개방된 구조의 그린함수

Top-cover된 구조와 개방된 구조 모두 각각의 Sommerfeld identity로 구한 그린함수가 수치적분과 1%이내로 신뢰할 수 있는 결과로 나타나고 또한, top-cover된 구조의 그린함수는 개방된 구조의 그린함수와 차이가 있음을 그림2에서 알 수 있다.

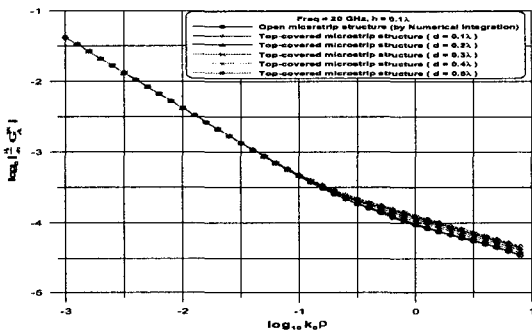


그림3. top-cover 높이를 증가시켰을 경우의 그린함수

그림3은 top-cover된 구조의 그린함수를 top-cover의 높이를 0.1λ에서부터 점점 높였을 경우를 개방된 구조의 그린함수에 가까이 감을 나타낸 것이다.

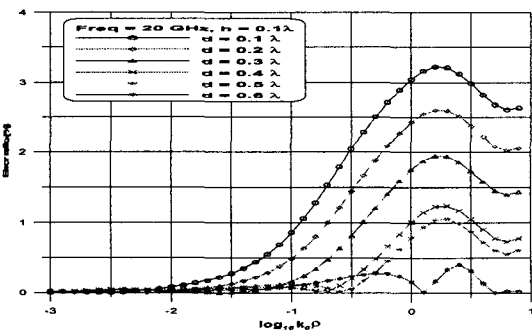


그림4. 개방된 구조의 그린함수에 대한 top-cover 높이를 증가시켰을 경우의 그린함수의 상대오차율

그림4는 개방된 구조의 그린함수에 대한 top-cover

된 구조에서 top-cover의 높이를 점점 높였을 경우 그린함수의 상대오차율을 나타낸 것이다. 그림3과 그림4에서 알 수 있듯이 top-cover의 높이가 점점 높아질수록 개방된 구조와 그린함수가 오차율이 작아짐을 알 수 있다. 기존의 Sommerfeld identity를 이용한 closed-form 그린함수에서는 top-cover의 높이가 0.6λ이상이 되어야 개방된 구조와 오차율이 1% 이내로 신뢰할 수 있게되어 개방된 마이크로스트립 구조에서 구해진 간단한 그린함수를 이용할 수 있게 된다.

## 2. General complex image method

General complex image는 기존의 complex image method와는 달리 식(2)를  $\mathcal{J}k_{z1}$ 으로 나누고 복소지수함수의 합 형태로 근사화 하여, Sommerfeld identity 대신에 다음과 같은 Bessel 함수의 적분 공식을 이용하여 공간영역 그린함수를 closed-form 형태로 표현하게 된다.

$$\int_0^\infty e^{-k_z \omega} k_\rho J_0(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{\omega}{(\omega^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9a)$$

$$\int_0^\infty e^{-k_z \omega} k_\rho J_1(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{3\omega\rho}{(\omega^2 + \rho^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (9b)$$

General complex image method는 또한 기존의 complex image method와는 달리 복소  $k_\rho$  평면에서 아래의 근사화 적분 경로를 따라 샘플링하게 된다.

$$L_1^0; k_\rho = k_1[1 + j]t \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (10a)$$

$$L_1^1; k_\rho = k_1 \left[ t + jT_0 \left( \frac{t - T_1}{T_0 - T_1} \right) \right] \quad T_0 \leq t \leq T_1 \quad (10b)$$

$$L_1^2; k_\rho = k_1 t \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad (10c)$$

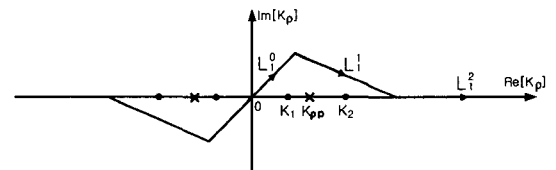


그림5. 복소  $k_\rho$  평면에서의 근사화 적분경로

먼저 경로  $L_1^2$ 를 따라 복소지수함수의 합으로 다음과 같이 근사화한다.

$$f_{2(k_\rho)} (\cong \frac{T_{TE}}{\mathcal{J}k_{z1}} \text{ for } L_1^2) = \sum_{n=1}^{N_2} A_{2n} e^{-B_{2n} k_\rho} \quad (11a)$$

그리고, 경로  $L_1^1$ 을 따라 다음과 같이 근사화하게 된다.

$$f_{1(k_s)} (\cong \frac{T_{TE}}{j2k_{z1}} - f_{2(k_s)} \text{for } L_1^1) = \sum_{n=1}^{N_1} A_{1n} e^{-B_{1n} k_s} \quad (11b)$$

다시 경로  $L_1^0$ 를 따라 다음과 같이 근사화하게 된다.

$$f_{0(k_s)} (\cong \frac{T_{TE}}{j2k_{z1}} - f_{2(k_s)} - f_{1(k_s)} \text{for } L_1^0) = \sum_{n=1}^{N_0} A_{0n} e^{-B_{0n} k_s} \quad (11c)$$

여기에서,

$$A_{2n} = a_{2n}, \quad B_{2n} = -\frac{b_{2n}}{k_1},$$

$$A_{1n} = a_{1n} e^{\frac{jT_0 T_1}{T_0(1+j) - T_1}}, \quad B_{1n} = -b_{1n} \frac{(T_0 - T_1)}{k_1 \{T_0(1+j) - T_1\}},$$

$$A_{0n} = a_{0n}, \quad B_{0n} = -\frac{b_{0n}}{k_1(1+j)}$$

이다.

$\frac{T_{TE}}{j2k_{z1}}$  함수를 식(11a)~(11c)와 같이 복소지수함수의 합으로 근사화한 다음 다시 식(9a)에 대입하면 벡터 포텐셜 그린함수는 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{4\pi}{\mu_0} G_A^{xx} = [G_0 + G_{A,ci}^{xx} + G_{A,pm}^{xx}] \quad (12)$$

여기에서,

$$G_0 = \frac{e^{-jk_1 \gamma_0}}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

$$G_{A,ci}^{xx} = \sum_{n=1}^{M_0} A_{0n} \frac{B_{0n}}{(B_{0n}^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{M_1} A_{1n} \frac{B_{1n}}{(B_{1n}^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{M_2} A_{2n} \frac{B_{2n}}{(B_{2n}^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$G_{A,pm}^{xx} = (-2\pi j) RES_{TE} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho) k_{\rho\rho}$$

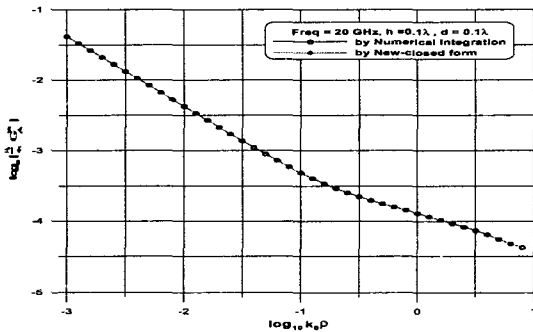


그림6. top-covered 마이크로스트립구조의 수치적분과 new closed-form 그린함수 비교

그림6는 top-covered 마이크로스트립구조에서의 그린함수를 수치적분에 의한 값과 new closed-form에 의한 값을 비교한 것이다. new closed-form에 의한 그린함수가 수치적분에 의한 그린함수와 상대오차가 1% 이내로 신뢰할 수 있음을 알 수 있다.

또한, new closed-form을 이용한 그린함수에서는

top-cover의 높이가 0.5λ이상이 되어야 개방된 구조와 오차율이 1% 이내로 신뢰할 수 있게되어 개방된 마이크로스트립 구조에서 구해진 간단한 그린함수를 이용할 수 있게된다.

#### IV. 결론

Top-covered 마이크로스트립구조에서 closed-form 그린함수를 구하는 방법으로 기존의 Sommerfeld identity를 이용하는 방법과 Bessel 함수의 적분공식을 이용하는 new closed-form을 각각 살펴보았다. Sommerfeld identity를 이용한 기존의 방법과 new closed-form의 그린함수가 각각의 수치적분의 결과와 1%이내의 신뢰할 수 있는 결과를 볼 수 있었다.

또한 기존의 개방된 마이크로스트립구조에서의 closed-form 그린함수와 상대오차가 Sommerfeld identity를 이용한 closed-form 그린함수에서는 top-cover의 높이 d가 0.6λ이상일 경우 1%이내로 신뢰할 수 있는 반면, new closed-form을 이용한 그린함수는 top-cover의 높이가 0.5λ이상일 경우 1%이내로 기존의 개방된 마이크로스트립구조에서의 closed-form 그린함수를 그대로 사용할 수 있음을 볼 수 있었다.

본 논문에서 top-cover 높이 d에 따른 closed-form 그린함수에 대한 영향을 제시함으로써 top-cover된 마이크로스트립구조 문제의 효율적인 수치해석을 위해 실용적으로 사용되어 질 수 있을 것으로 사료된다.

#### 참고 문헌

[1] J. J. Yang, Y. L. Chow, G. E. Howard, and D. G. Fang, "Complex Images of an Electric Dipole in Homogeneous and Layered Dielectrics Between Two Ground Planes", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 40. no. 3, pp. 595- 599, March 1992.

[2] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard, "A Closed Form Spatial Green's Function for the Thick Microstrip Substrate", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 39. no. 3, pp. 588- 592, March 1991.

[3] Yuehe. Ge, Karu. P. Esselle, "New Closed-Form Green's Functions for Microstrip Structures-Theory and Results", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 50, no. 6, pp. 1556-1560, June 2002.

"본 연구는 경상북도, 중소기업청에서 지원하는 10차 (2002)년도 금오공과대학교 산학연 공동기술개발 컨소시엄과제로 수행되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다."